# BAB II

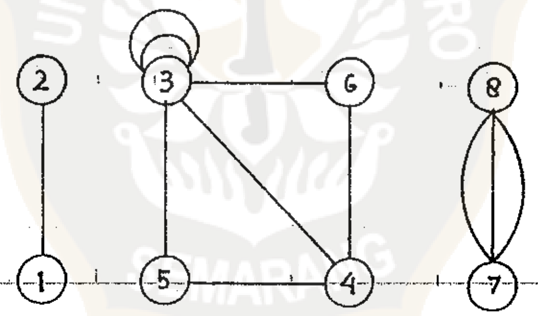
# MATERI PENUNJANG

## 2.1. DASAR-DASAR TEORI GRAPH

**Definisi 2.1.1**

Suatu graph G(V,E) terdiri dari himpunan berhingga tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik (V(G)) dan suatu daftar pasangan tidak terurut dari elemen-elemen titik yang disebut garis (E(G)).

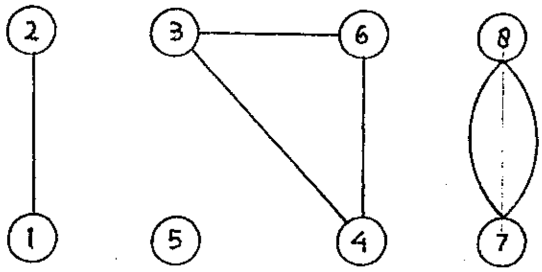
Contoh : Gambar 1 adalah graph G(V,E) dengan V={1,2,3,...8} dan E={(1,2),(3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (3,3), (3,3), (7,8), (7,8), (7,8)}




Gambar 1. Sebuah graph G(V,E)

**Definisi 2.1.2.**

Sebuah subgraph dari graph G(V,E) adalah sebuah graph $G_s$ ($V_s$,$E_s$) dengan $V_s$ dan $E_s$ adalah subset dari V dan E, jika $V_s$=V maka subgraphnya disebut Spanning Subgraph dari G.




Gambar 2. Sebuah Subgraph $G_s(V_s, E_s)$ dari graph G(V,E).

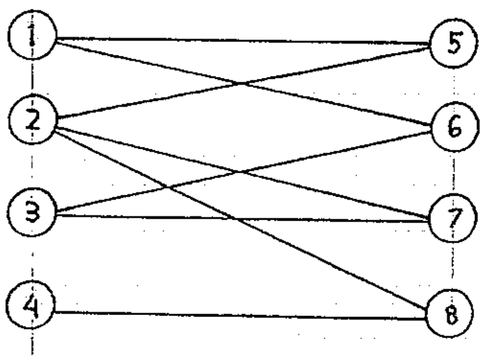
**Definisi 2.1.3.**

Derajat (Degree) sebuah node i dalam graph dinotasikan dengan d(i) yaitu jumlah garis-garis yang incident dengan node i.

**Definisi 2.1.4.**

Sebuah graph G(V,E) dikatakan bipartite jika himpunan V dipartisi menjadi dua subset yang terpisah $V_1$ dan $V_2$ sedemikian sehingga setiap garis dari graph G menghubungkan sebuah titik di $V_1$ ke sebuah titik di $V_2$ atau garis-garisnya mempunyai suatu ujung akhir di $V_1$ dan ujung yang lain di $V_2$.

Contoh: Gambar 3 adalah graph bipartite dengan himpunan titik $V_1=\{1,2,3,4\}$ dan $V_2=\{5,6,7,8\}$ dengan $E_{(6)}=\{(1,5), (1,6), (2,5), (2,7), (2,8), (3,6), (3,7), (4,8)\}$




Gambar 3. Sebuah graph bipartite.

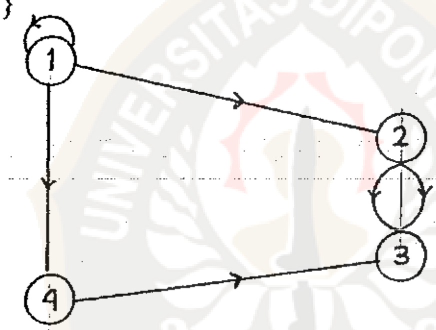
## 2.2 DIRECTED GRAPH DAN (p,s)-DIGRAPH

**Definisi 2.2.5**

Suatu graph G(V,E) disebut directed graph bila semua garis dalam graph tersebut mempunyai arah.

Garis-garis dengan titik-titik awal (i) sama dan titik-titik akhir (j) sama disebut garis paralel. Jika garis dengan titik awal sama dengan titik akhir maka disebut self loop.

Contoh: V={1,2,3,4}




Gambar 5. Directed Graph dengan self loop di titik 1 dan garis paralel dari titik 2 ke titik 3.

**Definisi 2.2.6**

Derajat keluar (out going degree) dan derajat masuk (incoming degree) dalam sebuah digraph G, $d^+(i)$ menyatakan jumlah garis-garis di G yang mempunyai titik I sebagai titik awal yang disebut derajat keluar sedangkan $d^-(i)$ menyatakan jumlah garis-garis di G yang mempunyai titik i sebagai titik akhir yang disebut derajat masuk.

