# BAB III

# BUJUR SANGKAR LATIN

Rancangan kombinatorik adalah penyusunan terhadap objek-objek berbeda yang memenuhi beberapa kriteria. Rancangan kombinatorik merupakan bagian yang sangat penting dan luas penggunaannya dalam teori kombinatorik. Salah satu contoh adalah Bujur Sangkar Latin ( **BSL** ).

## 3.1. Pengertian Umum

Bujur Sangkar Latin didefinisikan sebagai matriks bujur sangkar berordo $n \times n$, dimana ke $n^2$ selnya ditempati oleh simbol-simbol berbeda sedemikian sehingga setiap simbol tepat muncul sekali di setiap baris dan di setiap kolom.

**Contoh 3.1.1.**

Matriks di bawah ini merupakan **BSL** berordo 6 x 6 dengan elemen-elemen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Terlihat bahwa, setiap baris dan setiap kolom terdiri dari elemen-elemen yang berbeda ( tidak ada dua elemen muncul pada baris maupun kolom yang sama ).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Persegi Panjang Latin ( **PPL** ) adalah matriks berordo $p$ x $q$ atau $p$ x $n$ dimana $p, q < n$ dengan simbol-simbol berbeda tanpa adanya pengulangan simbol di setiap baris maupun di setiap kolom. Apabila $p = q = n$, maka **PPL** disebut Bujur Sangkar Latin.

**Contoh 3.1.2.**

Sebuah matriks berordo 2 x 6 dengan elemen-elemen 1, 2, 3, 4, 5, 6 di bawah ini disebut **PPL** sebab, setiap baris dan setiap kolom hanya memuat elemen-elemen yang berbeda yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Pada bab ini akan dibahas, bagaimana membentuk **PPL** berordo $p$ x $q$ maupun $p$ x $n$ dimana $p, q < n$ menjadi **BSL** berordo $n$ x $n$.

**3.2. Teorema Marriage**

Sebelum dibahas bagaimana membentuk suatu Persegi Panjang Latin menjadi Bujur Sangkar Latin terlebih dahulu dijelaskan mengenai teorema marriage, digunakan untuk pemilihan sebarang elemen-elemen sehingga elemen-elemen tersebut tepat mempunyai satu pasangan yang berbeda.

**Contoh 3.2.1.**

Misalkan diketahui grup dari 7 pria dan 6 wanita yang telah cukup umur untuk menikah, dimana :

Wanita 1 kenal dengan pria-pria $1^1$, $2^1$, dan $3^1$,

Wanita 2 kenal dengan pria-pria $2^1$, dan $3^1$, Wanita 3 kenal dengan pria-pria $3^1$, $5^1$, dan $7^1$,

Wanita 4 kenal dengan pria-pria $1^1$, dan $2^1$,

Wanita 5 kenal dengan pria-pria $1^1$, $2^1$, dan $3^1$,

Wanita 6 kenal dengan pria-pria $4^1$, $5^1$, dan $6^1$.

Pada contoh 3.2.1, tidak mungkin mendapatkan seorang suami untuk setiap sebarang wanita. Misalkan, pilih sebarang 4 wanita yaitu 1, 2, 4, dan 5 yang hanya kenal dengan 3 pria yaitu $1^1$, $2^1$, dan $3^1$; jadi jelas bahwa, keempat wanita tersebut tidak semuanya mendapatkan seorang suami.

Jelas bahwa, untuk mendapatkan seorang suami dari setiap wanita harus memenuhi yaitu sebarang subhimpunan dari wanita-wanita yang terdiri dari $r$ elemen harus kenal paling sedikit $r$ pria.

**Contoh 3.2.2.**

Misalkan diketahui grup dari 7 pria dan 6 wanita yang telah cukup umur untuk menikah, dimana :

Wanita 1 kenal dengan pria-pria $1^1$, dan $3^1$,

Wanita 2 kenal dengan pria-pria $2^1$, dan $3^1$,

Wanita 3 kenal dengan pria-pria $1^1$, $3^1$, $4^1$, dan $5^1$,

Wanita 4 kenal dengan pria-pria $2^1$, $4^1$, $6^1$, dan $7^1$,

Wanita 5 kenal dengan pria-pria $1^1$, dan $5^1$,

Wanita 6 kenal dengan pria-pria $1^1$, dan $2^1$.

Pada contoh 3.2.2, setiap sebarang himpunan wanita kenal dengan paling sedikit sama atau lebih banyak pria. Pilih sebarang himpunan wanita { 1, 2, 6 } kenal dengan pria-pria $\{1^1, 2^1, 3^1\}$, jadi sebarang wanita dapat menikah dengan seorang pria.

**Teorema 3.2.1. ( Teorema Hall – Bentuk Marriage )**

Himpunan semua wanita dapat menikah dengan seorang pria untuk setiap pria yang mereka kenal jika hanya jika sebarang subhimpunan dari wanita-wanita dengan banyak elemen $r$ kenal dengan paling sedikit $r$ pria.

**Bukti :**

( $\Rightarrow$ ) Jika semua wanita-wanita tersebut dapat menemukan suami-suaminya, maka jelas bahwa sebarang $r$ wanita harus kenal dengan paling sedikit $r$ pria ( suami ).

