BAB II

MATERI PENUNJANG

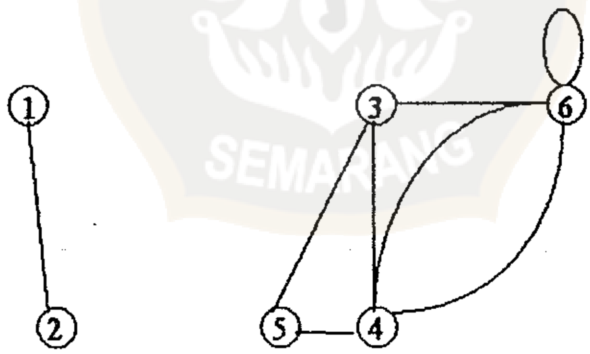
2.1. DASAR-DASAR TEORI GRAPH DAN SUBGRAPH

Definisi 2.1.1

Sebuah graph $G(V,E)$ atau sering disebut graph G mengandung himpunan V dengan elemen-elemennya disebut node, dan himpunan E yang anggota-anggota adalah garis ditulis (i, j) atau (j, i) , $i, j \in V$. Dan menyatakan garis (i, j) connected antara node i dan node j , dan (i, j) incident dengan node i dan node j atau sebaliknya bahwa i dan j adalah incident dengan (i, j).

Contoh : Gambar 1 graph $G(V,E)$ dimana $V = \{1,2,3,4,5,6\}$

$E = \{(1,2), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6)_1, (4,6)_2, (6,6)\}$



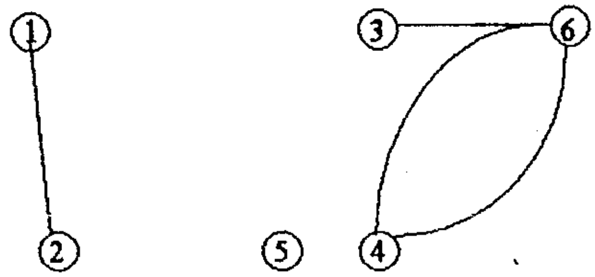
gambar 1 Sebuah graph $G(V,E)$

Definisi 2.1.2

Sebuah subgraph dari sebuah graph $G(V,E)$ adalah sebuah graph $Gs(Vs,Es)$ dimana Vs dan Es adalah subset-subset dari V dan E. Jika $Vs = V$ maka subgraph disebut sebagai spanning subgraph dari G.

Contoh : Gambar 2 subgraph *Gs* (*Vs,Es*) dimana *Vs* = {1,2,3,4,5,6}

Es = {(1,2), (3,6), $(4,6)_1$, $(4,6)_2$}



gambar 2 Sebuah Subgraph *Gs* (*Vs,Es*) dari graph *G*(*V,E*)

Definisi 2.1.3

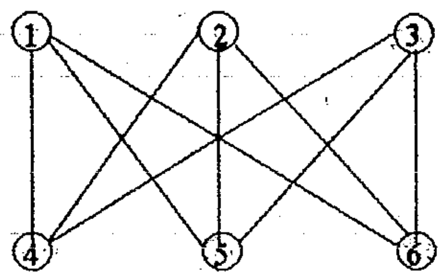
Barisan Garis (*Edge Sequence*). Barisan garis panjang *k-1* dalam sebuah graph *G* adalah barisan terhitung dari garis-garis yang dinotasikan $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{k-1}, i_k)$, $k \geq 2$. Barisan garis dikatakan tertutup jika $i_1 = i_k$, jika tidak berarti barisan garis terbuka.

Contoh : Dalam *gambar 3* barisan tertutup dengan panjang 10 adalah

(4,2), (2,6), (6,3), (3,5), (5,2), (2,6), (6,3), (3,5), (5,2), (2,4)

Barisan terbuka dengan panjang 9 adalah

(1,6), (6,3), (3,5), (5,3), (3,4), (4,1), (1,6), (6,2), (2,5)



gambar 3

Definisi 2.1.4

Train Baris (*Edge Train*). Jika garis-garis dinyatakan sebagai barisan garis tertentu , maka barisan garis itu disebut train baris.

Contoh : (1,6), (6,2), (2,5), (5,1), (1,4), (4,2) adalah train baris terbuka (dalam *gambar 3*) dengan panjang 6.

Definisi 2.1.5

Circuit. Train baris tertutup dengan semua node-node $i_1, i_2, ..., i_{k-1}$ terhubung dengan syarat $i_1 = i_k$ adalah suatu circuit panjang *k-1.*

Sebuah self loop adalah circuit dengan panjang 1, dan circuit sering disebut cycle atau loop.