Kemudian ada dua nilai yang didefinisikan untuk setiap titik di G. Nilai itu ditunjukkan sebagai derajat positif dan derajat negatif sebuah titik. Jika d(i) menyatakan nilai garis-garis G yang incident dengan titik i, maka berlaku

$$d(i) = d^{+}(i) + d^{-}(i)$$

Karena setiap garis keluar dari suatu titik akan menuju ke titik lain maka ini membuktikan bahwa nilai b dari garis-garis G berhubungan dengan derajat titik-titiknya dengan memiliki persamaan :

$$b = \sum_{i} d^{+}(i) = \sum_{i} d^{-}(i)$$ , dimana semua i di G.

sebagai contoh dalam digraph G pada gambar 6 mempunyai:

$d^{+}(i) = 2$ $\quad d^{-}(i) = 1$ $\quad d^{+}(4) = 2$ $\quad d^{-}(4) = 1$

$d^{+}(2) = 1$ $\quad d^{-}(2) = 2$ $\quad d^{+}(5) = 1$ $\quad d^{-}(5) = 2$

$d^{+}(3) = 3$ $\quad d^{-}(3) = 2$ $\quad d^{+}(6) = 1$ $\quad d^{-}(6) = 2$

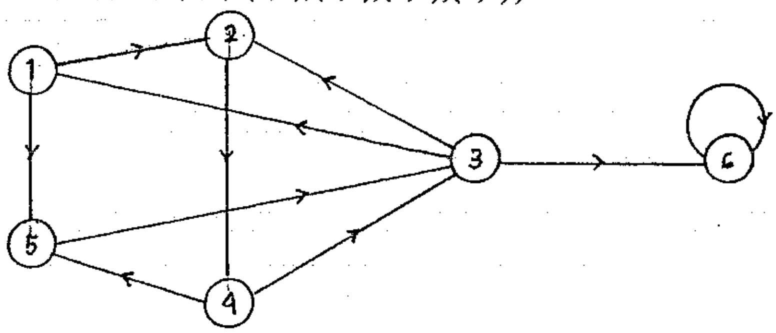
dan perhitungan b menghasilkan:

$$b = \sum_{i=1}^{6} d^{+}(i) = 2+1+3+2+1+1$$

$$= \sum_{i=1}^{6} d^{-}(i) = 1+2+2+1+2+2 = 10$$

barisan derajat $[d^{+}(i), d^{-}(i)]$ dari titik-titik i (i=1,2,...,6) ditulis dengan

$$\{ [d^{+}(i), d^{-}(i)]\}=\{(2,1),(1,2),(3,2),(2,1),(1,2),(1,2)\}$$




Gambar 6. Sebuah digraph G(V,E)

Diberikan directed graph G(V,E), dengan setiap titik $x \in V$ dihubungkan dengan sebuah nonnegatif integer h(i) dan setiap garis $(x,y) \in E$ dihubungkan dengan sebuah nonnegatif integer g(x,y). Fungsi h didefinisikan dari V ke nonnegatif integer . Jika X dan Y subset V, maka (X,Y) dinotasikan sebagai himpunan semua garis dari $x \in X$ ke $y \in Y$, dan fungsi h atau g didefinisikan pada v atau E, maka dapat ditulis:

$$h(X) = \sum_{x \in X} h(x)$$

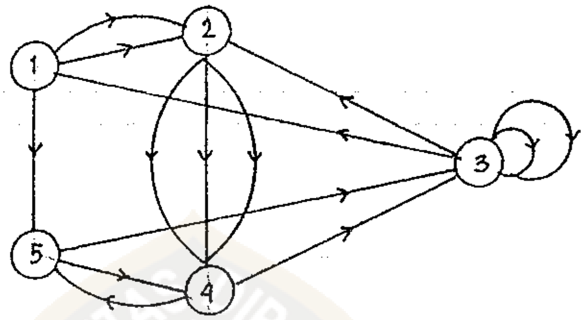
$$g(X,Y) = \sum_{(x,y) \in (X,Y)} g(x,y)$$

Sebuah himpunan yang mengandung satu elemen sebagai elemen tunggal, yaitu misal X mengandung satu elemen tunggal x akan dinotasikan (x,Y),h(x),g(x,Y). Dalam hubungan ini (x,y) mempunyai dua arti yang berbeda. Arti yang pertama sebagai satu garis paralel yang dinotasikan $(x,y)_t$ , t=1,2,...,k, $k \geq 2$ di E. Sedangkan arti lainnya dinotasikan sebagai himpunan garis-garis paralel dari X ke Y di E. Untuk jumlah elemen sebuah himpunan finite S dinotasikan dengan $|S|$. Kemudisn $|X|$ menyatakan jumlah titik dalam X, dan $|(X,Y)|$ menyatakan jumlah garis di (X,Y). Dan $|(x,y)| = k$ dinyatakan sebagai jumlah garis paralel dari x ke y di E.