( $\Leftarrow$ ) Misalkan wanita-wanita itu adalah 1, 2, .., $n$ dan misalkan pula bahwa sebarang subhimpunan dari $r$ wanita-wanita tersebut kenal paling sedikit $r$ pria. Dengan mempergunakan induksi terhadap $m$ ( $1 \leq m \leq n$ ), akan dibuktikan bahwa semua wanita-wanita 1, 2, .., $m$ dapat menemukan suami-suami dari pria yang mereka kenal.

Kasus $m = 1$, jika satu wanita kenal paling sedikitnya dengan seorang pria, akibatnya wanita itu dapat memilih pria tersebut sebagai suaminya.

Kasus $m = n$, apabila wanita-wanita 1, 2, .., $m$ kenal paling sedikitnya dengan pria-pria ( misalkan $1^1$, $2^1$, …., $m^1$ ) akibatnya wanita-wanita itu dapat memilih pria-pria tersebut sebagai suaminya.

Kasus $m = n + 1$, andaikan dapat ditemukan tunangan untuk wanita-wanita 1, 2, .., $m$ dan $m + 1$. Maka ke- $m + 1$ wanita tersebut harus kenal dengan paling sedikitnya $m + 1$ pria. Tetapi apabila hanya terdapat wanita-wanita wanita 1, 2, .., $m$ yang hanya kenal dengan $m$ pria, maka ke-$m$ wanita itu dapat menemukan calon suaminya. Akibatnya wanita $m + 1$ harus dapat menemukan pria $m + 1$ yang belum bertunangan. Ilustrasi sederhana di bawah ini, digunakan untuk membuktikan agar wanita $m + 1$ dapat menemukan tunangannya. Misalkan wanita $m + 1$, mengadakan suatu acara yang mengundang pria-pria $1^1, 2^1, \ldots, m^1$, dan $m^1 + 1$. Wanita $m + 1$ bertemu dengan beberapa teman-teman pria yang ia kenal ( sudah mempunyai tunangan ) yaitu $1^1, 2^1, \ldots, m^1$, kemudian teman prianya tersebut mengenalkan calon tunangannya kepada wanita $m + 1$, kemudian oleh calon tunangannya yaitu $1, 2, \ldots, m$, wanita $m + 1$ dikenalkan kepada teman-teman pria yang mereka kenal. Selanjutnya proses diulang sampai akhirnya dapat ditemukan beberapa pria yang belum bertunangan sebagai calon suami untuk wanita $m + 1$. Akibatnya wanita-wanita $1, 2, \ldots, m, m + 1$ dapat menemukan pria-pria $1^1, 2^1, \ldots, m^1$, dan $m^1 + 1$ sebagai tunangannya. Jadi bukti selesai.

Misalkan keluarga himpunan $\mathcal{A} = ( A_1, A_2, .., A_n )$ dan andaikan bahwa himpunan-himpunan tersebut selalu finite. Tranversal atau himpunan Representatif Berbeda ( *System of Distinct Representatif* / **SDR** ) dari $\mathcal{A}$ adalah sebuah himpunan **X** dengan $|\mathbf{X}| = n$ yang mempunyai susunan elemen-elemen $\mathbf{X} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ dimana $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$ dengan elemen-elemen **X** harus berbeda.

**Contoh 3.2.3.**

Misalkan keluarga himpunan $\mathcal{A} = ( A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 )$ dengan ;

$A_1 = \{ 1, 3 \}$,

$A_2 = \{ \mathbf{2}, 3 \}$,

$A_3 = \{ 1, 3, \mathbf{4}, 5 \}$,

$A_4 = \{ 2, 4, 6, \mathbf{7} \}$,

$A_5 = \{ 1, \mathbf{5} \}$,

$A_6 = \{ \mathbf{1}, 2 \}$.

Maka keluarga himpunan $\mathcal{A}$ mempunyai tranversal atau **SDR** yaitu **X** = { 3, 2, 4, 7, 5, 1 }; dimana $3 \in A_1$, $2 \in A_2$, $4 \in A_3$, $7 \in A_4$, $5 \in A_5$, $1 \in A_6$ seperti ditunjukkan pada tulisan yang tercetak tebal.

**Contoh 3.2.4.**

Misalkan keluarga himpunan $\mathcal{A} = ( A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 )$ dengan;

$A_1 = \{ 1, 2, 3 \}$,

$A_2 = \{ 2, 3 \}$,

$A_3 = \{ 3, 5, 7 \}$,

$A_4 = \{ 1, 2 \}$,

$A_5 = \{ 1, 2, 3 \}$,

$A_6 = \{ 4, 5, 6 \}$.

Maka keluarga himpunan $\mathcal{A}$ tidak mempunyai tranversal, misalkan pilih himpunan-himpunan $A_1$, $A_2$, $A_4$, dan $A_5$ dengan elemen-elemen 1, 2, atau 3, sehingga :

$$A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_5 = \{ 1, 2, 3 \}$$

Dengan berdasarkan teorema 3.2.1, sebarang subhimpunan dari $r$ wanita-wanita harus kenal dengan paling sedikit $r$ pria. Pada contoh 3.2.4, terdapat himpunan 4 wanita yang kenal dengan 3 orang pria, akibatnya terdapat satu diantara keempat wanita tersebut tidak dapat menemukan calon suaminya.

