BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1 Logika Proposisi

Definisi 2.1 (proposisi)

Kalimat logika proposisi dibentuk dari simbol-simbol yang disebut proposisi. Adapun simbol-simbol yang dimaksud adalah :

- simbol kebenaran ; **benar** dan **salah**.
- simbol-simbol proposisi menggunakan huruf besar tertentu ; P,Q,R,S,P_1,P_2,...

Definisi 2.2 (kalimat)

Kalimat logika proposisi dibentuk dari proposisi-proposisi dengan menggunakan penghubung proposisi. Adapun penghubung proposisi tersebut adalah : tidak($\sim$), dan($\wedge$), atau($\vee$), jika-maka($\Rightarrow$), bila dan hanya bila($\Leftrightarrow$), jika-maka-jika tidak-maka-. Kalimat logika proposisi dibentuk menurut aturan :

- Setiap proposisi adalah kalimat.
- Jika F kalimat maka negasi F, yaitu tidak(F) kalimat.
- Jika F dan G kalimat maka konjungsi *F dan G*, disjungsi *F atau G*, implikasi *jika F maka G* dengan F disebut anteseden dan G disebut konsekuen, ekuivalensi *F bila dan hanya bila G*, masing-masing merupakan kalimat.

- Jika F, G, dan H kalimat maka kondisional *jika F maka G, jika tidak F maka H* merupakan kalimat.

Definisi 2.3

Kalimat atau ekspresi E yang dibentuk dari kalimat-kalimat F, G, dan H (yang terdiri atas proposisi-proposisi) dengan menggunakan penghubung proposisi yang sesuai dengan (definisi 2.2), dapat dianggap sebagai kalimat kompleks. Proposisi-proposisi dan kalimat-kalimat pembentuk E disebut sub kalimat dari E. Dengan demikian E merupakan subkalimat dari E sendiri. Sub kalimat- sub kalimat selain E disebut sub kalimat sejati.

Contoh 2.1

Kalimat E: $((\sim(P \text{ atau } Q)) \Leftrightarrow ((\sim P) \wedge (\sim Q)))$, mempunyai delapan sub kalimat, yaitu P, Q, $\sim P$, $\sim Q$, $P \vee Q$, $\sim(P \vee Q)$, $(\sim p) \wedge (\sim q)$, E.

Definisi 2.4 (interpretasi)

Suatu interpretasi I memberikan nilai kebenaran benar atau salah pada setiap simbol proposisi. I merupakan interpretasi dari suatu kalimat F jika I memberi nilai kebenaran pada setiap simbol yang ada di F. I disebut interpretasi kosong untuk kalimat F jika I tidak memberi informasi lengkap sesuai proposisi pada F.

Contoh 2.2

I_1 : P salah, Q benar, R benar.

I_2 : P benar, Q benar, R salah.

I_3 : P benar, Q salah, R benar, S benar.

Pandang kalimat E : $P \Rightarrow (Q \vee R)$ dan F : $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (R \vee S)$.

Terlihat bahwa I_1,I_2,dan I_3 merupakan interpretasi untuk E, sedangkan interpretasi untuk F hanya I_3.

Definisi 2.5 (aturan semantik bahasa logika proposisi)

Jika I merupakan interpretasi untuk kalimat E maka nilai kebenaran E terhadap I ditentukan sesuai aturan-aturan sebagai berikut :

- Nilai kebenaran masing-masing proposisi di E sama dengan nilai kebenaran yang diberikan oleh I.
- Kalimat *benar*, berarti kalimat benar terhadap I.
- Kalimat *salah*, berarti kalimat *salah* terhadap I.
- Tidak F benar jika F salah, dan salah jika F benar.
- Konjungsi *F dan G* benar jika F benar, G benar.
- Disjungsi *F atau G* benar jika salah satu atau keduanya benar.
- Implikasi *jika F maka G* salah jika F benar, G salah.
- Ekuivalensi *F bila dan hanya bila G* benar jika nilai kebenaran F sama dengan G.
- Kondisional *jika F maka G jika tidak F maka H* memiliki nilai kebenaran sama dengan G jika F benar, dan sama dengan H jika F salah.

Aturan semantik untuk penghubung-penghubung proposisi dapat disimpulkan dalam tabel kebenaran.

Misalkan B : benar, dan S : salah.

F	tidak F
B	S
S	B

F	G	$F \wedge G$	$F \vee G$	$F \Rightarrow G$	$F \Leftrightarrow G$
B	B	B	B	B	B
B	S	S	B	S	S
S	B	S	B	B	S
S	S	S	S	B	B

F	G	H	jika F maka G jika tidak F maka H
B	B	B	B
B	B	S	B
B	S	B	S
B	S	S	S
S	B	B	B
S	B	S	S
S	S	B	B
S	S	S	S

Contoh 2.3

Misalkan kalimat F: $P \Rightarrow (Q \vee R)$ dan interpretasi I: P salah, Q benar, R benar untuk F. Untuk menentukan nilai kebenaran kalimat F, dapat digunakan aturan semantik bahasa logika proposisi. Karena Q benar, dan R benar, $Q \vee R$ benar dengan aturan *dan*. Karena P salah, kalimat F benar.

Definisi 2.6 (keabsahan)

Kalimat F disebut absah bila F bernilai benar terhadap setiap interpretasi untuk F.