**Definisi 2.2.7.**

Sebuah (p,s) digraph adalah sebuah graph berarah G(V,E) dimana $|(x,y)| \leq p$ untuk semua $(x,y) \in E$, $x \neq y$ dan $|(x,x)| \leq s$ untuk semua $x \in V$, dimana p menyatakan paralel dan s menyatakan self loop. Jika p = s, maka (p,s)- digraph disebut p-digraph.

Dalam gambar 7 graph berarah G(V,E) adalah (3,2)-digraph, karena jumlah maksimum garis paralel dari satu titik ke titik lain adalah 3 yaitu |(2,4)=3| dan jumlah maksimum self loop di titik-titiknya adalah 2 yaitu |(3,3)=2|. Dan barisan derajat tiap titik adalah {[ $d^+$ (x), $d^-$ (x)]}={(3,1),(3,3),(4,4),92,4),(2,2)}

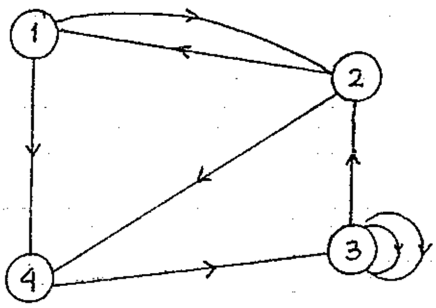


Gambar 7. Sebuah (3,2)-digraph G(V,E)

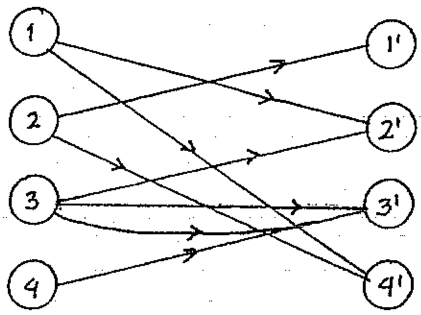
**Definisi 2.2.8**

Penyajian digraph bipartite (B) ekivalen dengan penyajian digraph G dengan V himpunan titiknya. Untuk himpunan V di G dibentuk replika yaitu V' dengan elemen-elemen di dalamnya berhubungan dengan elemen di V. Garis (i,j') di G ada, dengan setiap garis paralel depandang sebagai garis sendiri. dengan kata lain dalam G dan B mempunyai $\alpha(i,j)=\alpha(i,j')$.

Sebagai contoh gambar 8b adalah digraph bipartite B yang didapat dari digraph G di gambar 8a.



Gambar 8a. Sebuah digraph G(V,E)



Gambar 8b. Digraph bipartite

## 2.3. PERLUASAN PERSEDIAAN - PERMINTAAN

**THEOREMA 2.3.1**

Diberikan jaringan G(V,E,c,f) dengan himpunan V dipartisi menjadi tiga himpunan bagian yang tidak saling berhubungan S, R, dan T. Setiap $x \in S$ berhubungan dengan 2 fungsi real non negatif $a(x)$ dan $a'(x)$, dimana $a(x) \le a'(x)$. Dan untuk setiap $x \in T$ berhubungan dengan 2 fungsi real non negatif b(x) dan b'(x), dimana $b(x) \le b'(x)$, sehingga

$$a(x) \le f(x,V) - f(V,x) \le a'(x), \qquad x \in S \qquad (2.1)$$

$$f(x,V) - f(V,x) = 0, \qquad x \in R \qquad (2.2)$$

$$b(x) \le f(V,x) - f(x,V) \le b'(x), \qquad x \in T \qquad (2.3)$$

$$c(x,y) \ge f(x,y) \ge 0, \qquad (x,y) \in E \qquad (2.4)$$

adalah fisibel jika dan hanya jika

$$c(X, \overline{X}) \ge b(T \cap \overline{X}) - a'(S \cap \overline{X}) \qquad (2.5)$$

