BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. ALIRAN DALAM JARINGAN

Jaringan G dinotasikan dengan $G(V,E,c,f)$ merupakan suatu graph berarah dengan himpunan titik V, himpunan garis berarah E, dimana masing-masing garis dinotasikan $(x\,y) \in E$ mempunyai kapasitas garis $c(x\,y)$ dan nilai aliran $f(x\,y)$.

Kapasitas garis pada suatu jaringan $G(V,E,c,f)$ merupakan suatu fungsi c dari himpunan garis E ke bilangan riil non negatif, dan aliran pada jaringan $G(V,E,c,f)$ adalah suatu fungsi f dari E ke bilangan riil non negatif.

Pada penyajian jaringan $G(V,E,c,f)$, nilai fungsi c dan f secara berurutan akan dituliskan sebagai pasangan bilangan pada garis tersebut.

Definisi 2.1.

Suatu pola aliran $\{f(x\,y)\}$ dikatakan fisibel dalam $G(V,E,c,f)$ dan mempunyai nilai aliran f_{st} dari titik sumber s ke titik terminal t jika untuk setiap $x \in V$ terpenuhi :

$$\sum_y f(x,y) - \sum_y f(y,x) = f_{st} \qquad x = s \qquad (2.1)$$

$$= 0, \qquad x \neq s,t \qquad (2.2)$$

$$= -f_{st} \qquad x = t \qquad (2.3)$$

$$c(x,y) \geq f(x,y) \geq 0 \qquad (x,y) \in E \qquad (2.4)$$

Persamaan *(2.2)* di atas disebut *persamaan konservasi aliran.*

Titik-titik di antara s dan t disebut titik perantara.

Garis (x,y) pada jaringan $G(V,E,c,f)$ dikatakan mempunyai aliran jenuh jika :

$$f(x,y) = c(x,y) \tag{2.5}$$

dan dikatakan tidak mempunyai aliran jika :

$$f(x,y) = 0 \tag{2.6}$$

Definisi 2.2

Pada jaringan $G(V,E,c,f)$, jika X dan Y sebagai subset tidak kosong dari V, maka didefinisikan :

$$(X,Y) = \{(x,y) \in E \mid x \in X, y \in Y\} \tag{2.7}$$

Definisi 2.3

Nilai fungsi aliran f dan kapasitas c dari himpunan garis (X,Y) pada jaringan $G(V,E,c,f)$ didefinisikan:

$$f(X,Y) = \sum_{(x,y) \in (X,Y)} f(x,y) \tag{2.8}$$

$$c(X,Y) = \sum_{(x,y) \in (X,Y)} c(x,y) \tag{2.9}$$

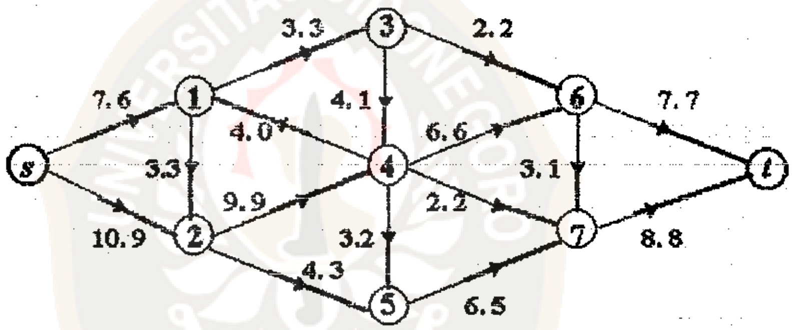
Contoh 2.1 :

Diberikan suatu jaringan berarah G(V,E,c,f) yang mempunyai aliran dan kapasitas seperti terlihat pada gambar 2.1.

Hitunglah $f(X,Y)$ dan $c(X,Y)$, jika :

a). $X = \{s,1,2,3\}$, $Y = \{4,5,6,7,t\}$

b). $X = \{4,5,6,7,t\}$, $Y = \{s,1,2,3\}$



Gambar 2.1. Jaringan berarah G(V,E,c,f) yang mempunyai aliran dan kapasitas.

