BAB II

KONSEP DASAR

2.1. Variabel Random dan Fungsi Densitas Probabilitas

2.1.a. Variabel Random

Definisi 2.1:

Pandang sebuah percobaan random dengan ruang sampel δ. Suatu fungsi W yang mengawankan setiap elemen $d \in \delta$ dengan satu dan hanya satu bilangan riil $W(d)=w$, disebut sebagai variabel random dengan ruang range $\Omega = \{w = W(d), d \in \delta\}$.

Jika ruang range Ω dari variabel random W memuat titik-titik yang banyaknya berhingga atau anggota Ω dapat dipasangkan dengan korespondensi 1-1 dengan integer positif, maka W merupakan suatu variabel random diskrit.

Jika ruang range Ω dari variabel random W berupa interval atau gabungan interval, maka W merupakan suatu variabel random kontinu.

(Hogg & Craig, 1995).

2.1.b. Fungsi Densitas Probabilitas

Definisi 2.2:

Suatu fungsi $f(w_h)$ dari sebuah variabel random diskrit W dengan ruang sampel δ dan ruang range Ω disebut sebagai fungsi densitas probabilitas jika hanya jika untuk beberapa himpunan terhitung $w_1, w_2, \ldots$

i. $f(w_h) > 0$, untuk $h=1,2,\ldots$ (2.1)

ii. $f(w_h) = 0$, untuk $w \notin \{w_1, w_2, \ldots\}$ (2.2)

iii. $\sum f(w_h) = 1$ (2.3)

Definisi 2.3:

Suatu fungsi $f(w)$ dari sebuah variabel random kontinu W dengan ruang sampel δ dan ruang range Ω disebut sebagai fungsi densitas probabilitas jika hanya jika :

i. $f(w) \geq 0, \forall w$ (2.4)

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(w)dw = 1$ (2.5)

(Dudewicz & Mishra, 1995).

2.2. Beberapa Sifat Distribusi

2.2.a. Nilai Harapan

Definisi 2.4:

Misalkan W merupakan variabel random, maka nilai harapan dari variabel random W dinotasikan dengan μ_W atau $E(W)$, yaitu:

$$E(W) = \sum w_k.f(w_k) \text{ , untuk W diskrit} \tag{2.6}$$

$$\text{atau } E(W) = \int_{-\infty}^{\infty} wf(w)dw \text{ , untuk } W \text{ kontinu} \tag{2.7}$$

2.2.b. Variansi

Variansi dari suatu variabel random W merupakan suatu ukuran yang menggambarkan penyebaran dari distribusi variabel random W.

Definisi 2.5:

Misalkan W merupakan variabel random dengan nilai harapan μ_W. Variansi dari W dinotasikan dengan σ_W^2 atau Var[W] dan didefinisikan dengan persamaan sebagai berikut:

$$\sigma_W^2 = \mathrm{Var}[W] = \sum_h (w_h - \mu_W)^2 \; f(w_h) \text{ , untuk } W \text{ diskrit} \tag{2.8}$$

$$\text{atau } \sigma_W^2 = \mathrm{Var}[W] = \int_{-\infty}^{\infty} (w - \mu_W)^2 f(w)dw \text{, untuk } W \text{ kontinu} \tag{2.9}$$

Definisi 2.6:

Jika W merupakan suatu variabel random, standar deviasi dari W dinotasikan dengan σ_W, dimana $\sigma_W = +\sqrt{\mathrm{Var}[W]}$ (2.10)

2.2.c. Kovarian

Definisi 2.7:

Misalkan W dan Y merupakan dua buah variabel random dengan ruang probabilitas sama. Kovarian dari W dan Y dinotasikan dengan Cov[W,Y] atau $\sigma_{W,Y}$ dan didefinisikan dengan persamaan sebagai berikut:

$$\mathrm{Cov}(W,Y) = E[(W - \mu_W)(Y - \mu_Y)] \tag{2.11}$$

2.2.d. Korelasi

Definisi 2.8:

Korelasi dari dua buah variabel random W dan Y dinotasikan dengan $\rho[W,Y]$ atau $\rho_{W,Y}$ dan didefinisikan dengan persamaan sebagai berikut:

$$\rho_{WY} = \frac{\mathrm{Cov}(W,Y)}{\sigma_W \sigma_Y} \tag{2.12}$$

(Mood, Graybill & Boes, 1913).

