BAB II

PENDEKATAN ESTIMASI DAN PENDEKATAN NUMERIK UNTUK FUNGSI TURUNAN DAN INTEGRASI

Dalam melakukan pengestimasian nilai densitas dari data pengamatan, ada beberapa teori-teori dasar yang harus diperhatikan. Teori-teori ini akan digunakan sebagai materi penunjang dalam pengestimasian nilai densitas dari data pengamatan.

2.1. Jenis - Jenis Pendekatan Estimasi

Nilai densitas dari suatu pengamatan data-data sampel dapat diestimasi, dengan memperhatikan distribusi dari varibel acaknya. Untuk distribusi variabel acak yang sudah diketahui maka estimasi densitasnya bersifat spesifik. Sedangkan untuk distribusi variabel acak yang belum diketahui, nilai estimasi yang dihasilkan belum tentu sama. Hal ini disebabkan oleh asumsi dari distribusi variabel acaknya yang berbeda-beda. Misalkan didapat data-data pengamatan x_i sebanyak n, diasumsikan variabel acak berdistribusi bebas identik (iid) dengan densitas dari f yang tidak diketahui. Untuk mengestimasi nilai densitas dari data-data pengamtan sampel tesebut ada dua konsep dasar pendekatan yang dapat dikerjakan.

Kedua konsep dasar tersebut adalah :

1. Pendekatan Parameter
2. Pendekatan Non Parameter

2.1.1. Pendekatan Parameter

Didalam pendekatan secara parameter, estimasi yang dihasilkan hanya estimasi untuk parameter - paramater dari fungsi densitas. Dalam hal ini estimasi densitas merupakan masalah yang sama dengan mengestimasi parameter. Untuk mendapatkan densitas dari data, langkah pertama yang dikerjakan adalah mengasumsikan distribusi dari data.

Contoh 2.1

Misalkan variabel acak X diasumsikan berdistribusi normal dengan mean (μ) dan varian (σ^2) yang tidak diketahui. Fungsi densitas dari distribusi normal adalah :

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sigma}\,\phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$

Dalam hal ini estimasi densitas sama halnya dengan mengestimasi μ dan σ^2.

2.1.2 Pendekatan Non Parameter

Perbedaan dengan pendekatan secara parameter adalah bahwa distribusi variabel acaknya tidak diketahui. Untuk mendapatkan nilai estimasi dari data-data pengamatan didekati dengan fungsi-fungsi tertentu. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mengestimasi fungsi non parameter adalah dengan Estimasi Kernel Density. Pengestimasian dengan kernel density ini memiliki nilai estimasi yang baik.

2.3. Pendekatan Numerik untuk Suatu Fungsi

Untuk mendapatkan nilai pendekatan dari fungsi turunan dan fungsi integral dapat menggunakan perhitungan secara numerik, sehingga perhitungan nilai pendekatan dari fungsi turunan dan fungsi integral dapat diimplementasikan kedalam program komputer.Hal ini disebabkan tidak semua fasilitas yang berhubungan dengan matematika didapatkan dalam program komputer.

2.3.1. Pendekatan Numerik Untuk Fungsi Turunan

Metode yang umum digunakan untuk mencari formula diferensi numerik adalah dengan mendeferensikan interpolasi polinomial. Salah satu bentuk metode ini adalah formula selisih muka Newton (Forward Diferrence Formula).

Formula selisih muka Newton tersebut adalah

$$Y = Y_o + u\Delta\, Y_o + \frac{u(u-1)\Delta^2 Y_o}{2} + \ldots.$$

Dengan $x = x_o + uh$

Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$= \frac{1}{b}\left[\Delta Y_o + \frac{2u-1}{2}\Delta^2 Y_o + \ldots\right] \quad \ldots\ldots(2.3.1)$$

Untuk $\frac{d^2y}{dx^2}$ didapat dengan mendeferensialkan persamaan (2.3.1). Sehingga akan didapat nilai dari $\frac{d^2y}{dx^2}$ adalah :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{b^2}\left[\Delta Y_o - \Delta^3 Y_o + \frac{11}{12}\Delta^4 Y_o + \ldots\right]$$

Sedangkan untuk mencari formula diferensi numerik fungsi order tinggi dapat digunakan formula selisih tengah Newton (Central Difference Formula). Formula ini memiliki nilai pendekatan yang baik.