Contoh : Dalam *gambar 3* (1,5), (5,3), (3,6), (6,1) adalah sebuah circuit dengan panjang 4.

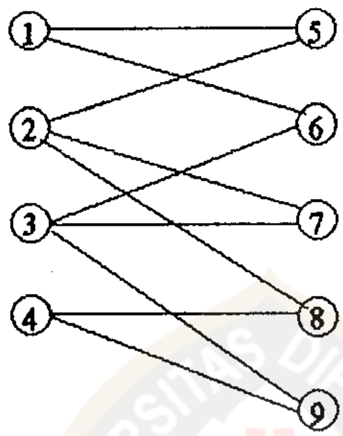
Definisi 2.1.6

Derajat (*Degree*). Derajat sebuah node *i* dalam graph dinotasikan dengan $d(i)$ yaitu jumlah garis-garis yang incident dengan node *i.*

Definisi 2.1.7

Graph Bipartite (*Bipartite Graph*). Sebuah graph *G* (*V,E*) dikatakan bipartite jika himpunan *V* dipartisi menjadi dua subset V_1 dan V_2 yang tak saling berhubungan (*disjoint*) dengan setiap garis mempunyai node akhir di V_1 dan node lainnya di V_2 .

Sebagai contoh *gambar 4* adalah graph bipartite dengan himpunan node $V_1 = \{1,2,3,4\}$ dan $V_2 = \{5,6,7,8,9\}$.



gambar 4 sebuah graph bipartite

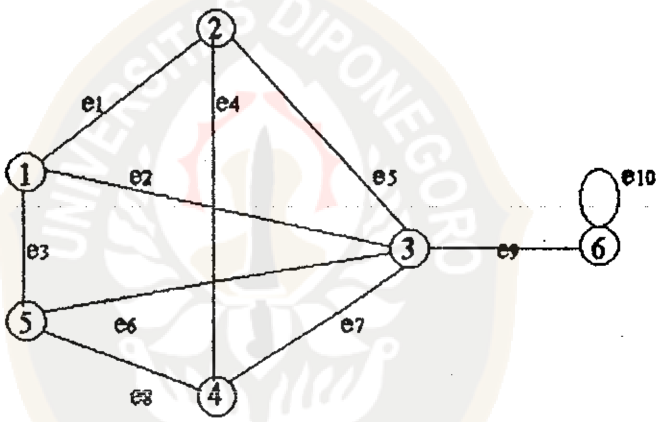
2.2. OPERASI DALAM GRAPH

Operasi dalam Graph. Ada empat teori himpunan dalam operasi graph yaitu union (gabungan), intersection (irisan), diference (pengurangan), ring sum (penjumlahan) yang disimbolkan dengan $\cup, \cap, -, \oplus$.

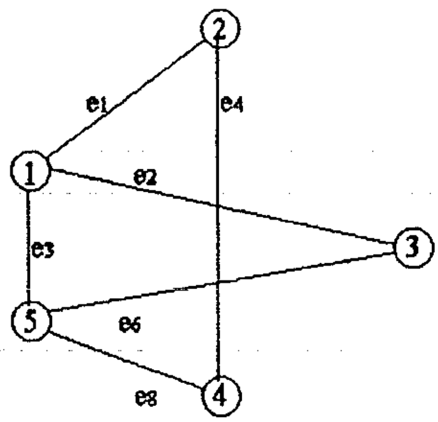
Contoh jika S_1 dan S_2 adalah dua himpunan maka $S_1 \cup S_2$ menotasikan himpunan yang mengandung semua elemen baik di S_1 maupun di S_2 atau dikeduanya. Jika G_1 (V_1, E_1) dan G_2(V_2, E_2) adalah dua subgraph G (V,E), maka $G_1 \cup G_2$ dapat direpresentasikan sebagai subgraph G dengan himpunan nodenya $V_1 \cup V_2$ dan himpunan garisnya $E_1 \cup E_2$.

Himpunan $S_1 \cup S_2$ disebut gabungan himpunan (*set union*) dari himpunan S_1 dan S_2, dan graph $G_1 \cup G_2$ disebut jumlahan graph (*sum graph*) dari subgraph G_1 dan G_2. Analog untuk irisan $S_1 \cap S_2$ adalah himpunan yang terdiri dari semua elemen yang ada diantara S_1 dan juga ada di S_2. Irisan graph $G_1 \cap G_2$ adalah subgraph G dengan himpunan node $V_1 \cap V_2$ dan himpunan garis $E_1 \cap E_2$.