Penyelesaian :

a. Jika $X = \{s,1,2,3\}$ dan $Y = \{4,5,6,7,t\}$

$(X,Y) = \{(2,4),(2,5),(3,4),(3,6)\}$ sehingga

$$f(X,Y) = f\,\{(2,4),(2,5),(3,4),(3,6)\}$$

$$= f(2,4) + f(2,5) + f(3,4) + f(3,6)$$

$$= 15$$

$$c(X,Y) = c\,\{(2,4),(2,5),(3,4),(3,6)\}$$

$$= c(2,4) + c(2,5) + c(3,4) + c(3,6)$$

$= \quad 9 + 4 + 4 + 2$

$= \quad 19$

b. Jika $X = \{4,5,6,7,t\}$ dan $Y = \{s,1,2,3\}$

$(X,Y) = \{\,(4,1)\}$

$f(X,Y) = f\{(4,1)\} = 0$

$c(X,Y) = 4$

2.2. POTONGAN-POTONGAN *S-T*

Definisi 2.4

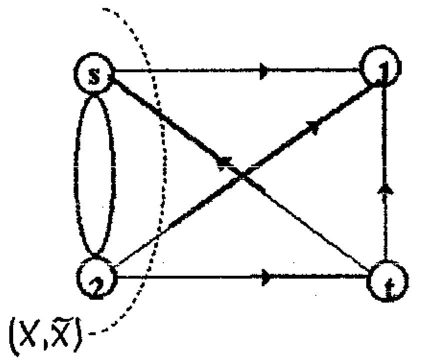
Potongan dari s ke t (s-t cut) pada jaringan G(V,E,c,f) adalah himpunan garis $(X, \overline{X})$ dengan $s \in X$ dan $t \in \overline{X}$ dimana $X \subseteq V$ dan $\overline{X} = V\text{-}X$.

Definisi 2.5

Himpunan potongan dari s ke t (s-t cutset) pada jaringan G(V,E,c,f) adalah minimal himpunan garis $(X, \overline{X})$ dengan $s \in X$ dan $t \in \overline{X}$ dimana $X \subseteq V$ dan $\overline{X} = V\text{-}X$, dan jika dihapus akan mematahkan semua path berarah dari s ke t.

Dari ***definisi 2.4*** dan ***definisi 2.5***, dapat dikatakan bahwa suatu s-t cut belum tentu merupakan suatu s-t cutset, tetapi setiap s-t cutset pasti merupakan s-t cut.

Diambil contoh pada suatu jaringan G*(V,E,c,f)* pada gambar berikut :



Gambar 2.2 Suatu graph berarah.

Untuk $X = \{s,2\}$ dan $\overline{X} = \{1, t\}$, maka $(X, \overline{X}) = \{(s,1),(2,1),(2,t)\}$ adalah *s-t* cut tetapi bukan *s-t* cutset, karena $\{(2,t)\}$ adalah subset sejati pada $(X, \overline{X})$ dan penghapusan $(2,t)$ juga akan mematahkan semua path berarah dari *s* ke *t*.

Kemudian diambil *Q* sebagai suatu *s-t* cutset pada jaringan G*(V,E,c,f)*, dan didefinisikan subset *X* pada *V* sebagai berikut:

1. $s \in X$

2. Jika $x \in X$ dan $(x,y) \in E\text{-}Q$, maka $y \in X$.

sehingga $t \in \overline{X} = V - X$.

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap garis $(x,y) \in (X, \overline{X})$, terdapat suatu garis $(x,y) \in (X, \overline{X})$ yang berada dalam *Q*.

Andai setiap garis(x,y) tidak berada dalam *Q*, maka dalam *E-Q* terdapat path berarah dari *s* ke *y* terbentuk oleh path berarah dari *s* ke x kemudian melalui (x,y).

Mengakibatkan $y \in X$, terjadi kontradiksi dengan pernyataan bahwa $y \in \overline{X}$. Sebaliknya, jika terdapat garis $(x,y) \in Q$ yang tidak berada dalam $(X, \overline{X})$, maka Q bukan *s-t* cutset.

Definisi 2.6

Kapasitas pada suatu *s-t* cut $(X, \overline{X})$ dalam jaringan $G(V,E,c,f)$ didefinisikan:

$$c(X, \overline{X}) = \sum_{(x,y) \in (X, \overline{X})} c(x,y) \qquad (2.10)$$

Minimum *s-t* cut (C_{min}) adalah suatu potongan *s-t* dengan kapasitas minimum dari semua *s-t* cut:

$$c(C_{min}) = \min_{i} \{c(X_i, \overline{X}_i)\} \qquad (2.11)$$

dimana $(X_i, \overline{X}_i)$ adalah suatu *s-t* cut pada G.