$$c(X, \overline{X}) \ge a(S \cap X) - b'(T \cap X) \qquad (2.6)$$

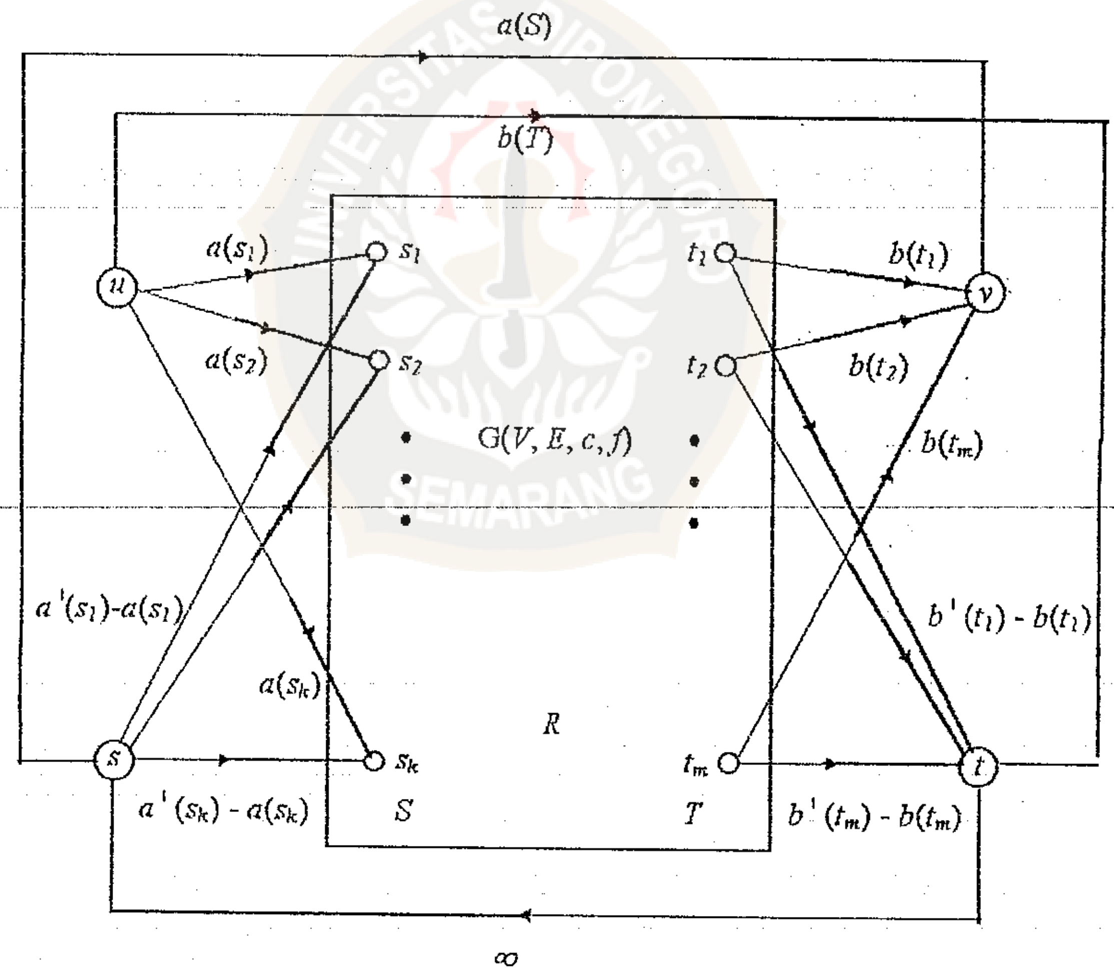
berlaku untuk setiap $X \subseteq V$, di mana $\overline{X} = V - X$.

**Bukti :**

Pertama dibentuk perluasan jaringan G'(V',E',c',f') seperti pada gambar 9 dengan menghubungkan titik baru s,t,u dan v dan garis (s,S), (u,S), (T,t), (T,v), (u,t) (s,v) dan (t,s) dengan kapasitas yang didefinisikan sebagai :

$$c'(s,x) = a'(x) - a(x), \qquad x \in S \qquad (2.7.a)$$

| | | |
|---|---|---|
| $c'(u, x) = a(x)$, | $x \in S$ | (2.7b) |
| $c'(x, t) = b'(x) - b(x)$, | $x \in T$ | (2.7c) |
| $c'(x, v) = b(x)$, | $x \in T$ | (2.7d) |
| $c'(u, t) = b(T)$, | | (2.7e) |
| $c'(s, v) = a(S)$ | | (2.7f) |
| $c'(t,s) = \sim$ | | (2.7g) |
| $c'(x, y) = c(x,y)$, | $(x, y) \in E$ | (2.7h) |




Gambar 9. Suatu jaringan $G'(V', E', c', f')$ yang diperoleh dari perluasan jaringan $G(V,E,c,f)$ dengan menghubungkan titik-titik $s$, $t$, $u$, dan $v$ dari arah panah seperti yang ditunjukkan.

Dapat disimpulkan bahwa kondisi aturan (2.1) - (2.4) adalah fisibel jika dan hanya jika nilai dari aliran maksimal dari u ke v dalam $G'$ adalah a(S) + b(T). Untuk menunjukkan hal ini , misalkan f adalah alur yang fisibel dalam G.

Perluas f dalam G ke $f'$ dalam $G'$ dengan mendefinisikan :

$$f'(s, x) = f(x, V) - f(V, x) - a(x), \quad x \in S \quad (2.8.a)$$

$$f'(u, x) = a(x), \quad x \in S \quad (2.8.b)$$

$$f'(x, t) = f(V, x) - f(x, V) - b(x), \quad x \in T \quad (2.8.c)$$

$$f'(x, v) = b(x), \quad x \in T \quad (2.8.d)$$

$$f'(u, t) = b(T), \quad (2.8.e)$$

$$f'(s, v) = a(S) \quad (2.8.f)$$

$$f'(t,s) = f(S, V) - f(V, S) \quad (2.8.g)$$

$$f'(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in E \quad (2.8.h)$$

Kemudian dapat diperiksa apakah $f'$, yang didefinisikan di atas adalah alur dari u ke v dalam $G'$ yang bernilai a(S) + b(T).