2.3. Proses Markov

Proses stokastik adalah suatu koleksi dari variabel random dengan parameter waktu yang dinyatakan dengan $\{W(j), j \in J\}$. Himpunan J disebut himpunan index dari proses. Suatu proses stokastik disebut proses stokastik parameter diskrit jika $J=\{0,1,2,..\}$ dan disebut proses stokastik parameter kontinu jika $J=\{j: \geq 0\}$.

Definisi 2.9:

Sebuah proses stokastik parameter diskrit $\{W(j), j=0,1,2,..\}$ atau proses stokastik parameter kontinu $\{W(j), j \geq 0\}$ disebut proses markov jika untuk sembarang himpunan m titik waktu $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$ merupakan himpunan berindex dan distribusi bersyarat dari $W(j_m)$ untuk nilai-nilai $W(j_1), W(j_2),..,$ $W(j_{m-1})$ yang diketahui hanya tergantung pada $W(j_{m-1})$ yaitu nilai yang paling akhir diketahui, sehingga untuk sembarang bilangan riil $w_1, w_2,..,w_m$ maka:

$$P[W(j_m) \leq w_m | W(j_1)=w_1,\ W(j_2)=w_2, \ldots, W(j_{m-1})=w_{m-1}]$$
$$= P[W(j_m) \leq w_m | W(j_{m-1})=w_{m-1}] \tag{2.13}$$

Suatu bilangan riil w dikatakan sebagai sebuah state (keadaan) dari proses stokastik $\{W(j), j \in J\}$, jika terdapat sebuah titik $j \in J$ sedemikian sehingga peluang $P[w-h<W(j)<w+h]$ berharga positif untuk setiap $h>0$. Himpunan dari state di dalam suatu proses stokastik disebut ruang state. Suatu ruang state disebut diskrit jika memuat state-state yang banyaknya berhingga, jika tidak maka disebut ruang state kontinu.

2.3.a. Rantai Markov Parameter Diskrit

Sebuah proses markov disebut sebagai sebuah rantai markov jika hanya terdapat state yang diskrit. Sebuah proses stokastik disebut rantai markov parameter diskrit jika setiap variabel random W_j diskrit dan untuk setiap himpunan m titik waktu $j_1<j_2<\ldots<j_m$ ($m>2$), maka distribusi bersyarat W_{j_m} untuk nilai-nilai $W_{j_1}, W_{j_2}, \ldots, W_{j_{m-1}}$ hanya tergantung pada $W_{j_{m-1}}$, sehingga untuk setiap bilangan riil $w_1, w_2, .., w_m$, maka:

$$P\left[W_{j_m} = w_{j_m} \middle| W_{j_1} = w_{j_1}, W_{j_2} = w_{j_2}, \ldots, W_{j_{m-1}} = w_{j_{m-1}}\right]$$

$$= P\left[W_{j_m} = w_{j_m} \middle| W_{j_{m-1}} = w_{j_{m-1}}\right] \qquad (2.14)$$

(Parzen, 1952).

2.4. Random Walk

Definisi 2.10:

Pandang barisan variabel random $W_0, W_1, W_2, ..., W_m$ yang mempunyai sebuah distribusi bersama, $\forall j=0,1,2,\ldots,m$

Barisan variabel random tak hingga $W_0, W_1, W_2, \ldots$ independen jika hanya jika $W_0, W_1, W_2, ..., W_m$ independen untuk setiap j. Sehingga $W_0, W_1, W_2, \ldots$ independen jika hanya jika:

$$P(W_0 \in I_0, W_1 \in I_1, W_2 \in I_2, ..., W_m \in I_m) = \prod_{j=0}^{m} P(W_j \in I_j),$$

untuk setiap variabel random W_j, $j \geq 0$ disebut terdistribusi identik bila semuanya memiliki fungsi distribusi yang sama.