Definisi 2.7

Kapasitas suatu *s-t* cutset (Q) dalam G didefinisikan dengan :

$$c(Q) = \sum_{(x,y) \in Q} c(x,y) \qquad (2.12)$$

Minimum *s-t* cutset (Q_{min}) adalah suatu *s-t* cutset dengan kapasitas minimum dari semua *s-t* cutset:

$$c(Q_{min}) = \min_{k} \{c(Q_k)\} \qquad (2.13)$$

dimana Q_k adalah suatu *s-t* cutset pada G.

Karena semua fungsi kapasitas garis bernilai positif, maka persamaan *(2.11)* dan persamaan *(2.13)* bisa digabungkan menjadi:

$$c(C_{\min}) = \min_{i} \{c(X_i, \overline{X}_i)\} = \min_{k} \{c(Q_k)\} = c(Q_{\min}) \qquad (2.14)$$

Hal tersebut ditunjukkan sebagai berikut:

Akan ditunjukkan $c(C_{\min}) \leq c(Q_{\min})$:

Jelas, karena *s-t* cutset merupakan minimal himpunan garis yang jika dihapus akan mematahkan semua path berarah dari s ke t. Sehingga tidak ada subset sejati pada $Q_{\min}$ yang menjadi *s-t* cutset yang akan mempunyai kapasitas kurang dari $Q_{\min}$.

Maka diperoleh:

$$c(C_{\min}) \leq c(Q_{\min}) \qquad (2.15)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $c(C_{\min}) \geq c(Q_{\min})$:

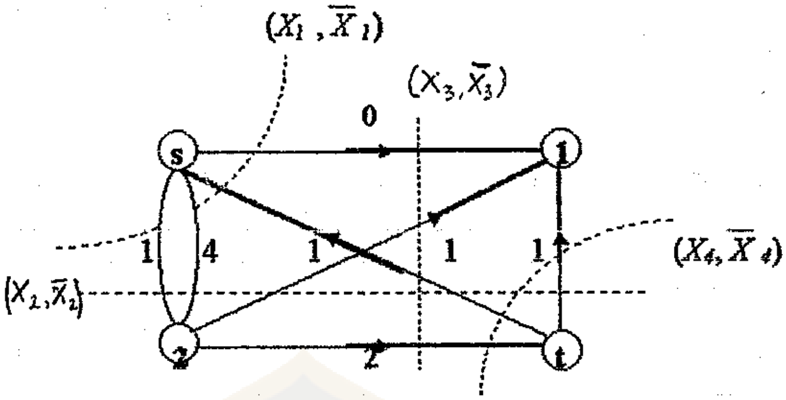
Dari definisi bahwa $C_{\min}$ adalah minimum *s-t* cut, dan kapasitas garis positif, maka tidak ada subset sejati dalam $C_{\min}$ yang menjadi *s-t* cut, yang akan mempunyai kapasitas kurang dari $C_{\min}$.

Maka diperoleh:

$$c(C_{\min}) \geq c(Q_{\min}) \qquad (2.16)$$

Dari pertidaksamaan *(2.15)* dan *(2.16)*, maka persamaan *(2.14)* terbukti.

Contoh 2.2:



Gambar 2.3 Suatu jaringan G(V,E,c,f) dengan empat *s-t cut*.

Jaringan pada gambar 2.3 tersebut mempunyai empat *s-t* cut sebagai berikut:

$$(X_1, \overline{X}_1) = (s,\{1,2,t\}) = \{(s,1),(s,2)\} \tag{2.17a}$$

$$(X_2, \overline{X}_2) = (\{s,1\},\{2,t\}) = \{(s,2)\} \tag{2.17b}$$

$$(X_3, \overline{X}_3) = (\{s,2\},\{1,t\}) = \{(2,t),(2,1),(s,1)\} \tag{2.17c}$$

$$(X_4, \overline{X}_4) = (\{s,1,2\},t) = \{(2,t)\} \tag{2.17d}$$

dengan nilai kapasitasnya adalah:

$$c(X_1, \overline{X}_1) = c(s,1) + (s,2) = 0 + 4 = 4 \tag{2.18a}$$

$$c(X_2, \overline{X}_2) = c(s,2) = 4 \tag{2.18b}$$

$$c(X_3, \overline{X}_3) = c(2,t) + c(2,1) + c(s,1) = 2 + 1 + 0 = 3 \tag{2.18c}$$