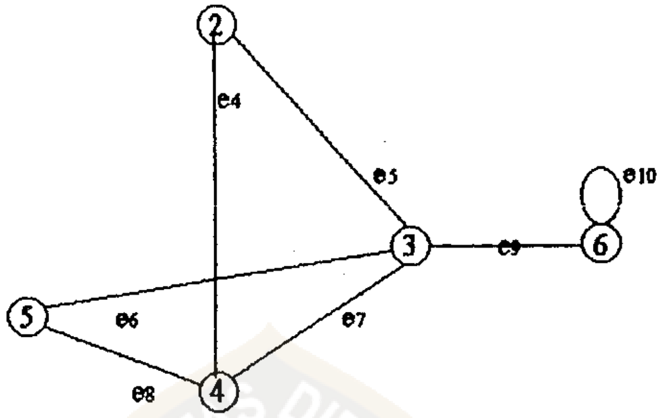
Sebagai ilustrasi graph G seperti di gambar 5 dan dua subgraph G_1 dan G_2 dari graph G ada di gambar 6. Jumlahan graph $G_1 \cup G_2$ adalah graph G sendiri ekivalen dengan $G = G_1 \cup G_2$. Irisan graph $G_1 \cap G_2$ adalah subgraph dengan himpunan garisnya adalah e_4, e_6, dan e_8.



gambar 5 sebuah graph $G(V,E)$



G_1 (V_1, E_1)



$G_2\,(V_2, E_2)$

gambar 6 dua subgraph G_1 dan G_2 dari $G(V,E)$

Himpunan $S_1 - S_2$ mengandung semua elemen di S_1 tapi tidak di S_2, dan $S_1 \oplus S_2$ menotasikan himpunan yang mengandung elemen di S_1 atau di S_2 tapi tidak dikeduanya atau ditulis

$$S_1 \oplus S_2 = (S_1 \cup S_2) - (S_1 \cap S_2)$$

$$S_1 - S_2 = S_1 \cap \bar{S}_2$$

Untuk contoh ring sum (penjumlahan) misal himpunan $S_1=\{a,b,c,d\}$ dan $S_2=\{a,c,e\}$ adalah

$$S_1 \oplus S_2 = \{b,d,e\}$$

Dan untuk pengurangan adalah

$$S_1 - S_2 = \{b,d\}$$

$$S_2 - S_1 = \{e\}$$

Ekivalen jika G_1 dan G_2 adalah subgraph G yang tidak mengandung node isolasi, maka $G_1 - G_2$ adalah subgraph yang mengandung semua garis di G_1 tapi tidak

tidak di G_2 dan $G_1 \oplus G_2$ adalah subgraph yang mengandung semua garis di G_1 atau di G_2 tapi tidak dikeduanya. Di bagian lain didapat $G_1 \oplus \phi = \phi \oplus G_1 = G_1$.

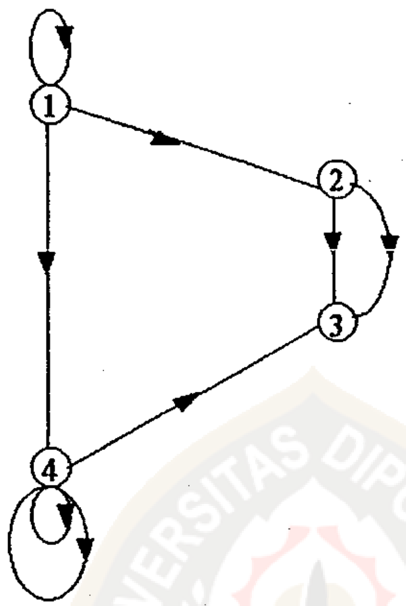
2.3. DIRECTED GRAPH DAN (p, s)-DIGRAPH

Definisi 2.3.8

Directed Graph (Digraph). Sebuah directed graph G (V,E) atau disederhanakan sebuah directed graph G, mengandung himpunan V dengan elemen-elemennya disebut node dan himpunan E yang bagian-bagiannya adalah garis dinotasikan (i, j), $i, j \in V$. Node i disebut node initial (awal) dan node j disebut node terminal (akhir).

