BAB II

VEKTOR DAN MATRIK

Dalam pembahasan Analisa Korespondensi Berganda perlu dikemukakan beberapa materi tentang vektor dan matrik, yang berguna untuk mempermudah pemahaman pada tulisan ini. Adapun penyajiannya sebagai berikut :

2.1. Vektor

Suatu vektor berdimensi –n atas R diartikan sebagai suatu pasangan terurut n elemen-elemen x_i dari R^n. Ditulis $\bar{X} = (x_1 , x_2 , \dots , x_n)$. Kesamaan dari dua buah vektor sembarang atas R^n, misal vektor-vektor $\bar{X} = (x_1 , x_2 , \dots x_n)$ dan $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots y_n)$, dipenuhi apabila elemen-elemen yang bersesuaian dari $\bar{X}$ dan $\bar{Y}$ adalah sama, yaitu : $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$, … , $x_n = y_n$. Sedang penjumlahan dua vektor $\bar{X} + \bar{Y}$ didefinisikan oleh $\bar{X} + \bar{Y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots , x_n + y_n)$.

Bila diberikan α sebagai sembarang skalar bilangan riil, maka perkalian skalar $\alpha\bar{X}$ merupakan perkalian skalar dengan elemen-elemen didalamnya, didefinisikan oleh $\alpha\bar{X} = (\alpha x_1 , \alpha x_2 , \dots , \alpha x_n)$. Hasil kali vektor dalam euclid didefinisikan sebagai berikut : $\bar{X} \bullet \bar{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

Norma vektor $\bar{X} = (x_1 , x_2 , \dots x_n)$ pada R^n adalah suatu fungsi yang dinotasikan $\|\cdot\|$ dari R^n menuju R , didefinisikan sebagai $\left\|\bar{x}\right\| = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dengan memenuhi ketentuan-ketentuan sebagai berikut :

i. $\left\| \bar{x} \right\| > 0$, untuk semua $\bar{x} \in R^n$

ii. $\left\| \bar{x} \right\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = (0, 0, \ldots, 0)$

iii. $\left\| \alpha \bar{x} \right\| = |\alpha| \left\| \bar{x} \right\|$, untuk setiap $\alpha \in R^n$ dan $\bar{x} \in R^n$

iv. $\left\| \bar{x} + \bar{y} \right\| \leq \left\| \bar{x} \right\| + \left\| \bar{y} \right\|$, untuk setiap $\bar{x}$, $\bar{y} \in R^n$

Jika $\bar{X} = (x_1 , x_2 , \ldots x_n)$ dan $\bar{Y} = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ merupakan vektor-vektor dalam R^n , maka jarak antara dua vektor $\bar{X}$ dan $\bar{Y}$ dinyatakan dengan $d(\bar{X}, \bar{Y})$ dan didefinisikan oleh : $d(\bar{X}, \bar{Y}) = \left\| \bar{x} - \bar{y} \right\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}$

Himpunan vektor $(\bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \ldots , \bar{x}_n)$ disebut ortogonal jika $\left(\bar{x}_i\right)^T \bar{x}_j = 0$ untuk setiap $i \neq j$ dan jika berlaku pula $\left(\bar{x}_i\right)^T \bar{x}_j = 1$ untuk setiap i = 1, 2, … n maka himpunan tersebut ortonormal.

2.2. Matrik

Sebuah matrik merupakan rangkaian berbentuk persegipanjang dari bilangan-bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matrik. Ditulis $A_{nxp} = (a_{ij})$, yaitu matrik A berukuran nxp yang elemen-elemennya a_{ij} ,dimana indek i men-yatakan baris ke-i dan indek j menyatakan kolom ke-j , dengan i = 1, 2, …, n dan j = 1, 2, …, p.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Jika A dan B dua buah matrik yang ukurannya sama, maka jumlah A+B merupakan matrik yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matrik tersebut. Dijelaskan dalam contoh berikut C = A + B dimana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, dengan $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, p$

Apabila diberikan suatu matrik A_{mxn} dan suatu skalar α, maka hasil kali skalar dari α dan A dinotasikan αA merupakan matrik berorde mxn yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A dengan α atau $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$, dengan $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, p$. Sedang hasil kali matrik A dan B dapat dilakukan apabila A adalah matrik berorde nxr dan B adalah matrik berorde rxp dan dinotasikan dengan AB= C adalah matrik berorde nxp dimana entri-entri c_{ij} diberikan oleh :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}\, b_{kj}, \text{ untuk setiap } i = 1, 2, \ldots, n \text{ dan } j = 1, 2, \ldots, p$$

A matrik bujursangkar orde n merupakan suatu matrik dengan n baris dan n kolom dan sel-sel $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ berada pada diagonal utama dari A. Matrik diagonal diartikan sebagai matrik bujursangkar yang semua elemen diluar diagonal utama adalah nol. Dengan kata lain : $a_{ij} = 0$, untuk $i \neq j$. Penjumlahan elemen-elemen pada diagonal utama matrik bujursangkar disebut Trace, sehingga :

trace dari $A = (a_{ij})$ dinotasikan dengan $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$, dimana $i = j = 1, 2, \ldots, n$