Misalkan $W_0, W_1, W_2, \ldots$ merupakan variabel random yang berharga bulat, independen dan berdistribusi identik, sehingga barisan jumlah parsial $K_0, K_1, \ldots$ dapat dituliskan:

$$K_j = K_{j-1} + W_j,\ j \geq 1 \tag{2.15}$$

$$K_0 = W_0 \tag{2.16}$$

Jika W_j digambarkan sebagai lompatan ke j yang dilakukan oleh $\{K_j\}$, maka barisan K_j, $j \geq 0$ merupakan salah satu proses stokastik yaitu random walk.

(Srinivasan & Mehata, 1976).

2.5. Distribusi Normal

Definisi 2.11:

Suatu variabel random W berdistribusi normal jika fungsi densitas probabilitasnya:

$$f_W(w) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], -\infty < w < \infty \qquad (2.17)$$

dimana $\sigma>0$ dan $-\infty < \mu < \infty$.

Theorema 2.1:

Jika variabel random $W \sim N(\mu,\sigma^2)$, $\sigma^2>0$, maka variabel random $\frac{W-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

bukti:

Fungsi distribusi $G(w)$ dari $\frac{W-\mu}{\sigma}$ dengan $\sigma^2>0$,

$$G(w)=P\left[\frac{W-\mu}{\sigma} \le w\right] = P(W \le w\sigma + \mu) = \int_{-\infty}^{w\sigma+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dw$$

Jika $c=\frac{W-\mu}{\sigma}$, maka $G(w)=\int_{-\infty}^{w}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{c^2}{2}}dc$

Fungsi densitas probabilitas dari variabel random $\frac{W-\mu}{\sigma}$ adalah:

$$g_{\frac{W-\mu}{\sigma}}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{c^2}{2}}, -\infty < c < \infty$$

sehingga, $\frac{W-\mu}{\sigma}$ ~N(0,1)

Theorema 2.2:

Jika terdapat variabel random $W_1, W_2, \ldots, W_m$ berdistribusi normal dengan mean μ_j, varian σ_j^2, covar σ_{jr}(j≠r), maka $U=\sum_{j=1}^{m} a_j W_j$ berdistribusi normal dengan $E(U)=\sum_{j=1}^{m} a_j \mu_j$ dan $\text{Var}(U)=\sum_{j=1}^{m} a_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{m} a_j a_r \sigma_{jr}$ dengan $a_1, a_2, \ldots, a_m$ konstan.

bukti:

$$E(U)=E(\sum_{j=1}^{m} a_j W_j)=\sum_{j=1}^{m} a_j E(W_j)=\sum_{j=1}^{m} a_j \mu_j$$

$$\text{Var}(U)=E\left[[U-E(U)]^2\right]=E\left\{\left[\sum_{j=1}^{m} a_j W_j-\sum_{j=1}^{m} a_j \mu_j\right]^2\right\}=E\left\{\left[\sum_{j=1}^{m} a_j (W_j-\mu_j)\right]^2\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{m} a_j^2 E\left[(W_j-\mu_j)^2\right]+\sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{m} a_j a_r E\left[(W_j-\mu_j)(W_r-\mu_r)\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{m} a_j^2 \text{Var}(W_j)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{m} a_j a_r Cov(W_j, W_r)$$

$$=\sum_{j=1}^{m} a_j^2 \sigma_j^2+\sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{m} a_j a_r \sigma_{jr}$$

Theorema 2.3:

Jika $w_1, w_2, \ldots, w_m$ merupakan sampel random berdistribusi normal dengan mean μ dan varian σ^2, maka $\hat{\mu} = \overline{W}$ dan $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(w_j - \overline{W})^2$

bukti:

$W_j \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(w_j|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(w_j-\mu)^2\right)$$

$$f(\underset{\sim}{w}|\mu,\sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{m}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{m}(w_j-\mu)^2\right)$$

Fungsi likelihood: $L(\underset{\sim}{\theta}|\underset{\sim}{w}) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{m}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{m}(w_j-\mu)^2\right)$

log likelihood: $l = -\frac{m}{2}\log 2\pi - \frac{m}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{m}(w_j-\mu)^2$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2}.2\sum_{j=1}^{m}(w_j-\mu)(-1) = \frac{\sum_{j=1}^{m}(w_j-\mu)}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = -\frac{m}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{j=1}^{m}(w_j-\mu)^2$$