Jelas bahwa, untuk memperoleh representatif berbeda dari setiap keluarga himpunan $\mathcal{A} = ( A_1, A_2, .., A_n )$, diperlukan gabungan sebarang $r$ himpunan $A_{i1}, A_{i2}, .., A_{ir}$ yang terdiri paling sedikit $r$ elemen.

$$\left|\bigcup_{i\in\{i1,i2,...,ir\}} A_i\right| \geq \left|\{i1,....,ir\}\right| \text{ atau}$$

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \geq |\, I \,|, \text{ dengan } I \subseteq \{\ 1, \dots, n\ \}$$

cara mendapatkan keluarga himpunan $\mathcal{A}$ tranversal, sama seperti mencari seorang suami untuk sebarang wanita, sehingga secara umum didapat :

**Akibat 3.2.1. (Teorema Hall – Bentuk Tranversal )**

Keluarga himpunan $\mathcal{A} = ( A_1, A_2, .., A_n )$ mempunyai tranversal jika hanya jika :

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \geq |\, I \,|, \text{ untuk setiap } I \subseteq \{\ 1, \dots, n\ \}$$

**Bukti :**

Misalkan $n$ 'wanita' dengan anggota elemen-elemennya 1, 2,.., $n$ dan untuk setiap $i$ misalkan $A_i$ adalah himpunan 'pria' yang dikenal oleh 'wanita' $i$. Maka dengan mempergunakan teorema hall untuk wanita dan pria diperoleh :

$\mathcal{A}$ mempunyai tranversal $\Leftrightarrow$ wanita-wanita 1, 2,.., $n$ dapat menemukan suami dari pria-pria yang mereka kenal.

$\Leftrightarrow$ untuk sebarang himpunan $\boldsymbol{I}$ wanita dari ke-$n$ wanita di atas, kenal paling sedikitnya $|\boldsymbol{I}|$ pria.

$\Leftrightarrow$ untuk sebarang $\boldsymbol{I}$, himpunan $\bigcup_{i \in I} A_i$ terdiri paling sedikitnya $|\boldsymbol{I}|$ pria.

$$\Leftrightarrow \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq |\boldsymbol{I}|, \text{ untuk setiap } \boldsymbol{I} \subseteq \{ 1, \ldots, n \}.$$

**Contoh 3.2.5.**

Misalkan diketahui grup dari 8 pria dan 5 wanita yang telah cukup umur untuk menikah, dimana :

Wanita 1 kenal pria $A_1 = \{ \mathbf{1}, 2, 7 \}$,

Wanita 2 kenal pria $A_2 = \{ \mathbf{5}, 6, 8 \}$,

Wanita 3 kenal pria $A_3 = \{ 1, 3, \mathbf{7} \}$,

Wanita 4 kenal pria $A_4 = \{ 2, \mathbf{3}, 4, 7 \}$,

Wanita 5 kenal pria $A_5 = \{ 1, 2, 6, \mathbf{8} \}$.

Jelas bahwa, didapatkan seorang suami untuk setiap wanita diantara pria-pria yang mereka kenal; seperti ditunjukkan pada tulisan yang tercetak tebal. Tetapi, apakah mungkin didapatkan seorang suami untuk setiap wanita itu, dimana pria-pria 5, 6, 7, dan 8 telah menikah ? tidak, sebab sebagai contoh, pilih wanita-wanita 1, 3, dan 4 kenal dengan pria-pria 1, 2, 3, 4, dan 7, dan diantara ketiga wanita tersebut hanya ada seorang wanita yang dapat menikah dengan satu pria, yaitu 7. Jadi, tersisa dua wanita yang lain yaitu ( 2 dan 5 ) untuk menikah dengan tiga pria yang lain ( 5, 6, dan 8 ), sehingga hal tersebut jelas tidak mungkin.

Pada contoh 3.2.5, menggambarkan kejadian untuk mendapatkan sebarang suami dari himpunan wanita, selanjutnya himpunan ***P*** adalah himpunan pria yang meliputi suami-suami, diperlukan untuk menjelaskan di dalam pemilihan sebarang subhimpunan ***I*** wanita.

Banyaknya pria-pria di ***P*** yang tidak kenal dengan sebarang wanita di ***I***

$\leq$

Banyaknya wanita-wanita yang tidak meliputi ***I***.

Syarat di atas, merupakan pernyataan agar himpunan tersebut mempunyai tranversal yang meliputi himpunan ***P***.

**Teorema 3.2.2.**

Misalkan $\mathcal{A} = (A_1, A_2, .., A_n)$ adalah keluarga himpunan dan misalkan $\boldsymbol{P} \subseteq A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n$. Maka $\mathcal{A}$ mempunyai tranversal yang meliputi himpunan ***P***, jika hanya jika memenuhi :

(i). $\mathcal{A}$ mempunyai tranversal.

(ii). $\left|\boldsymbol{P} \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)\right| \leq n - |\boldsymbol{I}|$, untuk setiap $\boldsymbol{I} \subseteq \{1, ..., n\}$.