Definisi 2.7 (skema kalimat kontraposisi)

- $(F \Rightarrow G) \Leftrightarrow ((\sim G) \Rightarrow (\sim F))$
- $((\sim F) \Rightarrow G) \Leftrightarrow ((\sim G) \Rightarrow F)$
- $(F \Leftrightarrow G) \Leftrightarrow ((\sim F) \Rightarrow (\sim G))$

Definisi 2.8 (perluasan interpretasi)

Bila I merupakan suatu interpretasi, p merupakan suatu simbol proposisi, dan t merupakan suatu nilai kebenaran, maka notasi $\langle p \leftarrow t \rangle \circ I$ menyatakan suatu interpretasi yang memberikan nilai kebenaran sesuai I, kecuali simbol proposisi p diberi nilai t. Apabila p juga termasuk didalam interpretasi I, maka nilai kebenaran untuk p tetap t.

Contoh 2.4

Misalkan kalimat F: $(P \vee Q) \Rightarrow R$, dengan interpretasinya I: P benar, Q benar, R salah. Nilai kebenaran F pada perluasan interpretasi $\langle R \leftarrow \text{benar} \rangle \circ I$ adalah benar, karena $(P \vee Q)$ benar, R benar.

Definisi 2.9 (kesepakatan antar interpretasi)

Dua interpretasi I dan J dikatakan bersepakat pada kalimat F bila nilai F terhadap I sama dengan nilai F terhadap J, Atau I dan J bukan interpretasi untuk F.

Contoh 2.5

Misalkan interpretasi I: P benar, Q salah. J: P salah, Q salah. I dan J bersepakat pada kalimat Q. I dan J juga bersepakat pada kalimat R. I dan J juga bersepakat pada kalimat $(P \wedge Q)$, karena kalimat ini bernilai salah untuk I dan J. Sebaliknya I dan J tidak bersepakat pada kalimat $(P \vee Q)$, karena kalimat benar terhadap I, tetapi bernilai salah terhadap J.

2.2 Logika Predikat

Definisi 2.10 (simbol)

Kalimat logika predikat dibentuk dari simbol-simbol :

- Simbol kebenaran : **benar**, **salah**.
- Simbol-simbol konstanta : $a,b,c,a',b',c',a_1,b_1,c_1,\ldots$
- Simbol variabel : $x,y,z,x',y',z',x_1,y_1,z_1,\ldots$
- Simbol fungsi : $f,g,h,f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,\ldots$
- Simbol predikat : $p,q,r,p_1,q_1,r_1,\ldots$

Setiap simbol fungsi atau simbol predikat mempunyai arity, yaitu banyaknya argumen yang terkandung didalamnya. Simbol fungsi atau simbol predikat dengan arity n disebut fungsi atau simbol predikat n-air. Simbol 1-air, 2-air, dan 3-air berturut-turut disebut unair, binair atau biner, dan ternair.

Definisi 2.11 (term)

Term dalam logika predikat merupakan ekspresi yang menyatakan objek. Term-term dibangun menurut aturan :

- Konstanta a,b,c,... adalah term.
- Variabel : x,y,z,... adalah term.
- Jika $t_1,t_2,\ldots,t_n$ adalah term-term, dimana $n \geq 1$ dan f

adalah simbol fungsi dengan arity n, maka $f(t_1,t_2,...,t_n)$ adalah suatu term.

- Jika F suatu kalimat dan s,t adalah term maka kalimat kondisional *jika F maka s jika tidak F maka t* adalah suatu term.

Definisi 2.12 (proposisi)

Proposisi dalam logika predikat adalah relasi antara objek-objek, yang dibangun menurut aturan :

- Simbol kebenaran : *benar* dan *salah* adalah proposisi.
- Jika $t_1,t_2,...,t_n$ adalah term-term, dimana $n \geq 1$ dan p adalah simbol predikat dengan arity n, maka $p(t_1,t_2,...,t_n)$ adalah suatu proposisi.

Definisi 2.13 (kalimat)

Kalimat dalam logika predikat dibentuk menurut aturan :

- Setiap proposisi merupakan sebuah kalimat.
- Jika F,G, dan H merupakan kalimat, maka ($\sim$F), (F$\wedge$G), (F$\vee$G), (F$\Rightarrow$G),(F$\Leftrightarrow$G),*jika F maka G jika tidak F maka H*, masing-masing merupakan kalimat.
- Jika x merupakan sebuah variabel dan F merupakan sebuah kalimat, maka (untuk semua x)F dan (untuk suatu x)F juga merupakan kalimat. (untuk semua x)F disebut universal quantifier, dan (untuk suatu x)F disebut eksistensial quantifier.

Definisi 2.14 (ekspresi)

Ekspresi dalam logika predikat adalah suatu term atau suatu kalimat.

Definisi 2.15 (subterm, subkalimat, subekspresi)

Setiap term dapat digunakan untuk membangun term t(termasuk t sendiri) atau kalimat F disebut subterm dari t atau F. Setiap kalimat dapat digunakan untuk membangun term t atau kalimat F(termasuk F sendiri) disebut subkalimat dari t atau F. Subterm dan subkalimat dari term t (termasuk t sendiri) disebut subekspresi dari term t, sedangkan subterm dan subkalimat dari kalimat F (termasuk F sendiri) disebut subekspresi dari kalimat F.