$$c(X_4, \overline{X}_4) = c(2,t) = 2 \tag{2.18d}$$

$$c(C_{min}) = \min_4 \{ c(X_4, \overline{X}_4) \} = 2$$

Selanjutnya terdapat dua *s-t* cutset $Q_1 = (X_2, \overline{X}_2)$ dan $Q_2 = (X_4, \overline{X}_4)$ dengan nilai kapasitasnya:

$$c(Q_2) = c(2,t) = 2 \tag{2.18e}$$

$$c(Q_1) = c(s,2) = 4 \tag{2.18f}$$

$$c(Q_{min}) = \min_2 \{c(Q_2)\} = 2$$

Menunjukkan bahwa $C_{min} = Q_{min} = 2$ dan persamaan *(2.14)* terpenuhi.

Teorema 2.1

Misal $(X, \overline{X})$ adalah *s-t* cut pada jaringan G*(V,E,c,f)*. Nilai aliran f_{st} dari *s* ke *t* adalah :

$$f_{st} = f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) \leq c(X, \overline{X}) \tag{2.19}$$

Bukti:

Sebelumnya dilihat pola aliran $\{f(x,y)\}$ memenuhi *(2.1)-(2.3)*. Jika $x \in X$, maka diperoleh:

$$f_{st} = \sum_{x \in X} [f(x,V) - f(V,x)] = f(X,V) - f(V,X) \qquad (2.20)$$

Karena $V = X \cup \overline{X}$, maka persamaan *(2.20)* menjadi:

$$f_{st} = f(X, X \cup \overline{X}) - f(X \cup \overline{X}, X)$$

$$= f(X,X) + f(X, \overline{X}) - f(X,X) - f(\overline{X}, X)$$

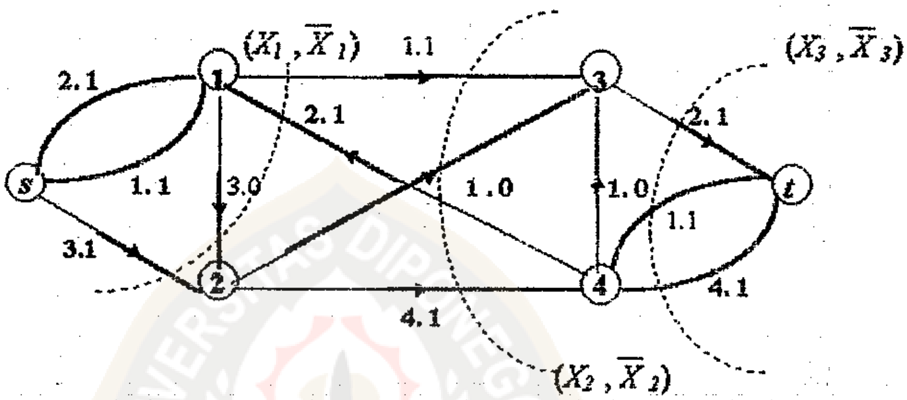
$$= f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) \qquad (2.21)$$

Dari $f(X, \overline{X}) \leq c(X, \overline{X})$ dan $f(\overline{X}, X) \geq 0$ maka $f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) \leq c(X, \overline{X})$.

Terbukti.

Contoh 2.3:

Diberikan jaringan $G(V,E,c,f)$ pada gambar berikut:



Gambar 2.4 Suatu jaringan $G(V,E,c,f)$ dengan tiga *s-t* cut.

Pada gambar 2.4 tersebut diambil tiga *s-t* cut dengan nilai alirannya masing-masing adalah:

$$f(X_1, \overline{X}_1) - f(\overline{X}_1, X_1) = f(1,3) + f(1,2) + f(s,2) - f(4,1)$$

$$= 1 + 0 + 1 - 1 = 1$$

$$c(X_1, \overline{X}_1) \quad = c(1,3) + c(1,2) + c(s,2) = 1 + 3 + 3 = 7 \qquad \textit{(2.22a)}$$

$$\textit{Jadi} \quad f(X_1, \overline{X}_1) - f(\overline{X}_1, X_1) \leq c(X_1, \overline{X}_1)$$

$$f(X_2, \overline{X}_2) - f(\overline{X}_2, X_2) = f(1,3) + f(2,3) + f(2,4) - f(4,1)$$