Dan (i, j) berarah dari node i ke node j di G dan (i, j) incident dengan i dan j atau (i, j) berarah keluar dari i dan menuju ke j . Garis-garis dengan node initial (awal) dan node terminal (akhir) sama disebut garis paralel (*paralel edge*) di G. Garis paralel berarah dari node i ke node j dinotasikan dengan symbol $(i, j)_1, (i, j)_2, \ldots, (i, j)_k, k \geq 2$. Jika garis dengan node awal sama dengan node akhir $(i = j)$ disebut self loop di G.

Contoh : $V = \{1,2,3,4\}$



gambar 7 sebuah digraph $G\,(V,E)$

Dalam *gambar 7* di atas mempunyai sebuah self-loop di node 1 dan node 4 dengan dua garis paralel dari node 2 ke node 3.

Definisi 2.3.9

Derajat keluar (*outgoing degree*) dan derajat masuk (*incoming degree*). Sebuah digraph G, $d^+(i)$ menyatakan jumlah garis-garis di G yang mempunyai node i sebagai node initial (awal) yang disebut derajat keluar. Dan $d^-(i)$ menyatakan jumlah garis-garis di G yang mempunyai node i sebagai node terminal (akhir) disebut derajat masuk node i di G.

Kemudian ada dua nilai yang didefinisikan untuk setiap node di G. Nilai itu ditunjukkan sebagai derajat positif dan derajat negatif sebuah node. Jika $d(i)$ menotasikan nilai garis-garis G yang incident dengan node i, maka berlaku

$$d(i) = d^+(i) + d^-(i)$$

karena setiap garis keluar dari node akan menuju ke node lain. Ini membuktikan bahwa nilai b dari garis-garis G dihubungkan dengan derajat node-nodenya dengan memiliki persamaan

$$b = \sum_i d^+(i) = \sum_i d^-(i) \text{, dimana semua } i \text{ di } G.$$

Sebagai contoh dalam digraph G gambar 8 mempunyai

$$d^+(1) = 2, \quad d^-(1) = 1, \quad d^+(2) = 1, \quad d^-(2) = 2$$

$$d^+(3) = 3, \quad d^-(3) = 2, \quad d^+(4) = 2, \quad d^-(4) = 1$$

$$d^+(5) = 1, \quad d^-(5) = 2, \quad d^+(6) = 1, \quad d^-(6) = 2$$

dan perhitungan b menghasilkan

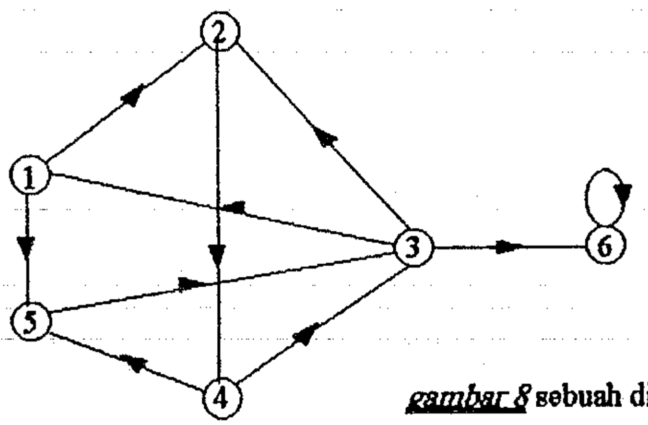
$$b = \sum_{i=1}^{6} d^+(i) = 2+1+3+2+1+1$$

$$= \sum_{i=1}^{6} d^-(i) = 1+2+2+1+2+2 = 10$$

Terbukti memenuhi persamaan $b = \sum_i d^+(i) = \sum_i d^-(i)$.

Barisan derajat $[d^+(i), d^-(i)]$ dari node i (i = 1,2,…,6) ditulis dengan

$$\{d^+(i), d^-(i)\} = \{[2,1][1,2][3,2][2,1][1,2][1,2]\}$$



gambar 8 sebuah digraph $G(V,E)$

Diberikan directed graph $G(V, E)$, dengan setiap node $x \in V$ dihubungkan dengan sebuah nonnegatif integer $h(i)$ dan juga setiap garis $(x,y) \in E$ dihubungkan dengan sebuah nonnegatif integer $g(x,y)$. Fungsi h didefinisikan dari V ke nonnegatif integer-nonnegatif integer, dan fungsi g dari E ke nonnegatif integer- nonnegatif integer. Jika X dan Y subset V, kemudian (X, Y) menotasikan himpunan semua garis dari $x \in X$ ke $y \in Y$; dan fungsi h atau g didefinisikan di V atau E, maka dapat ditulis