Contoh 2.6

Suatu term t: jika (untuk semua x)q(x,f(a)) maka f(a) jika tidak maka b,

memiliki sub term x, a, f(a), b, t sendiri, dan memiliki sub kalimat q(x,f(a)), (untuk semua x)q(x,f(a)).

Suatu kalimat F: (p(a,x,f(a,x))) $\wedge$ ((untuk semua y) q(g(b,x),y)), memiliki sub term a,b,x,y,f(a,x),g(b,x), dan memiliki sub kalimat p(a,x,f(a,x)),q(g(b,x),y), (untuk semua y)q(g(b,x),y)), dan F sendiri.

Definisi 2.16 (pemunculan variabel)

Pemunculan variabel x pada ekspresi E dikatakan pemunculan terikat bila x terdapat didalam skup quantifier dalam E. Jika pemunculan x diluar skup semua quantifier dalam E dikatakan pemunculan bebas. Variabel x disebut terikat di E jika dalam E paling sedikit terdapat satu pemunculan variabel x yang terikat. Bila dalam E paling sedikit terdapat pemunculan variabel x yang bebas, maka x disebut variabel bebas.

Contoh 2.7

Pandang suatu kalimat E: (untuk semua x)(p(x,y) dan (untuk suatu y)q(y,z). Variabel x terikat di E, sebab pemunculan x di E terikat oleh universal quantifier untuk x. Variabel y terikat di E, sebab pemunculan y di q(y,z) terikat oleh eksistensial quantifier. Variabel y juga merupakan variabel bebas di E, sebab y muncul bebas di p(x,y). Variabel z merupakan variabel bebas, sebab pemunculan bebas z di q(y,z).

Definisi 2.17 (simbol bebas)

Simbol-simbol bebas dari suatu ekspresi E adalah variabel-variabel bebas dari E dan semua konstanta, fungsi, dan simbol predikat dari E.

Contoh 2.8

Simbol-simbol bebas dari kalimat E: (untuk semua x)(p(x,y) dan (untuk suatu y)q(y,f(a,z))) adalah y, z, a, f, p, dan q.

Definisi 2.18 (interpretasi)

Misalkan D suatu himpunan dari objek-objek, sehingga D tidak kosong. Sebuah interpretasi I selalu dikaitkan dengan domain D, dan memberikan nilai untuk setiap himpunan konstanta, variabel, fungsi, dan predikat. Indeks I menyatakan nilai sesuai dengan interpretasi yang ada. Interpretasi I dikatakan suatu interpretasi untuk ekspresi E jika I memberikan nilai untuk simbol-simbol bebas di E.

Contoh 2.9

Suatu kalimat E:(p(x,f(x)) ⇒ (untuk suatu y)p(a,y)). Karena variabel y terikat, y tidak boleh diberi nilai untuk sebarang interpretasi I. Sesuai dengan definisi interpretasi, apabila D = {orang}, sedangkan I adalah :

a_I : Napoleon, x_I : George, f_I : ibu dari d,

$p_I(d_1,d_2)$: d_1 anak d_2,

Kalimat E berbunyi : Jika George anak dari ibunya, maka terdapat y sehingga Napoleon anak dari y.

Definisi 2.19 (perluasan interpretasi)

Misalkan I merupakan suatu interpretasi dengan domain D. Untuk variabel x dan elemen d dari domain D, perluasan interpretasi $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$ dari I adalah interpretasi dengan domain D, dimana :

- Variabel x diberi nilai elemen d.
- Variabel y selain x diberi nilai elemen y_I, yaitu

nilai dari I.

Contoh 2.10

Sesuai dengan interpretasi I untuk kalimat E pada (Contoh 2.8), dapat diberikan perluasan interpretasi $J:\langle f \leftarrow g \rangle \circ I$, dengan $g_J(d)$: sahabat dari d. Sehingga kalimat E berbunyi : Jika George anak sahabatnya, maka terdapat y sehingga Napoleon anak dari y.

Definisi 2.20

Jika I dengan domain D merupakan suatu interpretasi untuk kalimat (untuk semua x)F atau (untuk suatu x)F, maka perluasan interpretasi $J:\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$ disebut skup dari quantifier yang bersangkutan dengan domain D.

Definisi 2.21 (aturan semantik)

Jika I dengan domain D merupakan interpretasi untuk E, maka nilai kebenaran E untuk interpretasi I ditentukan dengan aturan semantik sebagai berikut :

- Nilai konstanta a adalah elemen a_I.
- Nilai variabel x adalah elemen x_I.
- Nilai $f(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ adalah elemen $f_I(d_1,d_2,\ldots,d_n)$, dengan fungsi f_I diberikan ke f, dan $d_1,d_2,\ldots,d_n$ adalah nilai dari term $t_1,t_2,\ldots,t_n$ terhadap I.
- Nilai term *Jika F maka s jika tidak F maka t* adalah nilai term *s* jika *F* benar, dan nilai term *t* jika *F* salah terhadap I.

