BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1 Ruang Vektor dan Vektor

Suatu model matematika dari sebuah sistem dapat memuat n variabel $x_1, x_2, ..., x_n$ yang merupakan subset dari himpunan bilangan riil R. Kumpulan (*collection*) dari n bilangan riil yang disusun dalam urutan $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ atau dapat ditulis dengan simbol $\mathbf{X}$ dinamakan tuple-n terurut dan himpunan yang terdiri dari tuple-n dituliskan dengan R^n. Dalam bentuk matriks dituliskan dengan

matriks kolom $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Definisi 2.1

Misal V adalah himpunan sedemikian sehingga jika $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in V$ dan $a, b \in R$ memenuhi aksioma – aksioma:

- Penjumlahan:

i . $\mathbf{X} + \mathbf{Y} \in V$

ii. $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{X}$

iii. $(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \mathbf{Z} = \mathbf{X} + (\mathbf{Y} + \mathbf{Z})$

iv. terdapat $\mathbf{0} \in V$; $\mathbf{X} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{X} = \mathbf{X}$, untuk setiap $\mathbf{X} \in V$

v. terdapat $-\mathbf{X} \in V$ sedemikian sehingga $\mathbf{X} + (-\mathbf{X}) = \mathbf{0}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

- Perkalian:

vi. $a\,\mathbf{X} \in V$

vii. $a\,(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = a\,\mathbf{X} + a\,\mathbf{Y}$

viii. $(a+b)\,\mathbf{X} = a\,\mathbf{X} + b\,\mathbf{X}$

ix. $(ab)\,\mathbf{X} = a\,(b\,\mathbf{X})$

x. $1\mathbf{X} = \mathbf{X}$

maka V disebut ruang vektor atas R dan elemen – elemennya disebut vektor.

Definisi 2.2

Sebuah vektor $\mathbf{X}$ disebut kombinasi linier dari vektor – vektor $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_m$ jika vektor tersebut dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\mathbf{X} = k_1\,\mathbf{X}_1 + k_2\,\mathbf{X}_2 + \ldots + k_m\,\mathbf{X}_m$$

dimana $k_1, k_2, \ldots, k_m$ skalar yang tidak nol.

Contoh 1 :

Tunjukkan bahwa vektor $\mathbf{X} = (9,2,7)$ merupakan kombinasi linier dari vektor $\mathbf{X}_1 = (1,2,-1), \mathbf{X}_2 = (6,4,2)$, serta vektor $\mathbf{X}_3 = (3,5,6)$ bukan kombinasi linier dari $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$

Penyelesaian :

Agar $\mathbf{X}$ merupakan kombinasi linier dari $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ maka ada k_1, k_2 sehingga:

$$\mathbf{X} = k_1\mathbf{X}_1 + k_2\mathbf{X}_2$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\begin{bmatrix}9\\2\\7\end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}6\\4\\2\end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 9 \\ 2k_1 + 4k_2 &= 2 \\ -k_1 + 2k_2 &= 7 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan ini diperoleh $k_1 = -3, k_2 = 2$. Jadi

$$\mathbf{X} = -3\mathbf{X}_1 + 2\mathbf{X}_2$$

Demikian juga agar $\mathbf{X}_3$ merupakan kombimasi linier dari $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ maka harus ada k_1, k_2 sehingga $\mathbf{X}_3 = k_1\mathbf{X}_1 + k_2\mathbf{X}_2$ atau

$$\begin{bmatrix}3\\5\\6\end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}6\\4\\2\end{bmatrix} \text{ atau } \begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 3 \\ 2k_1 + 4k_2 &= 5 \\ -k_1 + 2k_2 &= 6 \end{aligned}$$

Sistem persamaan ini tidak mempunyai penyelesaian sehingga tidak ada skalar k_1, k_2 yang memenuhi. Jadi $\mathbf{X}_3$ bukan kombinasi linier dari $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$.

Teorema 2.1

Jika **A** matriks bujur sangkar *nxn* yang mempunyai invers maka untuk setiap matriks **B** yang berordo *nx1*, sistem persamaan **AX= B** mempunyai penyelesaian yang tunggal yaitu $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

Bukti **:**

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

Karena $\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{B} = \mathbf{B}$ maka $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ merupakan penyelesaian. Untuk membuktikan bahwa penyelesaiannya tunggal, misal $\mathbf{X}_1$ adalah sebarang penyelesaian dan selanjutnya dibuktikan $\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Jika $\mathbf{X}_1$ merupakan penyelesaian maka $\mathbf{AX}_1 = \mathbf{B}$. Dengan mengalikan kedua ruas dengan $\mathbf{A}^{-1}$ diperoleh $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}_1) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ atau $\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. *(Terbukti)*