$$h(X) = \sum_{x \in X} h(x)$$

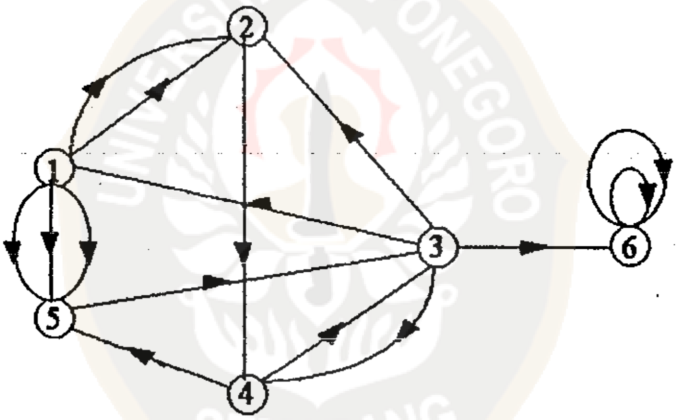
$$g(X, Y) = \sum_{(x,y) \in (X,Y)} g(x, y)$$

Sebuah himpunan yang mengandung satu elemen sebagai elemen tunggal, yaitu misalkan X mengandung satu elemen tunggal x akan dinotasikan (x, Y), $h(x)$, $g(x, Y)$. Dalam hubungan ini (x,y) mempunyai dua arti yang berbeda. Arti yang pertama sebagai satu garis paralel yang dinotasikan $(x, y)_t$, $t = 1, 2, \ldots, k$, $k \geq 2$, di E. Sedang arti lain menotasikan himpunan garis-garis paralel dari x ke y di E. Untuk jumlah elemen sebuah himpunan finite S dinotasikan dengan $|S|$. Kemudian $|X|$ menotasikan jumlah node-node di X. Dan $|(X, Y)|$ menotasikan jumlah garis di (X,Y). Dan $|(x, y)| = k$ menotasikan jumlah garis paralel dari x ke y di E.

Definisi 2.3.10

(p,s)-Digraph. Sebuah (p,s)-digraph adalah sebuah graph berarah $G(V,E)$, dimana $|(x, y)| \leq p$ untuk semua $(x, y) \in E$, $x \neq y$, dan $|(x, x)| \leq s$ untuk semua $x \in V$, dengan p menyatakan paralel dan s menyatakan self loop. Jika p=s maka (p,s)-digraph disebut p-digraph.

Dalam gambar 9 graph berarah G (V,E) adalah (3,2)-digraph, karena jumlah maksimum garis paralel dari satu node ke node lain adalah 3 yaitu $|(1,5)| = 3$, dan jumlah maksimum self loop di node-nodenya adalah 2 yaitu $|(6,6)| = 2$. Dan barisan derajat tiap node untuk (3,2)-digraph di gambar 9 adalah $\{d^+(x), d^-(x)\} = \{[5,1], [1,3], [4,2], [2,2], [1,4], [2,3]\}$

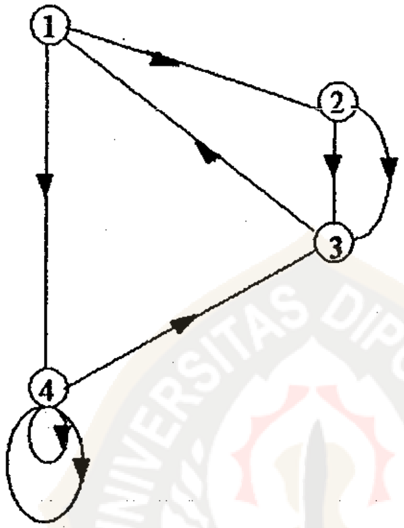


gambar 9 sebuah (3,2)-digraph G(V,E)

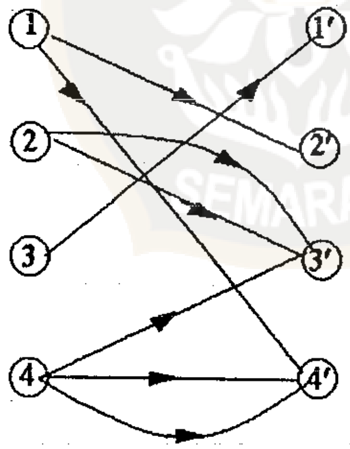
Definisi 2.3.11

Directed graph dan directed graph bipartite. Penyajian digraph bipartite B ekivalen dengan penyajian digraph G dengan V himpunan nodenya. Untuk himpunan V di G dibentuk replika yaitu V' dengan elemen-elemen didalamnya berhubungan dengan elemen di V. Garis (i, j'), i di V dan j' di V' adalah garis di B jika hanya jika garis (i, j) di G exsis (ada), dengan setiap garis paralel dipandang sebagai garis sendiri. Dengan kata lain dalam G dan B mempunyai $\alpha(i, j) = \alpha(i, j')$.