**Bukti :**

($\Rightarrow$) $\mathcal{A}$ mempunyai tranversal yang meliputi himpunan ***P***, maka jelas bahwa $\mathcal{A}$ mempunyai tranversal. Jadi pernyataan (i) terbukti. Kemudian untuk membuktikan (ii), berdasarkan teorema marriage asumsikan bahwa dapat ditemukan suami untuk wanita-wanita yang meliputi himpunan ***P***. Dari syarat di atas, hal ini berarti sebarang himpunan wanita ***I***, pria-pria di ***P*** merupakan pria-

pria yang tidak dikenal oleh calon istrinya di luar $\boldsymbol{I}$. Akibatnya, banyaknya pria di $\boldsymbol{P}$ yang tidak kenal dengan sebarang wanita di $\boldsymbol{I}$ adalah kurang dari atau sama dengan banyaknya wanita yang tidak di $\boldsymbol{I}$. Dengan mempergunakan teori himpunan maka jelas pernyataan (ii) terbukti.

($\Leftarrow$) Akan dibuktikan bahwa keluarga himpunan $\mathscr{A}$ memenuhi pernyataan (i) dan (ii), dan misalkan $A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = \boldsymbol{B}$, dengan $|\boldsymbol{B}| = m$.

Misalkan keluarga himpunan baru $\mathscr{A}^*$ dari $m$ himpunan yaitu :

$$\mathscr{A}^* = (A_1, A_2, .., A_n, \boldsymbol{B} \backslash \boldsymbol{P}, \boldsymbol{B} \backslash \boldsymbol{P}, \ldots, \boldsymbol{B} \backslash \boldsymbol{P})$$

Akan dibuktikan bahwa pernyataan (i) dan (ii) menjamin $\mathscr{A}^*$ mempunyai tranversal, dengan demikian apakah sebarang $r$ himpunan dari $\mathscr{A}^*$ terdiri paling sedikit $r$ elemen. Jika $r$ himpunan hanya dipilih dari himpunan $A_1, A_2, .., A_n$ maka sesuai pernyataan (i), akibatnya $r$ himpunan terdiri paling sedikit $r$ elemen. Yang lain, jika $r$ himpunan dari $\mathscr{A}^*$ meliputi $\{ A_i : i \in \boldsymbol{I} \}$ untuk $A_1, A_2, .., A_n$ dan himpunan $r - |\boldsymbol{I}|$ ( >0 ), maka gabungan $r$ himpunan tersebut adalah :

$$\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup (\boldsymbol{B} \backslash \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{B} \backslash \left( \boldsymbol{P} \backslash \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \right)$$

dan menurut pernyataan (ii) diperoleh,

$$m - \left| \boldsymbol{P} \backslash \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \right| \geq m - (n - |\boldsymbol{I}|)$$

elemen. Tetapi, karena $r - |\boldsymbol{I}|$ adalah banyaknya $\boldsymbol{B} \backslash \boldsymbol{P}$ yang dipilih dari $\mathscr{A}^*$ dan jumlahnya tidak boleh melebihi $m - n$. Akibatnya :

$$r - |I| \leq m - n \text{ atau } m - (n - |I|) \geq r$$

Oleh sebab itu, pernyataan benar untuk sebarang $r$ himpunan $\mathcal{A}^*$ terdiri paling sedikit $r$ elemen.

Berdasarkan akibat 3.2.1, dengan mengunakan keluarga himpunan baru $\mathcal{A}^*$ mempunyai tranversal yang terdiri dari $m$ himpunan, seperti ditunjukkan di bawah ini :

$$\mathcal{A}^* = (A_1, A_2, .., A_n, \boldsymbol{B \backslash P}, \boldsymbol{B \backslash P}, \ldots, \boldsymbol{B \backslash P})$$

Maka keluarga himpunan $\mathcal{A}^*$ adalah tranversal dari $m$ representatif berbeda yaitu subhimpunan $A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = \boldsymbol{B}$ yang berjumlah $m$ elemen. Berdasarkan hal tersebut, jelas bahwa keluarga himpunan $\mathcal{A}^*$ merupakan tranversal yang terdiri dari $\boldsymbol{B}$ dan juga himpunan $\boldsymbol{P}$. Akibatnya, keluarga himpunan $\mathcal{A}^*$ mempunyai tranversal yang meliputi himpunan $\boldsymbol{P}$. Maka bukti teorema lengkap.

### 3.3. Pembentukan Bujur Sangkar Latin

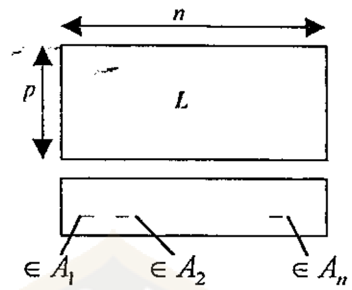
Bujur Sangkar Latin dapat dibentuk dari suatu Persegi Panjang Latin yang mempunyai ordo $p$ x $n$ atau $p$ x $q$, dimana $q < n$.

**Teorema 3.3.1.**

Terdapat Persegi Panjang Latin ordo $p$ x $n$ yang mempunyai elemen-elemen 1, 2, ..., $n$ dapat dibentuk menjadi Bujur Sangkar Latin ordo $n$ x $n$.

**Bukti :**

Misalkan $L$ adalah **PPL**. Jika $p = n$, maka jelas terbukti. Jika $p < n$ dan $1 \leq i \leq n$, serta misalkan pula himpunan $A_i$ dengan elemen-elemen 1, 2, …., $n$ yang tidak digunakan pada kolom ke-$i$ di $L$.