- Simbol kebenaran **benar**, dan **salah**.
- Nilai proposisi $p(t_1,t_2,...,t_n)$ adalah nilai kebenaran $p_I(d_1,d_2,...,d_n)$, dengan p_I diberikan ke p, dan $d_1,d_2, ...,d_n$ adalah nilai dari term $t_1,t_2,...,t_n$ terhadap I.
- Aturan penghubung logika dilakukan antar term.
- Aturan universal quantifier *untuk semua* adalah :
  Misalkan I interpretasi untuk kalimat (untuk semua x)F. Kalimat tersebut benar jika untuk setiap $d \in D$, F bernilai benar terhadap perluasan $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$.
- Aturan eksistensial quantifier *untuk suatu* adalah :
  Misalkan I interpretasi untuk kalimat (untuk suatu x)F. Kalimat tersebut benar jika terdapat elemen $d \in D$, sehingga F bernilai benar terhadap perluasan $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$.

Definisi 2.22 (kesepakatan)

Dua interpretasi I dan J dikatakan bersepakat terhadap suatu simbol jika I dan J memberikan nilai kebenaran yang sama atau keduanya tidak memberikan nilai terhadap simbol tersebut. Demikian juga berlaku untuk ekspresi.

Contoh 2.11

Misalkan interpretasi I dengan domain bilangan bulat, dengan : a: 0, b: 2, x: -1, $f_I(d)=d+1$, dan interpretasi J dengan domain bilangan bulat, dengan a: 0, x: 1, $f_I(d)=d-1$. I dan J bersepakat pada konstanta a, karena nilai a adalah 0 terhadap masing-masing interpretasi. I dan J juga bersepakat pada simbol predikat p. I dan J tidak bersepakat pada variabel x, karena nilai x adalah -1 terhadap I, tetapi bernilai 1 terhadap J. I dan J bersepakat juga pada ekspresi f(x), dan f(y).

Definisi 2.23 (kalimat tertutup)

Kalimat tertutup adalah kalimat yang tidak mempunyai pemunculan bebas dari sebarang variabel.

Definisi 2.24 (keabsahan kalimat tertutup)

Kalimat tertutup F dikatakan absah bila kalimat tersebut benar terhadap semua interpretasi untuknya.

Definisi 2.25 (tutup)

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel-variabel bebas dengan urutan sesuai munculnya di kalimat F.

- Tutup universal dari F yang didefinisikan dengan (untuk semua *)F adalah :

  (untuk semua x_1)(untuk semua x_2)...(untuk semua x_n)F.
- Tutup eksistensial dari F yang didefinisikan dengan (untuk suatu *)F adalah :

  (untuk suatu x_1)(untuk suatu x_2)...(untuk suatu x_n)F.

Contoh 2.12

Variabel bebas dari kalimat F:(untuk suatu z)((q(y,z) atau r(x)) dan (untuk semua w)p(y,z,w)) dengan

urutan sesuai munculnya di F adalah y dan x. Sehingga tutup universal kalimat F, (untuk semua *)F adalah :
(untuk semua y)(untuk semua x)(untuk suatu z)((q(y,z) atau r(x)) dan (untuk semua w)p(y,z,w)). Demikian juga tutup eksistensial F, (untuk suatu *)F adalah :
(untuk suatu y)(untuk suatu x)(untuk suatu z)((q(y,z) atau r(x)) dan (untuk semua w)p(y,z,w)).

Proposisi 2.1 (aturan semantik tutup universal)

Misalkan I dengan domain D merupakan interpretasi untuk tutup universal (untuk semua *)F dari kalimat F. Sedangkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel-variabel bebas yang berlainan dan memiliki urutan sesuai dengan munculnya di F. Maka

1. Tutup universal (untuk semua *)F bernilai benar terhadap I

tepat bila

2. F bernilai benar terhadap perluasan interpretasi $\langle x_1 \leftarrow d_1 \rangle \circ \langle x_2 \leftarrow d_2 \rangle \circ \ldots \circ \langle x_n \leftarrow d_n \rangle \circ I$

tepat bila

3. F bernilai benar terhadap setiap interpretasi J yang bersepakat dengan I pada semua simbol bebas dari (untuk semua *)F.

Bukti

Ambil sebarang interpretasi I dengan domain D untuk tutup universal (untuk semua *)F.

(1) $\Leftrightarrow$ (2)

Kalimat tutup universal (untuk semua *)F bernilai benar terhadap I, tepat bila untuk setiap elemen $d_1 \in D$, maka anak kalimat (untuk semua x_2)(untuk semua x_3)...(untuk semua x_n)F bernilai benar terhadap perluasan interpretasi $\langle x_1 \leftarrow d_1\rangle \circ I$. Selanjutnya proses diulang sampai n-1 kali sehingga dipenuhi F bernilai benar terhadap perluasan interpretasi $\langle x_1 \leftarrow d_1\rangle \circ \langle x_2 \leftarrow d_2\rangle \circ \ldots \circ \langle x_n \leftarrow d_n\rangle \circ I$.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Misalkan J sebarang interpretasi dan $e_1, e_2, \ldots, e_n$ adalah nilai-nilai terhadap J dari variabel-variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dari F, maka F bernilai benar terhadap perluasan interpretasi $I' : \langle x_1 \leftarrow e_1\rangle \circ \langle x_2 \leftarrow e_2\rangle \circ \ldots \circ \langle x_n \leftarrow e_n\rangle \circ I$. Karena sudah diasumsikan bahwa J bersepakat dengan I pada simbol-simbol bebas dari (untuk semua *)F, sehingga J bersepakat dengan I' pada simbol-simbol bebas dari (untuk semua *)F. Karena $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sudah dipilih, J bersepakat dengan I' pada variabel-variabel bebas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dari F. Sehingga J bersepakat dengan I' pada simbol-simbol bebas dari F. F bernilai benar terhadap J.