Akibatnya, jika $f'$ adalah aliran dari u ke v dalam $G'$ yang bernilai a(S) + b(T) maka

$$f'(u, x) = a(x), \quad x \in S \quad (2.9.a)$$

$$f'(x, v) = b(x), \quad x \in T \quad (2.9.b)$$

Misal f menjadi $f'$ dalam E. Maka untuk $x \in S$ didapat

$$f'(u, x) + f'(s, x) = f(x, V) - f(V, x) \quad (2.10)$$

Karena dari (2.7a)

$$a'(x) - a(x) \geq f'(s, x) \geq 0 \quad (2.11)$$

Persamaan (2.10) dapat ditulis kembali sebagai :

$$a'(x) \geq f(x, V) - f(V, x) \geq a(x) \qquad (2.12)$$

Setelah melihat (2.9a) . Selanjutnya, dapat ditunjukkan bahwa

$$b'(x) \geq f(V, x) - f(x, V) \geq b(x) \qquad x \in T \qquad (2.13)$$

Pembuktian secara lengkap dari pernyataan yang ditunjukkan oleh aturan (2.1) - (2.4) adalah benar jika dan hanya jika nilai aliran maksimal dari u ke v dalam G' adalah a(S) + b(T). Sehingga untuk membuktikan teorema di atas dengan menunjukkan bahwa kondisi (2.5) dan (2.6) adalah perlu dan cukup untuk keberadaan aliran f ' dari u ke v dalam G ' yang memiliki nilai a(S) + b(T).

Akan ditunjukkan bahwa setiap potongan u – v dalam G' (V ',E ',c ', f ') memiliki nilai kapasitas paling kecil a(S) + b(T), sehingga permasalahan menjadi fisibel atau dapat dipecahkan.

Akan diambil 4 kasus untuk membedakannya , misal $(X', \overline{X}')$ menjadi suatu potongan u-v didalam G'.

**KASUS 1**

$s \in X'$ dan $t \in \overline{X}'$ . Partisi dari subset - subset X ' dan $\overline{X}'$ dari V ' ke dalam :

$X' = \{u,s\} \cup X$, $\qquad \overline{X}' = \{v,t\} \cup \overline{X}$ $\qquad$ sehingga $\overline{X} = V-X$

Maka

$$c'(X', \overline{X}') = c'(u,t) + c'(u,\overline{X}) + c'(s,v) + c'(s,\overline{X}) + c'(X, v) + c'(X,t) + c'(X,\overline{X})$$

$= b(T) + a(S \cap \overline{X}) + a(S) + a'(S \cap \overline{X}) - a(S \cap \overline{X}) + b(T \cap X) + b'(T \cap X) - b(T \cap X) + c(X, \overline{X})$

Karena $a'(S \cap \overline{X}) \geq a(S \cap \overline{X})$ dan $b'(T \cap X) \geq b(T \cap X)$, hal ini menunjukkan bahwa

$$c'(X', \overline{X}') \geq a(S) + b(T)$$

**KASUS 2**

$s \in \overline{X}'$ dan $t \in X'$.

Pada kasus ini $c'(X', \overline{X}')$ adalah infinite dan tidak ada kondisi yang dipenuhi.

**KASUS 3**

$s,t \in X'$. Dipartisi $X'$ dan $\overline{X}'$ kedalam

$$X' = \{s,t,u\} \cup X, \qquad \overline{X}' = \{v\} \cup \overline{X}$$

maka didapat

$$c'(X', \overline{X}') = c'(s,v) + c'(s, \overline{X}) + c'(u, \overline{X}) + c'(X,v) + c'(X, \overline{X})$$

$$= a(S) + a'(S \cap \overline{X}) - a(S \cap \overline{X}) + a(S \cap \overline{X}) + b(T \cap X) + c(X, \overline{X})$$

$$= a(S) + a'(S \cap \overline{X}) + b(T) - b(T \cap \overline{X}) + c(X, \overline{X})$$

Hal ini menunjukkan bahwa

$$c'(X', \overline{X}') \geq a(S) + b(T)$$

Jika dan hanya jika

$$c(X, \overline{X}) \geq b(T \cap \overline{X}) - a'(S \cap \overline{X})$$

**KASUS 4**

$s,t \in \overline{X}'$ . Partisi $X'$ dan $\overline{X}'$ ke dalam

$X' = \{u\} \cup X$, $\overline{X}' = \{s,t,v\} \cup \overline{X}$

Kemudian diperoleh

$$c'(X', \overline{X}') = c'(u,t) + c'(u, \overline{X}) + c'(X,t) + c'(X,v) + c'(X, \overline{X})$$
$$= b(T) + a(S \cap \overline{X}) + b'(T \cap X) - b(T \cap X) + b(T \cap X) + c(X, \overline{X})$$
$$= b(T) + a(S) - a(S \cap X) + b'(T \cap X) + c(X, \overline{X})$$

Ini menunjukkan bahwa

$$c'(X', \overline{X}') \geq a(S) + b(T)$$

Jika dan hanya jika

$$c(X, \overline{X}) \geq a(S \cap X) - b'(T \cap X)$$

Telah ditunjukkan bahwa aturan (2.1)-(2.4) adalah fisibel jika dan hanya jika nilai dari aliran maksimal dari u ke v dalam $G'$ adalah a(S) + b(T), dan aliran dalam $G'$ ada (exis), jika dan hanya jika kondisi (2.5) dan (2.6) dipenuhi untuk setiap subset dari himpunan titik dalam G.