Gambar. 3.3.1.

Untuk setiap $A_i$ tepat muncul $n - p$ elemen. Jika $L$ mempunyai $p$ baris, untuk setiap integer 1, 2, .., $n$ maka akan tepat muncul $p$ kali dalam $L$. Jika tidak terdapat pengulangan elemen disebarang kolom untuk setiap integer 1, 2, .., $n$ maka akan tepat muncul $p$ kolom. Sedemikian sehingga untuk setiap integer 1, 2, .., $n$ adalah elemen yang tepat muncul ( $n - p$ ) kali dalam $A_i$. Andaikan $a_i$ adalah **SDR** untuk $A_i$, maka dengan mengambil $a_i$ pada $L$ sebagai elemen baris baru sehingga diperoleh ( $p + 1$ ) x $n$ pada $L^1$. Karena $a_i$ adalah **SDR** untuk $A_i$ tanpa adanya pengulangan elemen di setiap baris dan setiap kolom pada $L^1$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $A_i$ mempunyai **SDR**, dan dengan memperhatikan syarat teorema marriage sehingga dapat menjelaskan hal tersebut.

Misalkan $k$ terdiri dari integer 1, 2,…, $n$ dan pilih integer $i1$, $i2$,…, $ik$ dengan $1 \leq i1 < i2 < \ldots < ik \leq n$.

Misalkan $|A_{i1} \cup A_{i2} \cup \ldots \cup A_{ik}| = t$

$\Rightarrow |A_{i1}| = |A_{i2}| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots = |A_{in}| = n - p$

$\Rightarrow |A_{i1}| + |A_{i2}| + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + |A_{in}| = k\,(n-p)$

$\Rightarrow |A_{i1}| + |A_{i2}| + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + |A_{in}| \le t\,(n-p)$

$\Rightarrow \qquad k\,(n-p) \le t\,(n-p)$

$\Rightarrow \qquad k \le t$

maka $|A_{i1} \cup A_{i2} \cup \dots\dots \cup A_{ik}| \ge k$

karena syarat teorema marriage terpenuhi. Maka, $\boldsymbol{L}$ dapat dibentuk menjadi **PPL** ordo ( $p$ + 1 ) x $n$. Jika $p + 1 = n$ maka pembuktian selesai, jika tidak, proses diulangi kembali sampai diperoleh **PPL** ordo $n$ x $n$ yang tidak lain adalah **BSL** order $n$.

**Contoh 3.3.1.**

**PPL** ordo 2 x 5 di bawah ini dapat dibentuk menjadi **BSL** ordo 5 x 5, dengan elemen-elemen 1, 2, 3, 4, 5.

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Dimana, $p$ x $n$ = 2 x 5 dengan $p$ = 2, dan $n$ = 5

$|A_{in}| = n - p = 5 - 2 = 3$, sehingga **PPL** ordo 2 x 5 dapat dibentuk menjadi **BSL** ordo 5 x 5 sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \{2,3,4\} & \{3,4,5\} & \{1,3,5\} & \{1,2,4\} & \{1,2,5\} \end{bmatrix}$$

selanjutnya, untuk membentuk **PPL** ordo 3 x 5, elemen-elemen yang belum muncul pada baris sebelumnya ( baris pertama dan kedua ) dapat dipergunakan kembali agar elemen-elemen tersebut tepat muncul 3 kali pada baris ketiga. Dengan cara yang sama dapat dilakukan untuk membentuk **PPL** ordo 4 x 5 sampai akhirnya terbentuk **BSL** ordo 5 x 5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ \{3,4\} & \{3,5\} & \{1,5\} & \{2,4\} & \{1,2\} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ \{4\} & \{3\} & \{5\} & \{2\} & \{1\} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Contoh 3.3.2.**

**PPL** ordo 4 x 4 di bawah ini tidak dapat dibentuk menjadi **BSL** ordo 6 x 6, sebab untuk penambahan kolom-kolom yang belum terisi diperlukan tiga elemen '5', sedangkan pada matriks tersebut hanya terdapat 2 kolom yang belum terisi.

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

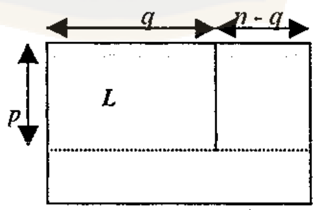
$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & - & - \\ 5 & 6 & 3 & 1 & - & - \\ 1 & 3 & 6 & 2 & - & - \\ 3 & 2 & 4 & 6 & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dijelaskan agar suatu Persegi Panjang Latin $\boldsymbol{L}$ ordo $p$ x $q$ dapat dibentuk menjadi **BSL** ordo $n$ x $n$.

Jika suatu integer $i$ muncul sekali untuk setiap baris, maka integer ini harus muncul $p$ kali di $p$ baris pertama, sehingga terdapat $p - \boldsymbol{L}\ (i)$ kali di daerah pojok kanan atas, dimana $\boldsymbol{L}\ (i)$ adalah integer $i$ yang tepat muncul di $\boldsymbol{L}$. Sedangkan hanya terdapat ( $n - q$ ) kolom ( lihat gambar 3.3.2 ). Jadi agar $\boldsymbol{L}$ dapat dibentuk menjadi **BSL** ordo $n$ x $n$, diperlukan :

$$p - \boldsymbol{L}(\,i\,) \le n - q \quad \text{atau}$$

$$\boldsymbol{L}(i) \ge p + q - n, \qquad \forall\, i \in \{\, 1, 2, \ldots, n \,\}$$




Bujur Sangkar Latin ordo $n$ x $n$

Gambar 3.3.2.