(3) $\Rightarrow$ (2)

Ambil sebarang elemen $d_1, d_2, \ldots, d_n \in D$. Karena perluasan interpretasi $I' : \langle x_1 \leftarrow d_1\rangle \circ \langle x_2 \leftarrow d_2\rangle \circ \ldots \circ \langle x_n \leftarrow d_n\rangle \circ I$ bersepakat dengan I, maka F bernilai benar terhadap I'.

Proposisi 2.2 (keabsahan tutup universal)

Tutup universal (untuk semua *)F absah tepat bila F bernilai benar terhadap setiap interpretasi untuk F.

Bukti

(⇐) Anggap F benar terhadap setiap interpretasi, dan akan ditunjukkan (untuk semua *)F absah, yaitu benar terhadap setiap interpretasi. Ambil interpretasi I untuk kalimat (untuk semua *)F. Untuk menunjukkan (untuk semua *)F benar terhadap I, cukup dengan aturan semantik tutup universal, yaitu F bernilai benar terhadap interpretasi J yang bersepakat dengan I pada simbol-simbol bebas dari (untuk semua *)F.

(⇒) Anggap (untuk semua *)F absah, dan akan ditunjukkan bahwa F bernilai benar terhadap setiap interpretasi untuknya. Ambil interpretasi J untuk F, maka J juga merupakan interpretasi untuk (untuk semua *)F, dan J bersepakat dengan dirinya sendiri pada simbol-simbol bebas dari (untuk semua *)F. Karena (untuk semua *)F absah, yaitu bernilai benar terhadap J, sehingga menurut aturan semantik tutup universal, F bernilai benar terhadap J.

Definisi 2.26 (ekuivalensi)

Kalimat F dan G dikatakan ekuivalen bila nilai kebenaran F sama dengan G terhadap setiap interpretasi untuk F, dan G.

Proposisi 2.3 (penggantian nama untuk variabel terikat)

Misalkan (untuk ... x)G adalah kalimat, dengan (untuk ... x) quantifier, dapat merupakan (untuk semua x) atau (untuk suatu x). Misalkan x' adalah variabel yang tidak muncul dalam (untuk ... x)G, dan G' akibat penggantian setiap pemunculan bebas x dalam G dengan x'. Misalkan F suatu kalimat dan F' akibat dari penggantian satu atau lebih pemunculan (untuk ... x)G dengan (untuk ... x')G'. F ekuivalen dengan F'.

Bukti

Terlebih dahulu akan dibuktikan bahwa (untuk semua x)G ekuivalen dengan (untuk semua x')G'. Diberikan interpretasi sebarang I untuk kedua kalimat tersebut,

(untuk semua x)G benar terhadap I

tepat bila untuk setiap elemen domain d, G benar terhadap

$\langle x \leftarrow d\rangle \circ I$.

tepat bila untuk setiap elemen domain d, G benar terhadap

$\langle x \leftarrow d\rangle \circ \langle x' \leftarrow d\rangle \circ I$.

tepat bila untuk setiap elemen domain d, G' benar terhadap $\langle x \leftarrow d\rangle \circ \langle x' \leftarrow d\rangle \circ I$.

tepat bila untuk setiap elemen domain d, G' benar terhadap $\langle x' \leftarrow d\rangle \circ I$.

tepat bila (untuk semua x')G benar terhadap I.

Sehingga (untuk semua x)G ekuivalen dengan (untuk semua x')G'. Sehingga F ekuivalen dengan F'.

Definisi 2.27 (subekspresi terikat)

Misalkan ada subekspresi t dalam sebuah ekspresi E. Pemunculan t adalah terikat dalam E bila ada pemunculan variabel x bebas dalam pemunculan t, tetapi terikat dalam E.

Contoh 2.13

Misalkan ada subkalimat t: p(x) dari kalimat E: (untuk semua x)p(x). Pemunculan p(x) adalah terikat dalam E, karena p(x) mempunyai pemunculan bebas x yang terikat dalam E.

Definisi 2.28 (subekspresi bebas)

Misalkan ada subekspresi t dalam sebuah ekspresi E. Pemunculan t adalah bebas dalam E bila setiap pemunculan variabel bebas dalam pemunculan t dan bebas dalam E.

Contoh 2.14

Misalkan ada subkalimat t: q(y,z) dari kalimat E: q(y,z) dan (untuk semua y)q(u,y). Pemunculan q(y,z) adalah bebas dalam E, karena pemunculan bebas y dan z dalam q(y,z), dan juga bebas dalam E.

Contoh 2.15

Misalkan ada subterm t: f(y) dari kalimat E: (untuk suatu y)p(f(y)) atau q(f(y)). Pemunculan awal f(y) dalam p(f(y)) adalah terikat dalam E, karena pemunculan bebas y dalam pemunculan f(y) terikat dalam E, dengan quantifier (untuk suatu y). Pemunculan kedua dari term f(y) dalam q(f(y)) adalah bebas dalam E, karena pemunculan bebas variabel y dalam pemunculan f(y) juga bebas dalam E..