Sebagai contoh *gambar 10b* adalah digraph bipartite B yang didapat dari digraph G di *gambar 10a* .



gambar 10a sebuah digraph $G(V,E)$



gambar 10b digraph bipartite

2.4. PERLUASAN PERSEDIAAN-PERMINTAAN

THEOREMA 2.4.1

Jaringan $G(V,E,c,f)$ dengan himpunan V dipartisi menjadi tiga himpunan bagian yang tidak saling berhubungan S, R, dan T. Setiap $x \in S$ berhubungan dengan dua fungsi real nonnegatif $a(x)$ dan $a'(x)$, dimana $a(x) \leq a'(x)$. Dan untuk setiap berhubungan dengan dua fungsi real nonnegatif $b(x)$ dan $b'(x)$, dimana $b(x) \leq b'(x)$, sehingga

$$a(x) \leq f(x, V) - f(V, x) \leq a'(x), \qquad x \in S \qquad (2.1)$$

$$f(x, V) - f(V, x) = 0, \qquad x \in R \qquad (2.2)$$

$$b(x) \leq f(V, x) - f(x, V) \leq b'(x), \qquad x \in T \qquad (2.3)$$

$$c(x, y) \geq f(x, y) \geq 0, \qquad (x, y) \in E \qquad (2.4)$$

adalah fisibel jika dan hanya jika

$$c(X, \overline{X}) \geq b(T \cap \overline{X}) - a'(S \cap \overline{X}) \qquad (2.5)$$

$$c(X, \overline{X}) \geq a(S \cap X) - b'(T \cap X) \qquad (2.6)$$

berlaku untuk setiap $X \subseteq V$, di mana $\overline{X} = V - X$.

Bukti :

Pertama dibentuk perluasan jaringan $G'(V', E', c', f')$ seperti pada ***gambar II*** dengan menghubungkan node baru s,t,u dan v dan garis berarah (s,S), (u,S), (T,t), (T,v), (u,t) (s,v) dan (t,s) dengan kapasitas yang didefinisikan sebagai :

$$c'(s, x) = a'(x) - a(x), \qquad x \in S \qquad (2.7a)$$

$$c'(u, x) = a(x), \qquad x \in S \qquad (2.7b)$$

$$c'(x, t) = b'(x) - b(x), \qquad x \in T \qquad (2.7c)$$

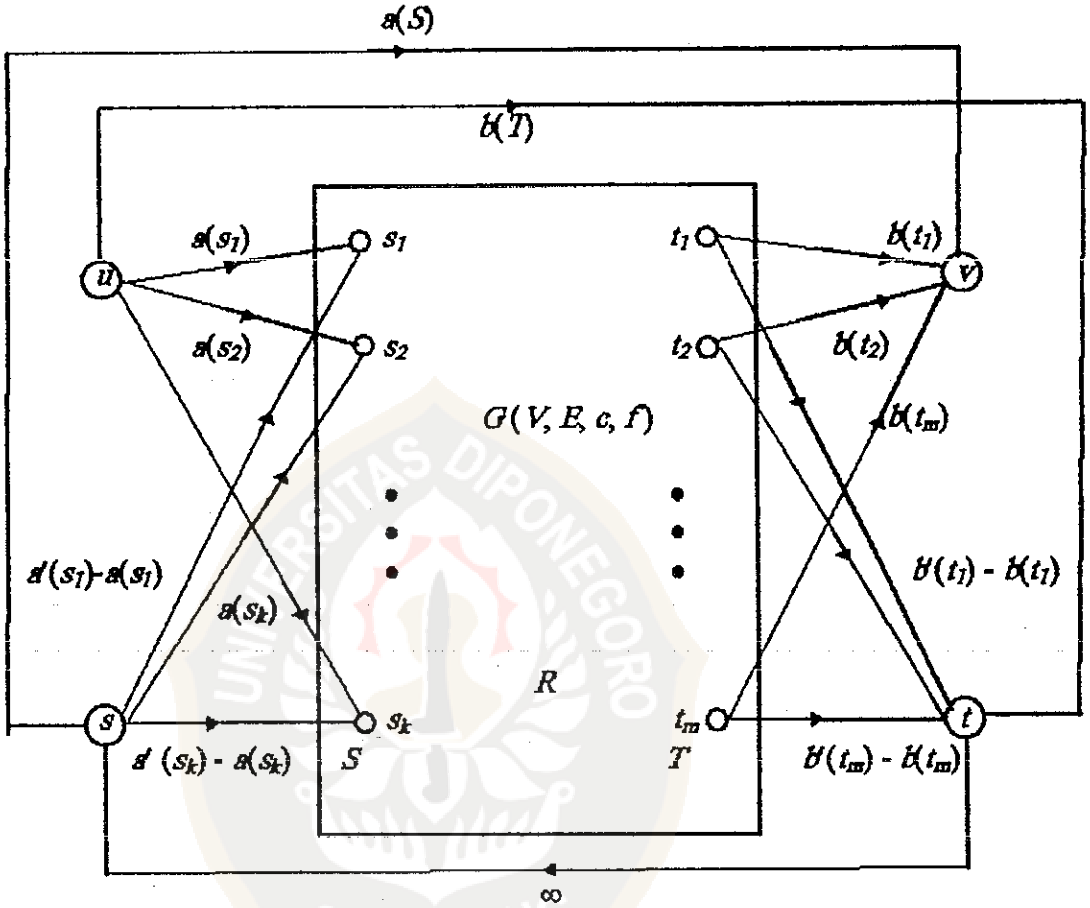
$$c'(x, v) = b(x), \qquad x \in T \qquad (2.7d)$$