$$= 1 + 0 + 1 - 1 = 1$$

$$c(X_2, \overline{X}_2) = c(1,3) + c(2,3) + c(2,4) = 1 + 1 + 3 = 6 \qquad (2.22b)$$

$$Jadi\ \ f(X_2, \overline{X}_2) - f(\overline{X}_2, X_2) \leq c(X_2, \overline{X}_2)$$

$$f(X_3, \overline{X}_3) - f(\overline{X}_3, X_3) = f(3,t) + f(4,t) - f(t,4)$$

$$= 1 + 1 - 1 = 1$$

$$c(X_3, \overline{X}_3) = c(3,t) + c(4,t) = 2 + 4 = 6 \qquad (2.22c)$$

$$Jadi\ \ f(X_3, \overline{X}_3) - f(\overline{X}_3, X_3) \leq c(X_3, \overline{X}_3)$$

2.3. ALIRAN MAKSIMUM

Teorema 2.2 *(Teorema Max - Flow Min - Cut)*

Nilai aliran maksimum f_{maks} dari s ke t dalam jaringan G(V,E,c,f) adalah sama dengan nilai kapasitas minimum *s-t cut*nya, yaitu :

$$f_{maks} = \text{maks } \{f_{st}\} = \min_{i} \{c(X_i, \overline{X}_i)\} \qquad (2.23)$$

Dimana $(X_i, \overline{X}_i)$ adalah sembarang *s-t cut*, dan maks $\{f_{st}\}$ memenuhi pola aliran fisibel dalam G.

Bukti :

Misal $(X_i, \overline{X}_i)$ sembarang s- t cut. Dengan teorema 2.1, nilai f_{st} ditentukan dari kapasitas s-t cut :

$$f_{st} = f(X_i, \overline{X}_i) - f(\overline{X}_i, X_i) \leq c(X_i, \overline{X}_i) \qquad (2.24)$$

Sehingga nilai aliran maksimumnya (f_{maks}) ditentukan dari kapsitas minimum s-t *cut*, atau :

$$f_{maks} = \text{maks}\ \{f_{st}\} \leq \min_i \{c(X_i, \overline{X}_i)\} \qquad (2.25)$$

Dengan demikian untuk membuktikan teorema 2.2 ini, harus dipenuhi :

$$f(X, \overline{X}) = c(X, \overline{X}) \qquad (2.26a)$$

$$f(\overline{X}, X) = 0 \qquad (2.26b)$$

Untuk menunjukkan bahwa syarat pada persamaan *(2.26)* dipenuhi, diasumsikan f suatu aliran maksimum pada G*(V, E, c, f)*. Kemudian didefinisikan suatu subset X pada himpunan titik V sebagai berikut :

1. $s \in X$

2. Jika $x \in X$ dan $f(x,y) < c(x,y)$, maka $y \in X$.

3. Jika $x \in X$ dan $f(y,x) > 0$, maka $y \in X$.

sehingga $t \in \overline{X} = V - X$.

Andai $t \notin \overline{X}$, maka terdapat path diantara titik s dan t,

$$P_{st} = (s, v_2)(v_2, v_3)\ldots(v_{t-1}, t) \tag{2.27}$$

Sedemikian hingga semua garis maju (v_k, v_{k+1}) pada P_{st} tidak jenuh,

$$f(v_k, v_{k+1}) < c(v_k, v_{k+1}) \tag{2.28}$$

dan semua garis balik (v_{k+1}, v_k) pada P_{st} mempunyai aliran tidak kosong,

$$f(v_{k+1}, v_k) > 0 \tag{2.29}$$

Misal diambil suatu besaran :

$$w_1 = \min\{c(v_k, v_{k+1}) - f(v_k, v_{k+1})\} \tag{2.30}$$

Untuk semua garis maju (v_k, v_{k+1}) pada P_{st} dan :

$$w_2 = \min\{f(v_{k+1}, v_k)\} \tag{2.31}$$

Untuk semua garis balik (v_{k+1}, v_k) pada P_{st} dan ditentukan :

$$w = \min(w_1 - w_2) \tag{2.32}$$

Didefinisikan aliran baru f^* berdasarkan aliran awal f sebagai berikut:

$$f^*(v_k, v_{k+1}) = f(v_k, v_{k+1}) + w \tag{2.33a}$$

Untuk semua garis maju (v_k, v_{k+1}) pada P_{st}, dan

$$f^*(v_{k+1}, v_k) = f(v_{k+1}, v_k) - w \tag{2.33b}$$

Untuk semua garis balik (v_{k+1}, v_k) pada P_{st} .