Definisi 2.29 (substitusi total)

Misalkan F, G, dan H masing-masing adalah ekspresi, dengan G dan H keduanya dapat berupa term atau kalimat.

F ◀ {G ← H} berarti :

- Setiap pemunculan bebas G dalam F diganti dengan H.
- Jika ada variabel bebas y dalam H, dengan quantifier (untuk ... y) dalam F, variabel y dalam quantifier diganti y' sebelum dilakukan pergantian. Variabel y' merupakan variabel yang tidak muncul di F,G, atau H.

Contoh 2.16

Akibat substitusi ((untuk semua x)[p(x) dan r(y)] dan (jika p(x) maka (untuk semua y)[p(x) dan r(y)])) ◀ {p(x)← q(y)}, adalah kalimat ((untuk semua x)[p(x) dan r(y)] dan (jika q(y) maka (untuk semua y')[q(y) dan r(y')])). Pemunculan pertama p(x) terikat, sehingga tidak diganti q(y). Sedangkan dua pemunculan p(x) bebas, sehingga harus diganti dengan q(y). Variabel y dari quantifier (untuk semua y) diganti dengan y', untuk menghindari kerancuan variabel y dalam q(y). Pemunculan pertama dari y dalam sub kalimat r(y) tidak diganti dengan y', karena variabel y tidak berada dalam skup quantifier (untuk semua y).

Proposisi 2.4 (nilai total)

Misalkan G, dan H masing-masing adalah term atau kalimat, dan F[G] adalah ekspresi. Interpretasi I diberikan untuk G dan F[G], dan interpretasi J diberikan untuk H dan F[H], dimana nilai G terhadap I sama dengan nilai H terhadap J, dan I bersepakat dengan J pada simbol bebas yang muncul dalam F[G], selain pemunculan G. Sehingga nilai F[G] terhadap I sama dengan nilai F[H] terhadap J.

Contoh 2.17

Misalkan I adalah interpretasi untuk F[x]: p(x), dan J interpretasi untuk F[a]: p(a), dimana nilai x terhadap I sama dengan nilai a terhadap J, dan I bersepakat dengan J pada p. Sehingga dapat dikatakan bahwa nilai p(x) terhadap I sama dengan nilai p(a) terhadap J.

Bukti (nilai total)

Misalkan nilai G terhadap interpretasi I sama dengan nilai H terhadap J, dan I bersepakat dengan J. Akan dibuktikan nilai F[G] terhadap I sama dengan nilai F[H] terhadap J. Untuk itu, akan ditunjukkan bahwa penurunan nilai F[G] terhadap I sama dengan penurunan nilai F[H] terhadap J. Karena pemunculan G bebas, sehingga pada penurunan nilai F[G] terhadap I, diturunkan nilai G terhadap perluasan interpretasi I': $\langle y_1 \leftarrow d_1 \rangle \circ \langle y_2 \leftarrow d_2 \rangle \circ \ldots \circ \langle y_n \leftarrow d_n \rangle \circ I$. Variabel $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adalah variabel dari quantifier (untuk...y_1)(untuk...y_2)...(untuk...y_n) yang memuat pemunculan bebas dari G dalam skup. Karena pemunculan G bebas, dan tidak ada $y_1, y_2, \ldots, y_n$ muncul bebas dalam G, sehingga nilai G terhadap I' sama dengan nilai G terhadap I.

Pada penurunan nilai F[H] terhadap J, diturunkan nilai H terhadap perluasan interpretasi J': $\langle y_1 \leftarrow d_1 \rangle \circ \langle y_2 \leftarrow d_2 \rangle \circ \ldots \circ \langle y_n \leftarrow d_n \rangle \circ I$. Karena pemunculan H bebas, dan tidak ada $y_1, y_2, \ldots, y_n$ muncul bebas dalam H, sehingga nilai H terhadap J' sama dengan nilai H terhadap J.

Karena nilai G terhadap interpretasi I sama dengan nilai H terhadap J, nilai F[G] terhadap I sama dengan nilai F[H] terhadap J.

Akibat 2.1 (nilai total)

Misalkan x adalah suatu variabel, F[x] adalah suatu ekspresi, dan t adalah suatu term. Interpretasi J diberikan untuk F[x] dan t, sedangkan nilai term t adalah d terhadap interpretasi J. Sehingga nilai F[x] terhadap I: $\langle x \leftarrow d \rangle \circ J$ sama dengan nilai F[t] terhadap J.

Bukti

Andaikan nilai x terhadap I: $\langle x \leftarrow d \rangle \circ J$ sama dengan nilai t terhadap J. I bersepakat dengan J pada simbol-simbol bebas yang muncul dalam F[x], selain variabel x, karena I dan J bersepakat pada semua simbol bebas selain x, dan semua pemunculan bebas x dalam F[x] diganti. Sehingga dengan proposisi nilai total, nilai F[x] terhadap I sama dengan nilai F[t] terhadap J.

Proposisi 2.5 (instantiasi quantifier)

Untuk variabel x, kalimat F[x], dan term t, tutup universal dari kalimat :

- Universal

  Jika (untuk semua x)F[x] maka F[t]
- Eksistensial

  Jika F[t] maka (untuk suatu x)F[x]

adalah absah.