Definisi 2.3

Jika $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_m\}$ adalah himpunan vektor pada ruang V dan jika sebarang vektor dari V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_m$ maka dikatakan vektor – vektor tersebut merentang V

Contoh 2:

Diberikan vektor – vektor dalam R^3 yaitu $\mathbf{X}_1 = (1,2,1), \mathbf{X}_2 = (2,9,0)$ dan $\mathbf{X}_3 = (3,3,4)$. Untuk menunjukkan bahwa $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ merentang R^3 ambil sebarang vektor $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$ sebagai kombinasi linier dari $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$.

$$\mathbf{X} = k_1\mathbf{X}_1 + k_2\mathbf{X}_2 + k_3\mathbf{X}_3$$

atau

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= x_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= x_2 \\ k_1 \quad\quad + 4k_2 &= x_3 \end{aligned}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

Dalam bentuk matriks dapat dituliskan dengan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Matriks koefisiennya $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

Karena matriks koefisien dari sistem persamaan di atas mempunyai invers maka menurut teorema 2.1 untuk pemilihan sebarang vektor $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$ sistem persamaan di atas mempunyai penyelesaian . Jadi $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ merentang R^3.

Definisi 2.4

Himpunan vektor $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_m\}$ subset R^n dikatakan bebas linier jika persamaan vektor :

$$k_1 \mathbf{X}_1 + k_2 \mathbf{X}_2 + \ldots + k_m \mathbf{X}_m = \mathbf{0} \qquad (2.1)$$

hanya dipenuhi oleh $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$ dan dikatakan tak bebas linier jika ada konstanta $k_i, i = 1,2,\ldots,n$ yang tidak semuanya nol yang memenuhi (2.1).

Contoh 3 :

Ambil vektor – vektor $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$ pada contoh 2. Dari contoh 2 jika diambil $\mathbf{X} = (0,0,0)$ akan diperoleh sistem persaman linier homogen . Karena matriks koefisien dari sistem tersebut mempunyai invers maka menggunakan teorema 2.1 akan diperoleh penyelesaian tunggal yaitu $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, sehingga $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ bebas linier.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Selanjutnya tinjau vektor $\mathbf{X}_4 = (2,-3,1), \mathbf{X}_5 = (4,1,1), \mathbf{X}_6 = (0,-7,1)$

Persamaan vektornya yaitu:

$$\mathbf{X} = k_1\mathbf{X}_4 + k_2\mathbf{X}_5 + k_3\mathbf{X}_6$$

$$k_1\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix}0\\-7\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2k_1 + 4k_2 \quad\quad &= 0 \\ -3k_1 + k_2 - 7k_3 &= 0 \\ k_1 \quad + k_2 \quad + k_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan ini diperoleh:

$$k_1 = -2t, k_2 = t, k_3 = t, t \in R$$

jika $t \neq 0$ misal t =1 maka diperoleh $k_1 = -2, k_2 = 1, k_3 = 1$

Jadi ada $k_i, i = 1,2,3$ yang tidak nol dan memenuhi persamaan vektor. Oleh karena itu $\mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5, \mathbf{X}_6$ bergantung linier.

Definisi 2.5

Jika V adalah sebarang ruang vektor dan $W = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_m\}$ merupakan himpunan berhingga vektor – vektor dalam V maka W dikatakan basis untuk V jika :

i. W bebas linier

ii. W merentang V

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

***Contoh 4*:**

Ambil vektor – vektor $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ pada contoh 2. Dari contoh 3 telah dibuktikan bahwa $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ bebas linier dan dari contoh 2 telah ditunjukkan bahwa $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ merentang R^3 sehingga $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ adalah basis untuk R^3

Definisi 2.6

Hasil kali dalam (*inner product*) $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$ dari dua vektor $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in R^n$ didefinisikan sebagai $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ dan memenuhi :

i. $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle$

ii. $\langle \mathbf{X} + \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle + \langle \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \rangle$; $\mathbf{Z} \in R^n$

iii. $\langle a\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = a\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$; $a \in R$

iv. $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle > 0$, jika $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$; $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = 0$, jika $\mathbf{X} = \mathbf{0}$

Definisi 2.7

Misal R^n adalah himpunan tuple-*n* terurut dari bilangan riil. Untuk setiap pasangan tuple-*n* $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in R^n$, misalkan didefinisikan:

i.jumlahan: $\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\mathbf{Y}+\mathbf{X}=(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) \in R^n$

ii.perkalian: $a\mathbf{X}=(ax_1, ax_2, \cdots, ax_n) \in R^n, a \in R$

iii.inner product: $\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T\mathbf{X} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \in R$

selanjutnya tuple-*n* disebut vektor dan R^n disebut ruang Euclidis

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

iv. terdapat paling sedikit satu himpunan n vektor yang bebas linier dalam R^n, sehingga R^n disebut ruang Euclidis berdimensi n