$$c'(u, t) = b(T) \qquad (2.7e)$$

$$c'(s, v) = a(S) \qquad (2.7f)$$

$$c'(t, s) = \infty \qquad (2.7g)$$

$$c'(x,y) = c(x,y), \qquad (x,y) \in E \qquad (2.7h)$$



Gambar 11 Suatu jaringan $G'(V',E',c',f')$ yang diperoleh dari perluasan jaringan $G(V,E,c,f)$ yang menghubungkan node-node s,t,u, dan v dengan arah panah seperti yang ditunjukkan.

Dan dapat disimpulkan bahwa kondisi aturan (2.1) - (2.4) adalah fisibel jika dan hanya jika nilai dari aliran maksimal dari u ke v dalam G' adalah $a(S) + b(T)$. Untuk menunjukkan hal ini , misalkan f adalah alur yang fisibel dalam G.

Perluas f dalam G ke f' dalam G' dengan mendefinisikan :

$$f'(s,x) = f(x,V) - f(V,x) - a(x), \qquad x \in S \qquad (2.8a)$$

$$f'(u,x) = a(x), \qquad x \in S \qquad (2.8b)$$

$$f'(x,t) = f(V,x) - f(x,V) - b(x), \qquad x \in T \qquad (2.8c)$$

$$f'(x, v) = b(x), \qquad x \in T \tag{2.8d}$$

$$f'(u, t) = b(T) \tag{2.8e}$$

$$f'(s, v) = a(S) \tag{2.8f}$$

$$f'(t,s) = f(S, V) - f(V, S) \tag{2.8g}$$

$$f'(x, y) = f(x, y), \qquad (x\,y) \in E \tag{2.8h}$$

Kemudian dapat dibuktikan apakah f', yang didefinisikan di atas adalah alur dari u ke v dalam G' yang bernilai $a(S) + b(T)$.

Akibatnya, jika f' adalah aliran dari u ke v dalam G' yang bernilai $a(S) + b(T)$ maka

$$f'(u, x) = a(x), \qquad x \in S \tag{2.9a}$$

$$f'(x, v) = b(x), \qquad x \in T \tag{2.9b}$$

Misal f menjadi f' dalam E. Maka untuk $x \in S$ didapat

$$f'(u, x) + f'(s, x) = f(x, V) - f(V, x) \tag{2.10}$$

Karena dari (2.7a)

$$a'(x) - a(x) \geq f'(s, x) \geq 0 \tag{2.11}$$

Persamaan (2.10) dapat ditulis kembali sebagai :

$$a'(x) \geq f(x, V) - f(V, x) \geq a(x) \tag{2.12}$$

dengan melihat (2.9a) . Selanjutnya, dapat ditunjukkan bahwa

$$b'(x) \geq f(V, x) - f(x, V) \geq b(x) \qquad x \in T \tag{2.13}$$

Pembuktian secara lengkap dari pernyataan yang ditunjukkan oleh aturan (2. 1) - (2.4) adalah benar jika dan hanya jika nilai dari aliran maksimal dari u ke v

dalam G' adalah $s(S) + b(T)$. Sehingga untuk membuktikan teorema di atas, dengan menunjukkan bahwa kondisi (2.5) dan (2.6) adalah perlu dan cukup untuk keberadaan aliran f' dari u ke v dalam G' yang memiliki nilai $s(S) + b(T)$.