Pernyataan di atas merupakan syarat yang harus dipenuhi untuk penambahan baris, apabila Persegi Panjang Latin $\boldsymbol{L}$ ordo $p$ x $q$ dapat dibentuk menjadi **BSL** ordo $n$ x $n$. Selanjutnya selain penambahan baris, diperlukan juga penambahan kolom $\boldsymbol{L}$ agar dapat dibentuk menjadi **PPL** ordo $p \times (q + 1)$ pada $\boldsymbol{L}^1$, dimana $\boldsymbol{L}^1(i)$ adalah integer $i$ yang muncul pada $\boldsymbol{L}^1$, adalah :

$$\boldsymbol{L}^1(i) \geq p + (q + 1) - n$$

Oleh karena itu, untuk suatu integer $i$ yaitu $\boldsymbol{L}(i) = p + q - n$ dapat dimasukkan ke dalam kolom baru.

Misalkan himpunan $\boldsymbol{P} = \{i : 1 \leq i \leq n \text{ dan } \boldsymbol{L}(i) \geq p + q - n\}$,

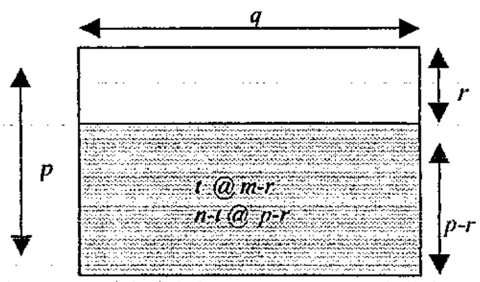
maka proses penambahan kolom ekstra harus meliputi himpunan $\boldsymbol{P}$, sebab untuk setiap $i$ muncul pada **PPL** baru paling sedikitnya $p + (q + 1) - n$ kali.

**Lemma 3.3.2.**

Misalkan $\boldsymbol{L}$ adalah **PPL** ordo $p$ x $q$, dengan elemen-elemen 1, 2,..., $n$ dan misalkan juga $r$ dan $m$ adalah integer dengan $0 \leq r \leq m < p$. Maka banyaknya anggota dari $\{1, 2,.., n\}$ yang tepat muncul $m$ kali di $\boldsymbol{L}$ dan yang muncul pada semua $r$ baris pertama di $\boldsymbol{L}$, tidak dapat melebihi :

$$\frac{(n-q)(p-r)}{(p-m)}$$

**Bukti :**




Gambar.3.3.3.

Misalkan $t$ anggota dari $\{1, 2,\ldots, n\}$ yang tepat muncul $m$ kali di $\boldsymbol{L}$ dan yang muncul pada semua $r$ baris pertama di $\boldsymbol{L}$. Maka ke- $t$ anggota tersebut tepat muncul $(m - r)$ kali di daerah yang diarsir $\boldsymbol{L}$. Dan $(n - t)$ anggota yang lain masing-masing tepat muncul paling banyak $(p - r)$ kali di daerah arsiran yang sama.

Jadi total kemunculan anggota di daerah arsiran tersebut, didapat :

$$(p-r)q \le t(m-r)+(n-t)(p-r)$$

$$pq-rq \le tm-tr+np-nr-tp+rt$$

$$tp-tm \le np-nr-pq+rq$$

$$t(p-m) \le (n-q)(p-r)$$

$$t \le \frac{(n-q)(p-r)}{(p-m)}$$

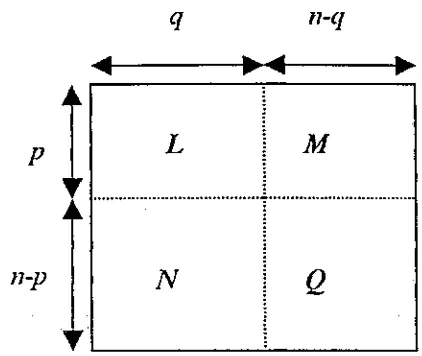
**Teorema 3.3.2.**

Persegi Panjang Latin $\boldsymbol{L}$ ordo $p$ x $q$ dengan elemen-elemen $1, 2,\ldots, n$ dapat dibentuk menjadi Bujur Sangkar Latin ordo $n$ x $n$, jika hanya jika memenuhi :

$$\boldsymbol{L}(i) \ge p+q-n,\ \forall\, i \in \{1, 2,\ldots, n\}$$

**Bukti :**

($\Rightarrow$) Misalkan, $\boldsymbol{L}$ dapat dibentuk menjadi **BSL** ordo $n$ x $n$. seperti pada gambar 3.3.4 berikut :




Gambar 3.3.4

maka integer $i$ tepat muncul $\boldsymbol{L}(i)$ kali di $\boldsymbol{L}$ dan $p$ kali di $\boldsymbol{L}$ dan $\boldsymbol{M}$. Jadi integer $i$ muncul $p - \boldsymbol{L}(i)$ kali di $\boldsymbol{M}$. Tetapi integer $i$ muncul ( $n - q$ ) kali di $\boldsymbol{M}$ dan $\boldsymbol{Q}$, akibatnya :