**THEOREMA 2.3.2**

Misalkan G(V,E) sebuah directed graph yang menghubungkan setiap $x \in V$ yang memenuhi

$$0 \leq a(x) \leq a'(x) \qquad (2.14.a)$$

$$0 \leq b(x) \leq b'(x) \qquad (2.14.b)$$

dengan $a(x)$, $a'(x)$, $b(x)$, $b'(x)$ integer non negatif.

Dan G(V,E) mempunyai sebuah (p,s) subgrah H dengan p,s integer non negatif dan derajat keluar $d_H^+$ (x) dan derajat masuk $d_H^-$ (x) yang memenuhi

$$a(x) \leq d_H^+(x) \leq a'(x) \qquad (2.15.a)$$

$$b(x) \leq d_H^-(x) \leq b'(x) \qquad (2.15.b)$$

Untuk setiap x ∈ V jika hanya jika

$$\sum_{y \in \gamma(x)} \min \left\{ b'(y) , \sum_{x \in X} \min \left[ \left| (x,y) \right|, \delta_{xy} \; (s-p)+p \right] \right\} \geq a(X) \qquad (2.16.a)$$

$$\sum_{y \in \gamma^*(x)} \min \left\{ a'(y) , \sum_{x \in X} \min \left[ \left| (y,x) \right|, \delta_{xy} \; (s-p)+p \right] \right\} \geq b(X) \qquad (2.16.b)$$

untuk semua $X \subseteq V$, dimana

$\delta_{xy}$ : kronecker delta $\delta_{xy} = 0 , x \neq y$

$\delta_{xy} = 1 , x = y$

$\gamma(X)$: Himpunan titik-titik terminal dari garis-garis di G(V,E) yang mempunyai titik asal di x

$\gamma^*(X)$ : Himpunan titik-titik asal dari garis-garis di G(V,E) yang mempunyai titik terminal di x.

**Bukti :**

Pembuktian Theorema di atas dengan mencari syarat perlu dan syarat cukup di G(V,E) untuk sebuah (p,s) directed graph sebagai spanning subgraph H dari G(V,E) yang memenuhi derajat keluar $d_H^+$ (x) dan derajat masuk $d_H^-$(x) yaitu

$$a(x) \leq d_H^+(x) \leq a'(x) , x \in V$$

$$b(x) \le d_{\bar{H}}(x) \le b'(x)\ ,\ x \in V$$

Untuk menentukan syarat perlu dan syarat cukup yaitu dengan mengubah permasalahan ini menjadi sebuah permasalahan aliran. Pertama membentuk directed graph bipartite B(V', V'', E') dari G(V,E) untuk setiap $x \in V$ dengan cara menghubungkan dua titik yaitu $x' \in V'$ dan $x'' \in V''$. Garis (x', y'') di dalam himpunan garis E' adalah sebuah garis (x,y) di G. Dalam kondisi ini garis-garis paralel x ke y di G diwakili dengan garis tunggal $(x', y'') \in E'$, sehingga B(V', V'', E') adalah sebuah (1,0) digraph yang berhubungan dengan G( V,E). Setiap garis $(x', y'') \in E'$ berhubungan dengan sebuah integer non negatif c(x', y'') yang disebut kapasitas (x',y''). Fungsi c dari E' ke integer non negatif didefinisikan:

$$c(x', y'') = \min\left[\,|(x,y)|\,,\ p\right],\quad x \ne y \qquad (2.17.a)$$

$$= \min\left[\ |(x,y)|\ ,\ s\right],\quad x = y \qquad (2.17.b)$$

Selanjutnya untuk melengkapi permasalahan persediaan-permintaan dihubungkan setiap $x' \in V'$ dengan $a(x')$ dan $a'(x')$ integer non negatif, dan setiap $x'' \in V''$ dengan b(x''), b'(x'') integer non negatif yang memenuhi:

$$a(x') = a(x) \qquad a'(x') = a'(x),\qquad x' \in V',\qquad x \in V$$

$$b(x'') = b(x) \qquad b'(x'') = b(x),\qquad x'' \in V'',\qquad x \in V$$

Sekarang directed graph bipartite B(V', V'', E') dapat dipikirkan sebagai jaringan persediaan-permintaan B(V', V'', E', c, f) dengan himpunan V' sebagai sumber dan himpunan V'' sebagai tujuan.