Bukti (universal)

Kasus variabel x muncul bebas dalam F[x] :

Akan dibuktikan kalimat jika (untuk semua x)F[x] maka F[t] benar terhadap sebarang interpretasi I. Misalkan anteseden (untuk semua x)F[x] benar terhadap I, akan dibuktikan F[t] juga benar terhadap I. Karena x muncul bebas dalam F[x], pemunculan t juga bebas dalam F[t]. Sehingga I merupakan interpretasi untuk F[t], juga interpretasi untuk t. Misalkan d merupakan nilai t terhadap I.

Karena anteseden (untuk semua x)F[x] benar terhadap interpretasi I, untuk semua elemen domain d, F[x] bernilai benar terhadap $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$. Sehingga menurut (akibat nilai total), nilai F[x] terhadap $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$ sama dengan nilai F[t] terhadap I. Sehingga F[t] benar terhadap I.

Kasus variabel x tidak muncul bebas dalam F[x] :

Untuk kasus ini, quantifier (untuk semua x) muncul dalam kalimat (untuk semua x)F[x]. Sehingga (untuk semua x)F[x] ekuivalen dengan F[x]. Sehingga F[x] dapat dianggap sebagai F[t]. Menurut kebenaran kalimat *jika - maka* -, kalimat jika (untuk semua x)F[x] maka F[t] benar.

Dengan demikian bagian instantiasi universal quantifier absah.

Bukti (eksistensial)

Ambil sebarang kalimat F[x]. Sedangkan tutup universal kalimat: jika (untuk semua x)G[x] maka G[t], untuk kalimat sebarang G[x] adalah benar, menurut instantiasi universal. Dengan mengambil kalimat (tidak F[x]) sebagai G[x], sehingga (tidak F[t]) sebagai G[t], tutup universal dari kalimat menjadi : jika (untuk semua x)(tidak F[x]) maka (tidak F[t]) juga benar. Dengan menggunakan skema kontraposisi, diperoleh kalimat : jika F[t] maka tidak((untuk semua x)(tidak F[x])) bernilai benar. Konsekuen tidak((untuk semua x)(tidak F[x])) bernilai benar, tepat bila (untuk semua x)(tidak F[x]) bernilai salah, tepat bila ada elemen domain d $\in$ D sehingga tidak F[x] bernilai salah terhadap perluasan interpretasi $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$. Karena tidak F[x] bernilai salah, kalimat F[x] bernilai benar terhadap perluasan interpretasi $\langle x \leftarrow d \rangle \circ I$. Sesuai dengan aturan semantik untuk eksistensial quantifier, kalimat (untuk suatu x)F[x] bernilai benar. Dengan demikian bagian instantiasi eksistensial quantifier absah.

2.3 Teori Dengan Kesamaan Dalam Logika Predikat

Untuk membahas teori dengan kesamaan, terlebih dahulu akan diberikan beberapa pengertian dasar teori dalam logika predikat.

Adakalanya kalimat dalam logika predikat tidak absah, dimana kalimat itu tidak benar terhadap setiap interpretasi, tetapi benar terhadap suatu interpretasi. Sebagai contoh diambil suatu kalimat "Untuk semua integer x, x+0=x", atau dalam logika predikat (untuk semua x) p(f(x,a),x) adalah bernilai salah. Akan tetapi kalimat tersebut salalu benar terhadap interpretasi dengan domain integer, dimana a: 0, f sebagai fungsi penambahan, dan p sebagai relasi kesamaan. Dengan demikian akan diberikan notasi dari "teori" dalam logika predikat untuk menjelaskan kalimat dan interpretasinya agar kalimat selalu benar.

Definisi 2.30 (teori)

Suatu teori terdiri dari bahasa dan himpunan kalimat (yang disebut aksioma). Bahasa teori adalah bahasa logika predikat yang batasannya adalah konstanta, fungsi, simbol predikat dengan vocabulary khusus, yaitu sub himpunan simbol-simbol dalam logika predikat.

Definisi 2.31 (vocabulary)

Vocabulary teori adalah :

- Sub himpunan konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dari logika predikat.
- Sub himpunan fungsi $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dari logika predikat.
- Sub himpunan simbol predikat $p_1, p_2, \ldots, p_n$ dari logika predikat.

Definisi 2.32

Term, kalimat, dan ekspresi dari teori adalah term, kalimat, dan ekspresi logika predikat, yaitu konstanta, fungsi, dan simbol predikat yang merupakan vocabulary teori.

Definisi 2.33 (aksioma)

Aksioma-aksioma teori adalah himpunan kalimat tertutup A_1, A_2, A_3,... dari teori. Teori didefinisikan dengan aksioma-aksiomanya.

Definisi 2.34 (model)

Interpretasi I disebut model untuk suatu teori bila setiap aksioma A_i dari teori itu bernilai benar terhadap I.

Contoh 2.18

Ambil interpretasi I tentang keluarga dengan domain himpunan orang, dan f(x) adalah ayah dari x ;g(x) adalah ibu dari x

p(x,y) berarti y orang tua dari x

q(x,y) berarti y kakek dari x

r(x,y) berarti y nenek dari x

Vocabulary teori ini terdiri dari simbol fungsi f dan g, simbol predikat p,q,r, tanpa ada simbol konstanta. Aksioma-aksioma dari teori ini adalah himpunan kalimat tertutup :

$\mathbb{F}_1$: (untuk semua x)p(x,f(x)) (ayah)

(Ayah dari setiap orang adalah orang tuanya.)