Persamaan likelihood:

$$\frac{\partial l}{\partial \hat{\mu}} = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{m}(w_j-\hat{\mu})}{\hat{\sigma}^2} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{m}(w_j - \hat{\mu}) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} w_j - m\hat{\mu} = 0 \text{, sehingga } \hat{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^{m} w_j}{m} = \overline{W}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \hat{\sigma}^2} = 0 \Rightarrow -\frac{m}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^4}\sum_{j=1}^{m}(w_j - \hat{\mu})^2 = 0$$

$$-m\hat{\sigma}^2 + \sum_{j=1}^{m}(w_j - \hat{\mu})^2 = 0$$

$$-m\hat{\sigma}^2 + \sum_{j=1}^{m}(w_j - \overline{W})^2 = 0 \text{, sehingga } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(w_j - \overline{W})^2$$

Definisi 2.12:

Suatu vektor random $W=(w_1,w_2,..,w_m)'$ berdistribusi normal multivariat $N(\mu,\Sigma)$ dengan fungsi densitas probabilitas sebagai berikut:

$$f_W(w) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(w-\mu)'\Sigma^{-1}(w-\mu)\right] \qquad (2.18)$$

dimana, $\mu = \begin{bmatrix}\mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n\end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix}\sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{1m} & \cdots & \sigma_{mm}\end{bmatrix}$

$\sigma_{jj}=\sigma_j^2=\mathrm{Var}(W_j)$, $\sigma_{jr}=Cov(W_j,W_r)$, $j=1,2,..,m$ untuk semua w bernilai riil.

Jika $W=(w_1,w_2,\ldots,w_m)$ independen, maka $\sigma_{jr}=0$, sehingga:

$$= \begin{bmatrix} E(W_1-\mu_1)^2 & E(W_1-\mu_1)(W_2-\mu_2) & \dots & E(W_1-\mu_1)(W_m-\mu_m) \\ E(W_2-\mu_2)(W_1-\mu_1) & E(W_2-\mu_2)^2 & \dots & E(W_2-\mu_2)(W_m-\mu_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(W_m-\mu_m)(W_1-\mu_1) & E(W_m-\mu_m)(W_2-\mu_2) & \dots & E(W_m-\mu_m)^2 \end{bmatrix}$$

sehingga, $\sum = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}$

Karena $\sigma_{jr}=\sigma_{rj}$, maka matrik varians-covarians dari variabel random $W_1, W_2, .., W_m$

adalah: $\sum = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{1m} & \sigma_{2m} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}$ (2.21)

(Kartiko, 1988).

2.7. Theorema Limit Pusat

Definisi 2.13:

Jika W variabel random, moment pusat ke-r dari W di a didefinisikan dengan $E[(W-a)^r]$, jika $a = \mu$ moment pusat dari W di μ dinotasikan dengan $\mu_r = E\left[(W-a)^r\right]$. Dengan catatan bahwa $\mu_1 = E[(W-\mu)]=0$ dan $\mu_2 = E[(W-\mu)^2] = \sigma^2$.

$$\sum = V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_m^2 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

(Dudewicz & Mishra, 1995).

2.6. Matrik Varians - Covarians

Variabel random $W_1, W_2, .., W_m$ dengan mean μ_1, $\mu_2, \dots$, μ_m, variansi $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots$, σ_m^2 dan covarian σ_{12}, $\sigma_{13}, \dots$, $\sigma_{(m-1)m}$, dimana: $\sigma_j^2 = E(W_j - \mu_j)^2$, $E(W_j) = \mu_j$ dan $\sigma_{jr} = E((W_j - \mu_j)(W_r - \mu_r))$, $j \neq r$