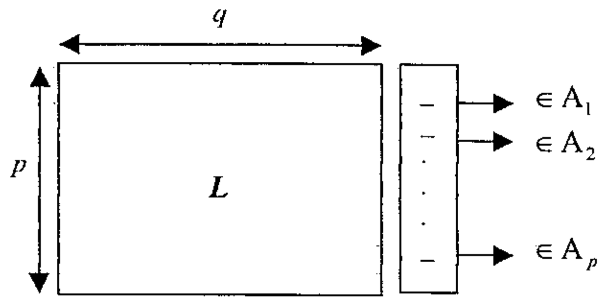
$$p - \boldsymbol{L}(i) \leq n - q$$

$$\boldsymbol{L}(i) \geq p + q - n$$

($\Leftarrow$) Sebaliknya, asumsikan bahwa untuk setiap integer $i$ dengan $\boldsymbol{L}(i) \geq p + q - n$, dan asumsikan $q < n$.

Akan ditunjukkan bahwa, $\boldsymbol{L}$ dapat dibentuk menjadi **PPL** ordo $p$ x ($q$ + 1), demikian seterusnya sehingga proses tersebut dapat dilanjutkan sampai **PPL** ordo $p$ x $n$ tercapai ( dan berdasarkan teorema 3.3.1 **PPL** orde $p$ x $n$ dapat dibentuk menjadi **BSL** ordo $n$ x $n$ ).

Untuk $1 \leq i \leq p$ dan $A_i$ adalah himpunan yang tidak digunakan dalam baris ke $i$ pada $\boldsymbol{L}$. Misalkan himpunan tersebut adalah $\boldsymbol{P} = \{ i : 1 \leq i \leq n$ dan $\boldsymbol{L}(i) = p + q - n \}$.




Gambar 3.3.5.

Maka akan ditunjukkan bahwa $\mathcal{A} = (A_1, A_2, .., A_p)$ mempunyai **SDR** yang meliputi himpunan ***P***. ( dengan mempergunakan **SDR** tersebut untuk memberikan kolom ekstra sehingga dapat dibentuk menjadi **PPL** $\boldsymbol{L}^1$ ordo $p$ x ( $q$ + 1 ) ).

Untuk menunjukkan bahwa $\mathcal{A}$ mempunyai **SDR**, notasikan :

$$|A_1| = |A_2| = \ldots = |A_p| = n - q$$

untuk setiap integer $i$ dari $p - \boldsymbol{L}(i)$ ( $\le n - q$ ) baris di $\boldsymbol{L}$ dan berdasarkan hal ini, setiap integer $i$ mempunyai paling banyak ( $n - q$ ) himpunan $A_1, A_2, .., A_p$. Akibatnya, sesuai bukti teorema 3.2.2, sebarang $r$ dari himpunan $A_1, A_2, .., A_p$ terdiri paling sedikit $r$ anggota yang berbeda. Oleh karena itu, dari teorema 3.2.2, terbukti bahwa $\mathcal{A}$ mempunyai **SDR**.

Apabila $\mathcal{A}$ mempunyai **SDR** yang meliputi himpunan ***P***, dapat ditunjukkan bahwa :

$$\left|\boldsymbol{P} \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)\right| \le p - |\boldsymbol{I}|,\ \forall\ \boldsymbol{I} \subseteq \{1, 2, .., p\}$$

dengan mempergunakan teorema 3.2.2, misalkan $\boldsymbol{I} = \{1, .., r\}$dengan ( $r$ himpunan pertama ), sehingga diperoleh :

$\left|P \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)\right|$ = banyaknya anggota dari $P$ di luar $A_1, A_2, .., A_r$

= banyaknya anggota dari $P$ disemua $r$ baris pertama pada $L$.

Untuk setiap anggota dari $P$ tepat muncul $p + q - n$ kali di $L$ dan total anggota dari $P$ disemua $r$ baris pertama pada $L$ adalah 0 jika $r > p + q - n$. Kasus yang lain, jika $r \leq p + q - n$ diperoleh $m = p + q - n$ , dan menurut lemma 3.3.2 didapat:

$\left|P \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)\right|$ = banyaknya anggota dari 1, . .., $n$ yang tepat muncul $p + q - n$ kali di

$L$ dan semua $r$ baris pertama di $L$

$$= \frac{(n-q)(p-r)}{(p-m)}$$

$$\leq \frac{(n-q)(p-r)}{p-(p+q-n)}$$

$$= p - r$$

$$= p - |I|$$

sehingga terbukti. Akibatnya sesuai teorema 3.2.2, $\mathcal{A}$ mempunyai **SDR** yang meliputi himpunan $P$.

Karena $\mathcal{A}$ mempunyai **SDR** yang meliputi himpunan $P$, maka dapat dibentuk sebuah kolom ekstra dari $L$ sehingga dapat membentuk menjadi sebuah **PPL** $L^1$ ordo $p$ x ( $q + 1$ ). Maka :

$$L^1(i) = L(i) + 1 = (p + q - n) + 1 \qquad \text{jika } i \in P$$

dan

$$L^1(i) \geq L(i) > p + q - n \qquad \text{jika } i \notin P$$

akibatnya untuk setiap kasus, disimpulkan bahwa :

$$\boldsymbol{L}^1(i) \geq p + (\, q + 1\,) - n$$

Selanjutnya proses penambahan kolom ekstra dapat terus diulang sampai **PPL** ordo $p$ x $n$ tercapai, kemudian menurut teorema 3.3.1 **PPL** tersebut dapat dibentuk menjadi **BSL** ordo $n$ x $n$.