Akan ditunjukkan bahwa setiap potongan u-v dalam $G'(V', E', c', f')$ memiliki nilai kapasitas paling kecil $s(S) + b(T)$, sehingga permasalahan menjadi fisibel atau dapat dipecahkan.

Akan diambil 4 kasus untuk membedakannya, misal $(X', \overline{X}')$ menjadi suatu potongan u-v didalam G'.

KASUS 1

$s \in X'$ dan $t \in \overline{X}'$. Partisi dari subset-subset X' dan $\overline{X}'$ di V' ke dalam

$X' = \{u, s\} \cup X, \qquad \overline{X}' = \{v, t\} \cup \overline{X}$

sehingga $\overline{X} = V - X$ .Maka

$$\begin{aligned} c'(X', \overline{X}') &= c'(u,t) + c'(u, \overline{X}) + c'(s,v) + c'(s, \overline{X}) \\ &\quad + c'(X, v) + c'(X, t) + c'(X, \overline{X}) \\ &= b(t) + s(S \cap \overline{X}) + s(S) + s'(S \cap \overline{X}) - s(S \cap \overline{X}) \\ &\quad + b(T \cap X) + b'(T \cap X) - b(T \cap X) + c(X, \overline{X}) \end{aligned}$$

Karena $s'(S \cap \overline{X}) \geq s(S \cap \overline{X})$ dan $b'(T \cap X) \geq b(T \cap X)$, ini menunjukkan bahwa

$$c'(X', \overline{X}') \geq s(S) + b(T)$$

KASUS 2

$s \in \overline{X}'$ dan $t \in X'$.

Pada kasus ini $c'(X', \overline{X}')$ adalah infinite dan tidak ada kondisi yang memenuhi.

KASUS 3

$s, t \in X'$ .Partisi dari X' dan $\overline{X}'$ ke dalam

$X' = \{s, t, u\} \cup X$, $\qquad \overline{X}' = \{v\} \cup \overline{X}$

maka didapat

$$\begin{aligned} c'(X', \overline{X}') &= c'(s, v) + c'(s, \overline{X}) + c'(u, \overline{X}) + c'(X, v) + c'(X, \overline{X}) \\ &= a(S) + a'(S \cap \overline{X}) - a(S \cap \overline{X}) + a(S \cap \overline{X}) + \\ &\quad + b(T \cap X) + c(X, \overline{X}) \end{aligned}$$

ini menunjukkan bahwa

$$c'(X', \overline{X}') \geq a(S) + b(T)$$

jika dan hanya jika

$$c(X, \overline{X}) \geq b(T \cap X) - a'(S \cap \overline{X})$$

KASUS 4

$s, t \in \overline{X}'$ .Partisi X' dan $\overline{X}'$ ke dalam

$X' = \{u\} \cup X$, $\qquad \overline{X}' = \{s, t, v\} \cup \overline{X}$

kemudian didapat

$$\begin{aligned} c'(X', \overline{X}') &= c'(u, t) + c'(u, \overline{X}) + c'(X, t) + c'(X, v) + c'(X, \overline{X}) \\ &= b(T) + a(S \cap \overline{X}) + b'(T \cap X) - b(T \cap X) + b(T \cap X) + c(X, \overline{X}) \\ &= b(T) + a(S) - a(S \cap X) + b'(T \cap X) + c(X, \overline{X}) \end{aligned}$$

ini menunjukkan bahwa

$$c'(X', \overline{X}') \geq a(S) + b(T)$$

jika dan hanya jika

$$c(X, \overline{X}) \geq a(S \cap X) - b'(T \cap X)$$

Telah ditunjukkan bahwa (2.1)-(2.4) adalah fisibel jika hanya jika nilai aliran maksimal dari u ke v dalam G' adalah $a(S)+b(T)$, dan aliran dalam G' exis (ada) jika hanya jika kondisi (2.5) dan (2.6) dipenuhi untuk setiap subset dari himpunan node di G. Dengan demikian bukti theorema telah lengkap.