Mean dari variabel random $W_1, W_2, .., W_m$ tersebut, dapat dinyatakan dalam bentuk matrik, sebagai berikut:

$$\mu = E(W) = \begin{bmatrix} E(W_1) \\ \vdots \\ E(W_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

maka, $\sum = E(W - \mu)(W - \mu)' = E\left(\begin{bmatrix} W_1 - \mu_1 \\ \vdots \\ W_m - \mu_m \end{bmatrix} \left[W_1 - \mu_1, \dots, W_m - \mu_m \right] \right)$

$$= E\begin{bmatrix} (W_1 - \mu_1)^2 & (W_1 - \mu_1)(W_2 - \mu_2) & \dots & (W_1 - \mu_1)(W_m - \mu_m) \\ (W_2 - \mu_2)(W_1 - \mu_1) & (W_2 - \mu_2)^2 & \dots & (W_2 - \mu_2)(W_m - \mu_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (W_m - \mu_m)(W_1 - \mu_1) & (W_m - \mu_m)(W_2 - \mu_2) & \dots & (W_m - \mu_m)^2 \end{bmatrix}$$

Theorema 2.4 (Theorema Limit Pusat):

Misalkan f(.) merupakan fungsi densitas dengan mean μ dan varian terbatas σ^2. $\overline{W}_m$ adalah mean sampel dari sampel random berukuran m dari f(.).

Sehingga variabel random $Z_m = \dfrac{\overline{W}_m - E[\overline{W}_m]}{\sqrt{Var(\overline{W}_m)}} = \dfrac{\overline{W}_m - \mu}{\sigma/\sqrt{m}} \sim N(0,1)$ (2.22)

Bukti:

Diketahui fungsi pembangkit moment dari distribusi normal standar adalah $M_W(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$, maka akan ditunjukkan bahwa $M_{Z_m}(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$.

$$M_{Z_m}(t) = E\left[e^{tZ_m}\right] = E[\exp tZ_m] = E\left[\exp\left(t\frac{\overline{W}_m - \mu}{\sigma/\sqrt{m}}\right)\right]$$

$$= E\left[\exp\left(\frac{t}{m}\sum\frac{W_j - \mu}{\sigma/\sqrt{m}}\right)\right] = E\left[\prod_{j=1}^{m}\exp\frac{t}{m}\frac{W_j - \mu}{\sigma/\sqrt{m}}\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{m} E\left[\exp t\left(\frac{W_j - \mu}{\sigma/\sqrt{m}}\right)\right]$$

Jika $Y_j = W_j - \mu$ dan $M_Y(\frac{t}{\sigma\sqrt{m}})$ menotasikan $M_{Y_j}(\frac{t}{\sigma\sqrt{m}})$, maka

$$M_{Z_m}(t) = \prod_{j=1}^{m} E\left[\exp\left(\frac{tY_j}{\sigma\sqrt{m}}\right)\right] = \prod_{j=1}^{m} M_{Y_j}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{m}}\right) = \left[M_Y\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{m}}\right)\right]^m$$

dimana:

$$M_Y\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{m}}\right) = E\left[e^{\frac{Yt}{\sigma\sqrt{m}}}\right]$$

$$= E\left[1 + \frac{Yt}{\sigma\sqrt{m}} + \frac{Y^2}{2!}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{m}}\right)^2 + \frac{Y^3}{3!}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{m}}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= 1 + E[Y]\frac{t}{\sigma\sqrt{m}} + E[Y^2]\frac{t^2}{2!\sigma^2 m} + E[Y^3]\frac{t^3}{3!\sigma^3 m\sqrt{m}} + \ldots$$

$$= 1 + E[W-\mu]\frac{t}{\sigma\sqrt{m}} + E[(W-\mu)^2]\frac{t^2}{2!\sigma^2 m} + E[(W-\mu)^3]\frac{t^3}{3!\sigma^3 m\sqrt{m}} + \ldots$$

Menurut definisi 2.13, $\mu_r = E\left[(W-a)^r\right]$, maka:

$$M_Y\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{m}}\right) = 1 + \mu_1\frac{t}{\sigma\sqrt{m}} + \mu_2\frac{t^2}{2!\sigma^2 m} + \mu_3\frac{t^3}{3!\sigma^3 m\sqrt{m}} + \ldots$$

Karena $\mu_1 = 0$ dan $\mu_2 = \sigma^2$, maka:

$$M_Y\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{m}}\right) = 1 + \frac{t^2}{2m} + \mu_3\frac{t^3}{3!\sigma^3 m\sqrt{m}} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{m}\left(\frac{t^2}{2} + \mu_3\frac{t^3}{3!\sigma^3\sqrt{m}} + \ldots\right)$$

Jika $u = \frac{t^2}{2} + \mu_3\frac{t^3}{3!\sigma^3\sqrt{m}} + \ldots$, maka $\left[M_Y\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{m}}\right)\right]^m = \left[1 + \frac{u}{m}\right]^m$.