**Contoh 3.3.3.**

**PPL** ordo 2 x 3, dengan matriks $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ dapat dibentuk menjadi **BSL** ordo 5 x 5. Dalam hal ini, $\boldsymbol{L}$ mempunyai ordo 2 x 3, dengan $p = 2$, $q = 3$, dan $n = 5$. Sedemikian sehingga $p + q - n = 0$, dan jelas bahwa $\boldsymbol{L}(i) \geq p + q - n$ untuk setiap $i$.

Tahap pertama, dimulai dengan membentuknya menjadi **BSL** ordo 2 x 4 dengan cara menambahkan kolom ekstra.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & - \\ 4 & 1 & 5 & - \end{bmatrix} \begin{matrix} \in \{2,5\} \\ \in \{2,3\} \end{matrix}$$

Terdapat 3 cara yang mungkin dilakukan; dengan setiap kasus dicoba agar dapat dibentuk menjadi **PPL** ordo 2 x 5.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \in \{5\} \\ \in \{2\} \end{matrix}$ $\Downarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \in \{2\} \\ \in \{3\} \end{matrix}$ $\Downarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \in \{2\} \\ \in \{2\} \end{matrix}$ $\Downarrow$ tidak mungkin

untuk cara pertama dan kedua dapat diselesaikan sampai didapatkan bentuk **BSL** ordo 5 x 5 dengan mempergunakan teorema 3.3.1, sedangkan cara ketiga tidak dapat dilanjutkan menjadi **BSL** ordo 5 x 5, sebab ( $p = 2$, $q = 4$, $p + q - n = 1$ ) padahal $\boldsymbol{L}(2) = 0$ sehingga $\boldsymbol{L}(2) < p + q - n$, akibatnya tidak sesuai dengan syarat $\boldsymbol{L}(i) \geq p + q - n$.

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ \{2,3,5\} & \{2,4,5\} & \{1,2,3\} & \{1,4,5\} & \{1,3,4\} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ \{2,5\} & \{4,5\} & \{2,3\} & \{1,4\} & \{1,3\} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ \{5\} & \{4\} & \{2\} & \{1\} & \{3\} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ \{2,3,5\} & \{2,4,5\} & \{1,2,3\} & \{1,3,4\} & \{1,4,5\} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ \{2,5\} & \{2,4\} & \{1,3\} & \{1,3\} & \{4,5\} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ \{5\} & \{2\} & \{3\} & \{1\} & \{4\} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

**Contoh 3.3.4.**

Dengan mempergunakan teorema 3.3.1 dan 3.3.2, **PPL** ordo 3 x 3 di bawah ini dapat dibentuk menjadi **BSL** ordo 6 x 6,

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

yaitu :

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & - \\ 6 & 5 & 2 & - \\ 1 & 2 & 3 & - \end{bmatrix} \begin{matrix} \in \{2,3,4\} \\ \in \{1,3,4\} \\ \in \{4,5,6\} \end{matrix}$$

$$p + q - n = 3 + 3 - 6 = 0$$

$$\boldsymbol{P} = \{\, i : \boldsymbol{L}(i) = 0 \,\} = \{\, 4 \,\}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & - \\ 6 & 5 & 2 & 1 & - \\ 1 & 2 & 3 & 5 & - \end{bmatrix} \begin{matrix} \in \{2,3\} \\ \in \{3,4\} \\ \in \{4,6\} \end{matrix}$$

$$p + q - n = 3 + 4 - 6 = 1$$

$$\boldsymbol{P} = \{\, i : \boldsymbol{L}(i) = 1 \,\} = \{\, 3\,,4 \,\}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & - \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & - \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & - \end{bmatrix} \begin{matrix} \in \{2\} \\ \in \{3\} \\ \in \{4\} \end{matrix}$$

$$p + q - n = 3 + 5 - 6 = 2$$

$$\boldsymbol{P} = \{\, i : \boldsymbol{L}(i) = 2 \,\} = \{\, 2, 3, 4 \,\}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

dengan mempergunakan teorema 3.3.1, **PPL** tersebut dapat dibentuk menjadi **BSL** ordo 6 x 6, salah satu caranya yaitu :

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ \{\mathbf{2},3,4\} & \{1,\mathbf{3},4\} & \{\mathbf{4},5,6\} & \{2,3,\mathbf{6}\} & \{\mathbf{1},2,5\} & \{1,\mathbf{5},6\} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 \\ \{3,\mathbf{4}\} & \{\mathbf{1},4\} & \{\mathbf{5},6\} & \{2,\mathbf{3}\} & \{\mathbf{2},5\} & \{1,\mathbf{6}\} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ \{\mathbf{3}\} & \{\mathbf{4}\} & \{\mathbf{6}\} & \{\mathbf{2}\} & \{\mathbf{5}\} & \{\mathbf{1}\} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$