Kemudian sesuai dengan Theorema Perluasan Persediaan dan Permintaan dimana jaringan G(V,E,c,f) dengan himpunan V dipartisi menjadi tiga himpunan bagian S, R, dan T. Setiap $x \in S$ sebagai sumber berhubungan dengan $a(x)$ dan $a'(x)$ serta $a(x) \leq a'(x)$, dan setiap $x \in T$ sebagai tujuan berhubungan dengan b(x) dan b'(x), dengan $b(x) \leq b'(x)$.

Jaringan G(V,E,c,f) ini identik dengan jaringan persediaan-permintaan B(V', V'', E', c, f) dengan himpunan V' sebagai sumber dan himpunan V'' sebagai tujuan.

Sehingga pertidaksamaan di jaringan G(V,E,c,f)

$$a(x) \leq f(x,v)-f(V,x) \leq a'(x) \qquad x \in S$$

$$f(x,V) - f(V,x) = 0 \qquad x \in R$$

$$b(x) \leq f(V,x) - f(x,V) \leq b'(x) \qquad x \in T$$

$$c(x,y) \geq f(x,y) \geq 0 \qquad (x,y) \in E$$

adalah fisibel jika dan hanya jika

$$c(X, \bar{X}) \geq b(T \cap \bar{X}) - a'(S \cap \bar{X})$$

$$c(X, \bar{X}) \geq a(S \cap \bar{X}) - b'(T \cap \bar{X})$$

untuk setiap $X \subseteq V$ dimana $\bar{x} = V-X$, dapat diubah menjadi

$$a(x') \leq f(x', V' \cup V'') - f(V' \cup V'', x') \leq a'(x'), \quad x' \in V' \qquad (2.18)$$

$$b(x'') \leq f(V' \cup V'', x'') - f(x'', V' \cup V'') \leq b'(x''), \quad x'' \in V'' \qquad (2.19)$$

$$c(x', y'') \geq f((x', y'') \geq 0, \qquad (x', y'') \in E' \qquad (2.20)$$

adalah fisibel jika dan hanya jika

$$c(X, \bar{X}) \geq b(V'' \cap \bar{X}) - a'(V' \cap \bar{X}) \quad (2.21.a)$$

$$c(X, \bar{X}) \geq a(V' \cap X) - b'(V'' \cap X) \quad (2.21.b)$$

Untuk setiap subset $X \subseteq V' \cup V''$, dengan $\bar{X} = V' \cup V'' - X$ di jaringan persediaan-permintaan B(V′,V″,E′,c,f). Karena jaringan B adalah bipartite dengan garis arah dari sebuah titik di V′ ke sebuah titik di V ″, maka:

$$f(V' \cup V'', x') = 0 \quad (2.22.a)$$

$$f(x'', V' \cup V'') = 0 \quad (2.22.b)$$

subset-subset X dan $\bar{X}$ adalah

$$X = X' \cup X'' \quad (2.23.a)$$

$$\bar{X} = \bar{X}' \cup \bar{X}'' \quad (2.23.b)$$

dimana $X' \subseteq V'$, $X'' \subseteq V''$, dan

$$\bar{X}' = V' - X' \quad (2.24.a)$$

$$\bar{X}'' = V'' - X'' \quad (2.24.b)$$

Dengan menggunakan sifat bipartite dari jaringan B, pertidaksamaan (2.21) dapat disederhanakan menjadi:

$$c(X', \bar{X}'') \geq b(\bar{X}'') - a'(\bar{X}') \quad (2.25.a)$$

$$c(X', \bar{X}'') \geq a(X') - b'(X'') \quad (2.25.b)$$

Sehingga jaringan persediaan-permintaan B(V′,V″,E′,c,f) dengan himpunan sumber V’ dan himpunan tujuan V’’ menjadi :

$$a(x') \leq f(x', V' \cup V'') \leq a'(x') \qquad x' \in V' \qquad (2.26)$$

$$b(x'') \leq f(V' \cup V'', x'') \leq b'(x'') \qquad x'' \in V'' \qquad (2.27)$$

$$c(x', y'') \geq f(x', y'') \geq 0 \qquad (x', y'') \in E' \qquad (2.28)$$

adalah fisibel jika dan hanya jika

$$c(X', \bar{X}'') \geq b(\bar{X}'') - a'(\bar{X}') \qquad (2.29.a)$$

$$c(X', \bar{X}'') \geq a(X') - b'(X'') \qquad (2.29.b)$$

Untuk setiap subset $X' \subseteq V'$ dan $X'' \subseteq V''$.

Jadi dapat disimpulkan jika directed graph G(V,E) memiliki sebuah spanning (p,s) subgraph H dengan derajat keluar dan derajat masuk yang memenuhi pertidaksamaan (2.15) maka ada f yang seluruh alirannya fisibel di B yang memenuhi (2.26)-(2.28) dengan fungsi kapasitas yang didefinisikan di (2.17). Sebaliknya jika ada f yang seluruh alirannya fisibel dari V' ke V" di B yang memenuhi (2.26) - (2.28) maka dapat membentuk sebuah (p,s) subgraph H yang memenuhi (2.15) di G(V,E), dengan garis (x,y) di H jika $f(x', y'') \neq 0$. Sehingga dengan menggunakan kondisi (2.29) dengan batas-batas di G(V,E) akan mendapatkan kondisi subgraph yang dimaksud.