Karena $\lim_{m\to\sim}\left[1+\frac{u}{m}\right]^m = e^m = e^{\frac{1}{2}t^2}$, maka $\lim_{m\to\sim} M_{Z_m}(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$. Dapat disimpulkan bahwa fungsi pembangkit moment dari Z_m adalah $M_{Z_m}(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$, sehingga $Z_m \sim N(0,1)$

(Mood, Graybill & Boes, 1913).

2.8. Uji Normalitas Lilliefors

Misal terdapat sampel random berukuran m yaitu $n_1, n_2, \ldots, n_m$, yang berasal dari suatu populasi yang distribusinya tidak diketahui. Berdasarkan sampel tersebut akan diuji hipotesis sebagai berikut:

H_o: Sampel random berasal dari populasi berdistribusi normal

H_1: Sampel random berasal dari populasi yang tidak berdistribusi normal

Prosedur pengujian hipotesis adalah sebagai berikut:

1. Mengurutkan sampel random $n_1, n_2, \ldots, n_m$ dari nilai terkecil ke terbesar.
2. Menghitung besarnya bilangan baku $D_1, D_2, \ldots, D_m$ dengan menggunakan persamaan: $D_j = \frac{n_j - \overline{n}}{S}$

   dimana, $\overline{n} = \frac{\sum_{j=1}^{m} n_j}{m}$ dan $S = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m}(n_j - \overline{n})^2}{m-1}}$

3. Menghitung peluang $A^*(D_j) = P(d \le d_j)$ dengan tabel distribusi normal standart pada lampiran 3.
4. Menghitung proporsi $D_1, D_2, ..., D_m$ yang lebih kecil atau sama dengan D_j, yaitu dengan persamaan sebagai berikut:

$$S(D_j) = \frac{banyaknya\ D_1, D_2, ..., D_m \le D_j}{m}$$

5. Menentukan besarnya $|A^*(D_j) - S(D_j)|$
6. Menentukan besarnya statistik penguji, yaitu T= maksimum $|A^*(D_j) - S(D_j)|$
7. Membandingkan besarnya statistik penguji T dengan harga kuantil (1-α) yang diperoleh dari lampiran 6 dan hipotesis nol akan ditolak jika harga statistik penguji T lebih besar dari harga kuantil (1-α).

(Soejoeti, 1984).

2.9. Uji Kesamaan Varians (Homoskedastisitas)

Untuk menguji adanya kesamaan varians digunakan uji koefisien korelasi rank spearman.

Prosedur pengujiannya adalah sebagai berikut:

1. Penentuan hipotesis

   H_0: tidak ada heterokedastisitas

   H_1: ada heterokedastisitas

2. Membuat rank dari 2 karakteristik yang berbeda untuk observasi ke-j.
3. Menentukan besarnya koefisien korelasi rank spearman yang didefinisikan dengan persamaan sebagai berikut:

$$r_s = 1 - 6\left[\frac{\sum d_j^2}{m(m^2-1)}\right]$$

dimana, d_j : perbedaan dalam rank dari dua karakteristik yang berbeda untuk observasi ke-j

m: banyaknya observasi yang diberi rank

4. Menentukan kriteria pengujian, yaitu H_0 ditolak bila $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}, m-2}$

dengan $t = \frac{r_s\sqrt{m-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$ dan $t_{\frac{\alpha}{2}, m-2}$ diperoleh pada lampiran 5.

(Supranto, 1984).

2.10. Maksima dan Minima Fungsi q Variabel

2.10.a. Maksima dan Minima tanpa Pembatas

Suatu fungsi q variabel $f(u_1, u_2, \ldots, u_q)$ pada titik $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_q^*)$, sedemikian sehingga q turunan parsial nol.