Suatu matrik identitas dinotasikan dengan I merupakan matrik diagonal yang elemen-elemen diagonal utama bernilai satu dan semua elemen bebas diagonalnya nol.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$I = \begin{cases} i_{ij} = 0 \ , \ untuk \ i \neq j \\ i_{ij} = 1 \ , \ untuk \ i = j \end{cases}$$

Dari matrik bujursangkar non singular A, dapat dicari matrik B sehingga berlaku AB = BA = I, dan A dikatakan mempunyai matrik invers, yang dinotasikan dengan A^{-1} yang dapat diartikan sebagai suatu matrik bujursangkar sedemikian sehingga berlaku $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Transpose matrik A = $\lfloor a_{ij} \rfloor_{nxm}$, dinotasikan A^T yaitu matrik yang didapatkan dengan menukar elemen-elemen baris dan kolom dari matrik A. $A^T = \lfloor a_{ij} \rfloor_{nxm}$ dimana $a_{ij}^T = a_{ji}$. Dari sifat transpose didapatkan suatu matrik simetris A_{nxm} , jika $A = A^T$ dimana $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua i dan j.

A dan B matrik bujursangkar dinamakan equivalen jika terdapat S matrik non singular sedemikian sehingga $B = S^{-1}AS$. Sedang matrik non singular diartikan sebagai matrik yang nilai determinannya $\neq 0$.

Pada suatu matrik A bujursangkar berordo nxn didapatkan $\bar{x}$ suatu vektor tidak nol dari R^n yang dinamakan vektor karakteristik dari A. Bila $A\bar{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\bar{x}$ yaitu $A\bar{x} = \lambda\ \bar{x}$, untuk suatu skalar λ. Disini skalar λ dinamakan nilai karakteristik dari matrik A dan $\bar{x}$ dikatakan vektor karakteristik matrik yang berukuran nxn, maka $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, dapat ditulis sebagai:

$A\bar{x} = \lambda I\bar{x}$ Atau equivalen dengan $(\lambda I - A)\ \bar{x} = 0$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

yang mengakibatkan matrik $(\lambda I - A)$ adalah singular jika $\bar{x}$ adalah vektor karakteristik dari A, berarti : det $(\lambda I - A) = 0$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^N + c_1 \lambda^{N-1} + c_2 \lambda^{N-2} + \ldots + c_N = 0$$

persamaan $\lambda^N + c_1 \lambda^{N-1} + c_2 \lambda^{N-2} + \ldots + c_N = 0$ dinamakan persamaan karakteristik dari A. Dari persamaan karakteristik tersebut dapat difaktorkan menjadi $(\lambda - k_1)(\lambda - k_2)(\lambda - \ldots.) \ldots. (\lambda - k_n) = 0$. Akan diperoleh $\lambda_1 = k_1$, $\lambda_2 = k_2$, …. $\lambda_n = k_n$, dengan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots. \geq \lambda_n$. Diberikan contoh sebagai berikut :

Diberikan matrik bujursangkar berukuran 2x2, $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ didapatkan nilai karakteristik λ, yaitu : dengan det $(\lambda I - A) = 0$,

dari $\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$ dan

maka det $(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = 0$, diperoleh persamaan eigen $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, kemudian difaktorkan $(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$ sehingga nilai-nilai eigen dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ adalah $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 1$, dengan $\lambda_1 \geq \lambda_2$

Vektor $\bar{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 2$, ditunjukkan $A\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2.\bar{x}$.

Dan Vektor $\bar{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 1$, ditunjukkan $A\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1.\bar{x}$.

Suatu matrik bujursangkar P yang mempunyai sifat $P^{-1} = P^T$ dikatakan matrik ortogonal. Berarti pula $PP^T = P^TP = I$, atau dengan kata lain A matrik bujursangkar dinamakan dapat didiagonalisasi secara ortogonal jika terdapat matrik P ortogonal

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

sehingga P^{-1} AP = P^{T}AP diagonal, sedang disini dikatakan matrik P mendiagonalisasi matrik A.

Himpunan vektor ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ... , $\bar{x}_n$) disebut ortogonal jika $\left(\overline{x_i}\right)^T \overline{x_j}$ = 0 untuk setiap i ≠ j dan jika berlaku pula $\left(\overline{x_i}\right)^T \overline{x_j}$ = 1 untuk setiap i = 1, 2, ... n maka himpunan tersebut ortonormal.

Bentuk kwadratik dari variabel x_1 , x_2 , ... , x_n dapat ditulis sebagai

$$X^TAX = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n] A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \ldots + a_{nn} x_n^2 + \sum a_{ij} x_i x_j$$

dengan A adalah matrik bujursangkar nxn.

Bentuk kwadratik X^TAX disebut definit positif jika $X^TAX > 0$ dan bentuk kwadratik X^TAX disebut semidefinit positif jika $X^TAX \geq 0$, untuk setiap A ≠ 0, sedangkan matrik simetris A disebut matrik positif jika X^TAX adalah bentuk kuadratik definit positif.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)