Kemudian karena kondisi (2.29) masih dijaringan B dengan subset $X' \subseteq V'$ dan $X'' \subseteq V''$ maka (2.29) akan diubah untuk kondisi di G(V,E) dengan subset $X \subseteq V$.

Kondisi pertama untuk (2.29.b) dengan subset $X' \subseteq V'$, dan didefinisikan

$$U'' = \{y'' / y'' \in V'', b'(y'') < c(X', y'')\} \qquad (2.30)$$

$$U'' \subseteq V''$$

Dari definisi tersebut di atas maka pertidaksamaan (2.29.b) menjadi

$$c(X', \bar{X}'') \geq a(X') - b'(X'')$$

$$c(X', \bar{X}'') - b'(X'') \geq a'(X')$$

$$c(X', \bar{u}'') + b'(u'') = \sum_{y'' \in \gamma(X')} \min [b'(y''), c(X',y'')] \geq a(X') \qquad (2.31)$$

Bagian sebelah kiri dari (2.31) adalah jumlahan minimum untuk semua X" ⊆ V", seperti berikut ini:

$$c(X', \bar{u}'') + b'(u'') = c(X', \bar{u}'' \cap X'') + c(X', \bar{X}'') - c(X', u'' \cap \bar{X}'') + b'(u'' \cap \bar{X}'') + b'(X'') - b'(\bar{u}'' \cap X'')$$

Karena

$$c(X', \bar{u}'' \cap X'') - b'(\bar{u}'' \cap X'') \leq 0$$

$$b'(u'' \cap \bar{X}'') - c(X', u'' \cap \bar{X}'') \leq 0, \text{ maka}$$

$$c(X', \bar{u}'') + b'(u'') \leq c(X', \bar{X}'') + b'(X'')$$

Analog untuk kondisi (2.29a) dengan subset X"⊆ V" dan didefinisikan

$$U' = \{x'/x' \in V', a'(x') > c(x',X'')\} \qquad (2.32)$$

$$U' \subseteq V'$$

Dari definisi tersebut di atas maka pertidaksamaan (2.29*a*) menjadi

$$c(X', \bar{X}'') \geq b(\bar{X}'') - a'(\bar{X}')$$

$$c(X', \bar{X}'') + a'(\bar{X}') \geq b'(\bar{X}'')$$

$$c(u', \bar{X}'') + a'(\bar{u}') = \sum_{y'' \in \gamma^{*}(X'')} \min [a'(x'), c(x',x'')] \geq b(\bar{X}'') \qquad (2.33)$$

Bagian sebelah kiri dari (2.33) adalah jumlahan minimum untuk semua X' $\subseteq$ V', seperti berikut ini:

$$c(u', \bar{X}'') + a'(\bar{u}') = c(u' \cap \bar{X}', \bar{X}'') + c(X', \bar{X}'') - c(\bar{u}' \cap X', \bar{X}'') + a'(\bar{u}' \cap X') + a'(X) - a'(u' \cap \bar{X}')$$

Karena

$$c(u' \cap \bar{X}', \bar{X}'') - a'(u' \cap \bar{X}') \leq 0$$

$$a'(\bar{u}' \cap X') - c(\bar{u}' \cap X', \bar{X}'') \leq 0, \quad \text{maka}$$

$$c(u', \bar{X}'') + a'(\bar{u}') \leq c(X', \bar{X}'') + a'(X')$$

Untuk perhitungan c(X',y") dan c(x',X"), y" $\in$ V" dan x' $\in$ V' dengan memisalkan

$$X = \{x \in V / x' \in X'\} \qquad (2.34.a)$$

$$Y = \{y \in V / y'' \in X''\} \qquad (2.34.b)$$

dan dengan definisi fungsi kapasitas (2.417 didapatkan

$$c(X', y'') = \sum_{x \in X} \min \left[ \, |(x,y)|, \ \delta_{xy} \ (s-p)+p \, \right] \qquad (2.35.a)$$

$$c(x', X'') = \sum_{y \in Y} \min \left[ \, |(x,y)|, \ \delta_{xy} \ (s-p)+p \, \right] \qquad (2.35.b)$$

Dengan menggunakan (2.35) pada pertidaksamaan (2.31) dan (2.33) akan didapatkan pertidaksamaan (2.16) yaitu

$$\sum_{y \in \gamma(x)} \min \left\{ b'(y) \ , \sum_{x \in X} \min \left[ \, |(x,y)|, \ \delta_{xy} \ (s-p)+p \right] \right\} \geq a(X)$$

$$\sum_{y \in \gamma^{*}(x)} \min \left\{ a'(y) \ , \sum_{x \in X} \min \left[ \, |(y,x)|, \ \delta_{xy} \ (s-p)+p \right] \right\} \geq b(X)$$