$\mathbb{F}_2$: (untuk semua x)p(x,g(x)) (ibu)

(Ibu dari setiap orang adalah orang tuanya.)

$\mathbb{F}_3$: (untuk semua x) (kakek)

$$\text{(untuk semua y)} \begin{bmatrix} \text{jika } p(x,y) \\ \text{maka } q(x,f(y)) \end{bmatrix}$$

(Ayah dari orang tuanya adalah kakeknya.)

$\mathbb{F}_4$: (untuk semua x) (nenek)

$$\text{(untuk semua y)} \begin{bmatrix} \text{jika } p(x,y) \\ \text{maka } r(x,g(y)) \end{bmatrix}$$

(Ibu dari orang tuanya adalah neneknya.)

Interpretasi "keluarga" tersebut merupakan suatu model untuk teori keluarga yang didefinisikan dengan $\mathbb{F}_1,\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_3,\mathbb{F}_4$ di atas karena setiap aksioma bernilai benar terhadap interpretasi keluarga.

Definisi 2.35 (ketermuatan)

Bila vocabulary teori A adalah sub himpunan dari vocabulary teori B, dan setiap kalimat absah dari teori A merupakan kalimat absah dari teori B, dikatakan teori A termuat dalam teori B.

Teori dengan kesamaan merupakan suatu teori dalam logika predikat. Sehingga teori dengan kesamaan memiliki vocabulary, dan himpunan aksioma.

Definisi 2.36 (teori dengan kesamaan)

Vocabulary teori dengan kesamaan terdiri dari simbol predikat biner p, dan simbol konstanta, fungsi, predikat lainnya. Simbol predikat biner p menunjukkan relasi kesamaan dalam suatu domain, yaitu kalimat $p(t_1,t_2)$ benar terhadap model I tepat bila nilai term t_1 sama dengan nilai term t_2 terhadap I. Relasi kesamaan p(x,y) ditulis sebagai x = y.

Teori dengan kesamaan juga memiliki himpunan aksioma. Adapun himpunan aksioma itu adalah :

- Aksioma dasar

E_1: (untuk semua x) (untuk semua y) (untuk semua z) $\begin{bmatrix}\text{jika } x = y \text{ dan } y = z\\ \text{maka } \quad x = z\end{bmatrix}$

(transitivitas)

E_2: (untuk semua x) (untuk semua y) $\begin{bmatrix}\text{jika } x = y\\ \text{maka } y = x\end{bmatrix}$

(simetri)

E_3: (untuk semua x) $[x = x]$

(refleksi)

- Skema aksioma substitusi

Untuk simbol fungsi f dengan k arity, dan i berjalan dari 1 sampai k,

E4:

$$(\text{untuk semua } z_1) \dots (\text{untuk semua } x)(\text{untuk semua } z_{i-1})(\text{untuk semua } y)(\text{untuk semua } z_{i+1}) \dots (\text{untuk semua } z_k) \begin{bmatrix} \text{jika} & x = y \\ \text{maka} & f(z_1,\dots,z_{i-1},x, z_{i+1},\dots,z_k) = f(z_1,\dots,z_{i-1},y, z_{i+1},\dots,z_k) \end{bmatrix}$$

(substitusi fungsional untuk f)

Untuk simbol predikat q dengan k arity, dan i berjalan dari 1 sampai k,

E5:

$$(\text{untuk semua } z_1) \dots (\text{untuk semua } x)(\text{untuk semua } z_{i-1})(\text{untuk semua } y)(\text{untuk semua } z_{i+1}) \dots (\text{untuk semua } z_k) \begin{bmatrix} \text{jika} & x = y \\ \text{maka} & q(z_1,\dots,z_{i-1},x, z_{i+1},\dots,z_k) \Leftrightarrow q(z_1,\dots,z_{i-1},y, z_{i+1},\dots,z_k) \end{bmatrix}$$

(substitusi predikat untuk q)

Contoh 2.19

Skema aksioma substitusi fungsional untuk fungsi biner g adalah :

$$(\text{untuk semua } x)(\text{untuk semua } y)(\text{untuk semua } z_2) \begin{bmatrix} \text{jika} & x = y \\ \text{maka} & g(x,z_2) = g(y,z_2) \end{bmatrix}$$

dan

$$(\text{untuk semua } x)(\text{untuk semua } y)(\text{untuk semua } z_1) \begin{bmatrix} \text{jika} & x = y \\ \text{maka} & g(z_1,x) = g(z_1,y) \end{bmatrix}$$

Skema aksioma substitusi predikat unair untuk fungsi p adalah :

$$(\text{untuk semua } x)(\text{untuk semua } y) \begin{bmatrix} \text{jika} & x = y \\ \text{maka} & p(x) \text{ bila dan hanya bila } p(y) \end{bmatrix}$$

Definisi 2.37 (notasi kerelatipan quantifier)

Untuk simbol predikat unair p dan kalimat F[x], kalimat (untuk semua p x)F[x] dapat ditulis (untuk semua x)$\begin{bmatrix}\text{jika } p(x)\\ \text{maka } F[x]\end{bmatrix}$. Kalimat (untuk suatu p x)F[x] dapat ditulis (untuk suatu x)$\left[p(x) \text{ dan } F[x]\right]$.