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}\Big|_{u^*} = 0, \frac{\partial f}{\partial u_2}\Big|_{u^*} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_q}\Big|_{u^*} = 0$$

Determinan hessian Δq dari turunan parsial order ke-2:

$$\Delta_q = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_q} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_q \partial u_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_q \partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_q^2} \end{vmatrix}$$

Titik $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_q^*)$ adalah:

maksimum lokal, kalau $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3<0$,…dan minimum lokal kalau $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3>0$,…

2.10.b. Maksima dan Minima dengan Pembatas

2.10.b.1. Pengganda Lagrange

Suatu fungsi q variabel $f(u_1, u_2, \ldots, u_q)$ dengan pembatas $k(u_1, u_2, \ldots, u_q) = 0$ pada titik $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_q^*)$ yang memenuhi q+1 persamaan.

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} - \lambda \frac{\partial k}{\partial u_1} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial u_2} - \lambda \frac{\partial k}{\partial u_2} = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{\partial f}{\partial u_q} - \lambda \frac{\partial k}{\partial u_q} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} - \lambda \frac{\partial k}{\partial \lambda} = 0$$

untuk $u^* = (u_1{}^*, u_2{}^*, \ldots, u_q{}^*)$, $\lambda = \dfrac{f_{u_s}}{k_{u_s}}$, $s = 1, 2, \ldots, q$

Determinan hessian batas:

$$\Delta_{q+1} = \begin{vmatrix} 0 & k_{u_1} & k_{u_2} & \cdots & k_{u_q} \\ k_{u_1} & f_{u_1u_1} - \lambda k_{u_1u_1} & f_{u_1u_2} - \lambda k_{u_1u_2} & \cdots & f_{u_1u_q} - \lambda k_{u_1u_q} \\ k_{u_2} & f_{u_2u_1} - \lambda k_{u_2u_1} & f_{u_2u_2} - \lambda k_{u_2u_2} & \cdots & f_{u_2u_q} - \lambda k_{u_2u_q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{u_q} & f_{u_qu_1} - \lambda k_{u_qu_1} & f_{u_qu_2} - \lambda k_{u_qu_2} & \cdots & f_{u_qu_q} - \lambda k_{u_qu_q} \end{vmatrix}$$

titik $u^* = (u_1{}^*, u_2{}^*, \ldots, u_q{}^*)$ maksimum lokal dengan pembatas kalau $\Delta_3>0$, $\Delta_4<0$, $\Delta_5>0$,…dan minimum lokal dengan pembatas kalau $\Delta_3<0$, $\Delta_4<0$, $\Delta_5<0$,…

2.10.b.2. Kondisi Kuhn-Tucker

Perhatikan suatu fungsi q variabel $f(u_1, u_2, \ldots, u_q)$ dengan pembatas $k(u_1, u_2, \ldots, u_q) \le 0$. Titik $u^* = (u_1{}^*, u_2{}^*, \ldots, u_q{}^*)$ maksimum lokal dari $f(u_1, u_2, \ldots, u_q)$

dengan pembatas $k(u_1,u_2,\ldots,u_q)$ hanya kalau ada suatu λ tidak negatif, sedemikian sehingga λ dan $(u_1{*},u_2{*},\ldots,u_q{*})$ memenuhi kondisi Kuhn-Tucker sebagai berikut:

$$l_s = \frac{\partial f}{\partial u_s} - \lambda \frac{\partial k}{\partial u_s} = 0, s = 1,2,\ldots,q \tag{2.23}$$

$$\lambda k(u_1,u_2,\ldots,u_q) = 0 \tag{2.24}$$

$$k(u_1,u_2,\ldots,u_q) \leq 0 \tag{2.25}$$

Kondisi ini juga cukup kalau $f(u_1,u_2,\ldots,u_q)$ cekung dengan pembatas cekung. Oleh karena itu suatu titik maksimum $f(u_1,u_2,\ldots,u_q)$ merupakan titik minimum dari $-f(u_1,u_2,\ldots,u_q)$, hasil ini juga berlaku kalau suatu fungsi cembung diminimumkan dengan pembatas cembung.

Suatu fungsi akan cembung secara sempurna kalau tanda ≤ dapat diganti dengan tanda <, fungsi akan cekung kalau tanda ≤ dapat diganti dengan tanda ≥ dan cekung sempurna kalau tanda ≤ dapat diganti dengan >.