Formula selisih tengah newton tersebut adalah

$$f_i = \frac{1}{p}(\Delta^i f_i) \qquad p : \text{selisih } x_i \text{ dan } x_{i+1}$$

dimana $\Delta f_i = f_i - f_{i-1}$

contoh 2.5

untuk $i=1$ maka akan didapat

$$\Delta f_1 = \frac{f_1 - f_0}{p}$$

Untuk mendapatkan nilai koefisien - koefisien pada fungsi turunan order tinggi adalah dengan menggunakan aturan segitiga Pascal.

Aturan segitiga Pascal

1 1	untuk turunan ke-1
1 2 1	untuk turunan ke-2
1 3 3 1	untuk turunan ke-3
1 4 6 4 1	untuk turunan ke 4
. . . .	untuk turunan ke-n

Sehingga formula diatas dapat disederhanakan menjadi

$$f_n = \frac{koef(1)\ f_n - koef(2)\ f_{n-1} + \ldots + koef(n-1) f_0}{p^n}$$

Contoh 2.6

$$f^{IV}(x) = (coef(1) f_4 - coef(2)\ f_3 + coef(3)\ f_2 - coef(4) f_1 + coef(5)\ f_0)/p^4$$

$$= \frac{(1*f(x+4p) - 4*f(x+3p) + 6*f(x+2p) - 4*f(x+p) + 1*f(x))}{p^4}$$

2.3.2. Pendekatan Numerik Untuk Fungsi Integral

Untuk memperoleh nilai pendekatan dari fungsi $\int_a^b f(x)\,dx$ dengan nilai fungsi f(x) yang diketahui dari sekumpulan nilai x yang berjarak sama pada interval [a,b].

Dimana $X_o = a$, $X_r=X_o + rp$ Dengan $r = 0,1,2,...$

Untuk $r=n$ maka $X_n = b$

Dan h merupakan konstanta yang berkorespondensi X_r dan f_r adalah :

$f_r = f(x_r)$

$= f(x_o + rp)$

Dalam hal ini akan digunakan metode atau aturan Trapezoidal. Aturan tersebut adalah sebagai berikut :

Misal

$$\int_{x0}^{x1} y\,dx = p\left[Y_o + \frac{1}{2}\Delta Y_o\right]$$

$$= p\left[Y_o + \frac{1}{2}(Y_1 - Y_o)\right]$$

$$= \frac{p}{2}\left[Y_o + Y_1\right]$$

Untuk interval $[x_1, x_2]$

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = p\left[Y_1 + \frac{1}{2}\Delta Y_2\right]$$

$$= p\left[Y_1 + \frac{1}{2}(Y_2 - Y_1)\right]$$

$$= \frac{p}{2}\left[Y_2 + Y_1\right]$$

Untuk interval $[x_{n-1}, x_n]$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} y\,dx = p\left[Y_{n-1} + \frac{1}{2}\Delta Y_n\right]$$

$$= p\left[Y_{n-1} + \frac{1}{2}(Y_n - Y_{n-1})\right]$$

$$= \frac{p}{2}\left[Y_n + Y_{n-1}\right]$$

Untuk interval $[x_o, x_n]$ adalah :

$$\int_{x_o}^{x_n} y\,dx = \int_{x_o}^{x_1} y\,dx + \int_{x_1}^{x_2} y\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} y\,dx$$

$$= \frac{p}{2}\left[Y_o + Y_1\right] + \frac{p}{2}\left[Y_2 + Y_1\right] + \ldots + \frac{p}{2}\left[Y_n + Y_{n-1}\right]$$

$$= \frac{p}{2}\left[Y_o + 2*(Y_1 + \ldots + Y_{n-1}) + Y_n\right]$$