Fungsi aliran baru f^* yang didefinisikan tersebut adalah pola aliran fisibel yang mempunyai nilai $f_{st} + w$ dimana f_{st} adalah nilai awal aliran f. Hal ini menunjukkan bahwa f bukan aliran maksimum, kontradiksi dengan asumsi bahwa f aliran maksimum. Sehingga t harus berada dalam $\overline{X}$ dan $(X, \overline{X})$ adalah suatu minimum *s-t cut*. Maka diperoleh :

$$f(x, y) = c(x, y) \qquad (2.34a)$$

Untuk $(x, y) \in (X, \overline{X})$, dan

$$f(y,x) = 0 \qquad (2.34b)$$

Untuk $(y,x) \in (\overline{X}, X)$.

sehingga dipenuhi :

$$f(X, \overline{X}) = c(X, \overline{X}) \qquad (2.35a)$$

$$f(\overline{X}, X) = 0 \qquad (2.35b)$$

Terbukti.

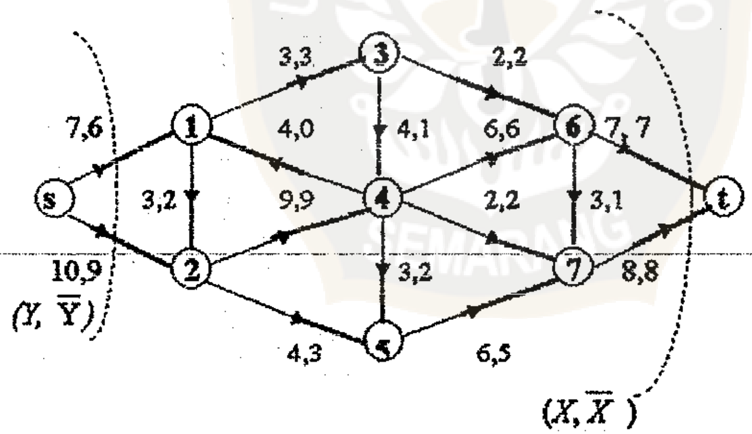
Definisi 2.8

Path diantara titik s dan t (P_{st}) dalam jaringan G(V,E,c,f) dikatakan sebagai path aliran tambahan untuk nilai f jika semua garis maju (x, y) pada P_{st} tidak jenuh, atau $f(x, y) < c(x, y)$ dan semua garis balik (y,x) mempunyai nilai aliran tidak kosong, atau $f(y,x) > 0$.

Dengan demikian aliran dalam jaringan G(V,E,c,f) dikatakan maksimum jika tidak ada path aliran tambahan yang akan menambah nilai aliran f dalam jaringan G(V,E,c,f).

Contoh 2.4:

Diberikan jaringan G(V,E,c,f) berarah seperti terlihat pada gambar 2.5. Berapakah aliran maksimumnya ?



Gambar 2.5 Potongan minimum pada jaringan G(V,E,c,f).

Penyelesaian :

Diambil himpunan potong minimum

$(X, \overline{X}) = (\{s,1,2,3,4,5,6,7\},\{t\}) = \{(6,t),(7,t)\}$ yang mempunyai kapasitas minimum

$c(X, \overline{X}) = c(6,t) + c(7,t) = 7 + 8 = 15$

$f(X, \overline{X}) = f(6,t) + f(7,t) = 7 + 8 = 15$

Sedangkan $(\overline{X}, X) = (\{t\}, \{s,1,2,3,4,5,6,7\})$

$c(\overline{X}, X) = 0$

$f(\overline{X}, X) = 0$

Sesuai dengan teorema 2.2, maka dapat disimpulkan bahwa aliran maksimum yang mengalir dari s ke t pada jaringan $G(V,E,c,f)$ pada gambar 2.5 adalah $c(X, \overline{X}) = f(X, \overline{X}) = 15$.

Atau $f_{maks} = c(X, \overline{X}) = 15$.

Terlihat bahwa semua garis dalam $(X, \overline{X})$ adalah jenuh karena $c(X, \overline{X}) = f(X, \overline{X})$ dan

$f(\overline{X}, X) = 0$