Jika λ>0, maka maksimum atau minimum ditentukan dengan pembatas ketidaksamaan. Jika λ≤0, maksimum atau minimum ditentukan tanpa memperhatikan pembatas.

Contoh 2.1:

Cari maksimum dari $f(u_1,u_2,u_3) = -u_1^2 - 2u_2^2 - u_3^2 + u_1u_2 + u_3$

dengan pembatas $u_1 + u_2 + u_3 \leq 35$

penyelesaian:

Dengan menganggap pembatas tak sama berlaku sebagai pembatas yang sama, maka diperoleh fungsi $f(u_1,u_2,u_3) = -u_1^2 - 2u_2^2 - u_3^2 + u_1u_2 + u_3$ dengan pembatas $u_1 + u_2 + u_3 = 35$.

Sehingga $F(u_1,u_2,u_3,\lambda) = -u_1^2 - 2u_2^2 - u_3^2 + u_1u_2 + u_3 - \lambda(u_1 + u_2 + u_3 - 35)$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = -2u_1 + u_2 - \lambda \qquad \frac{\partial F}{\partial u_2} = -4u_2 + u_1 - \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_3} = -2u_3 + 1 - \lambda \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(u_1 + u_2 + u_3 - 35)$$

Jika $\frac{\partial F}{\partial u_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial u_2} = 0, \frac{\partial F}{\partial u_3} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$, maka: $-2u_1 + u_2 = \lambda$

$$-4u_2 + u_1 = \lambda$$

$$-2u_3 + 1 = \lambda$$

Sehingga diperoleh u_1=15, u_2=9, u_3=11 dan λ=-21.

Karena λ<0, maka maksimum tanpa pembatas juga maksimum dengan pembatas tak sama.

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = -2u_1 + u_2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial {u_1}^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = -4u_2 + u_1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial {u_2}^2} = -4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_3} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_3} = -2u_3 + 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial {u_3}^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_3} = 0$$

Jika $\frac{\partial f}{\partial u_1}=0$, $\frac{\partial f}{\partial u_2}=0$, $\frac{\partial f}{\partial u_3}=0$, maka: $2u_1 - u_2 = 0$

$$u_1 - 4u_2 = 0$$

jadi u_1=u_2=0, u_3=$\frac{1}{2}$

$\Delta_1 = -2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -16 - (-2) = -14$$

Δ_1<0, Δ_2>0, Δ_3<0 maka titik (0,0, $\frac{1}{2}$) maksimum. Karena dengan pembatas ≤ ,

sehingga dengan kondisi Kuhn-Tucker,

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} - \lambda\frac{\partial k}{\partial u_1} = -2u_1 + u_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} - \lambda\frac{\partial k}{\partial u_2} = -4u_2 + u_1 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_3} - \lambda\frac{\partial k}{\partial u_3} = -2u_3 + 1 - \lambda = 0$$

$\lambda(u_1 + u_2 + u_3 - 35) = 0 \quad u_1 + u_2 + u_3 \le 35$

Salah satu $\lambda = 0$ atau $u_1 + u_2 + u_3 - 35 = 0$.

Jika $\lambda = 0$, maka $u_1 = u_2 = 0$ dan $u_3 = \frac{1}{2}$. Sehingga $u_1 + u_2 + u_3 \leq 35$ terpenuhi, dan $f(0,0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Jika $u_1 + u_2 + u_3 - 35 = 0$, maka dengan memecahkan tiga persamaan pertama,

$$-2u_1 + u_2 - \lambda = 0$$

$$u_1 - 4u_2 - \lambda = 0$$

$$2u_3 + \lambda = 1$$

diperoleh u_1=15, u_2=9, u_3=11, dan λ=-21. Sehingga diperoleh $f(15,9,11) = -362$, yang kurang dari $f(0,0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Jadi maksimum dari $f(u_1, u_2, u_3) = -u_1^2 - 2u_2^2 - u_3^2 + u_1 u_2 + u_3$ dengan pembatas $u_1 + u_2 + u_3 \leq 35$ adalah $u_1 = u_2 = 0, u_3 = \frac{1}{2}$

(Supranto, 1987).