Definisi 2.8

Misal diberikan vektor – vektor $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in R^n$ .Suatu bilangan riil $\|\mathbf{X}\|$ merupakan norm jika memenuhi :

i. $\|\mathbf{X}\| \geq 0$, $\|\mathbf{X}\| = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{X} = \mathbf{0}$

ii. $\|a\mathbf{X}\| = |a|\|\mathbf{X}\|$ untuk setiap $a \in R$ dan $\mathbf{X} \in R^n$

iii. $\|\mathbf{X}+\mathbf{Y}\| \leq \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{Y}\|$ untuk setiap $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in R^n$

Definisi 2.9

Jika V sebuah ruang hasil kali dalam, maka norm Euclidis dari vektor $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ dinyatakan dengan $\|\mathbf{X}\|$, didefinisikan sebagai:

$$\|\mathbf{X}\| = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle^{1/2} = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Contoh 5 :

Diberikan vektor $\mathbf{X} = (1,2,1)$ maka norm Euclidis dari $\mathbf{X}$ yaitu:

$$\|\mathbf{X}\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$$

Teorema 2.2 (Ketaksamaan Cauchy-Schwarz)

Jika $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ vektor dalam R^n maka $|\mathbf{X}^T\mathbf{Y}| \leq \|\mathbf{X}\|\|\mathbf{Y}\|$

Bukti :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

Jika $\mathbf{Y} \neq 0$ dan $\mathbf{X}$ bukan kelipatan skalar dari $\mathbf{Y}$ maka $\mathbf{X} + t\mathbf{Y} \neq 0$, untuk setiap $t \in R$ sehingga

$$\|\mathbf{X} + t\mathbf{Y}\|^2 > 0 \text{ ;untuk setiap } t \in R$$

karena $\|\mathbf{X} + t\mathbf{Y}\|^2 = \langle \mathbf{X} + t\mathbf{Y}, \mathbf{X} + t\mathbf{Y} \rangle > 0$ untuk setiap $t \in R$

atau $\|\mathbf{X}\|^2 + 2t|\mathbf{X}^T\mathbf{Y}| + t^2\|\mathbf{Y}\|^2 > 0$ (2.2)

Dengan menganggap (2.2) sebagai bentuk kuadrat dalam variabel t maka diskriminanya selalu negatif yaitu:

$$4|\mathbf{X}^T\mathbf{Y}|^2 - 4\|\mathbf{X}\|^2\|\mathbf{Y}\|^2 < 0 \quad (2.3)$$

atau (2.3) dapat ditulis :

$$|\mathbf{X}^T\mathbf{Y}|^2 < \|\mathbf{X}\|^2\|Y\|^2 \quad (2.4)$$

dengan mengambil akar positif kedua ruas (2.4) diperoleh:

$$|\mathbf{X}^T\mathbf{Y}| < \|\mathbf{X}\|\|\mathbf{Y}\| \quad (2.5)$$

Secara analog jika $\mathbf{Y}$ bukan kelipatan skalar dari $\mathbf{X}$ maka diperoleh :

$$|\mathbf{X}^T\mathbf{Y}| < \|\mathbf{X}\|\|\mathbf{Y}\| \quad (2.6)$$

Selanjutnya akan ditinjau untuk $\mathbf{X}$ sebagai kelipatan skalar dari $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X} = c\mathbf{Y}$ maka

$$|\mathbf{X}^T\mathbf{Y}| = |c\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}| = |c(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})|$$

$$= |c|\|\mathbf{Y}\|^2$$

$$= \|c\mathbf{Y}\|\|\mathbf{Y}\| = \|\mathbf{X}\|\|\mathbf{Y}\| \quad (2.7)$$

Jadi dari (2.5),(2.6) dan (2.7) diperoleh $|\mathbf{X}^T\mathbf{Y}| \leq \|\mathbf{X}\|\|\mathbf{Y}\|$. *(Terbukti)*

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh 6 :

Pandang vektor $\mathbf{X}_1 = (1,2,-1)$ dan $\mathbf{X}_2 = (6,4,2)$. Dengan definisi (2.8) dan definisi (2.9) maka :

$$\left|\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2\right| = (1)(6) + (2)(4) + (-1)(2) = 12,$$

$$\|\mathbf{X}_1\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}, \|\mathbf{X}_2\| = \sqrt{(6)^2 + (4)^2 + (2)^2} = \sqrt{56}$$

sehingga $\left|\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2\right| = 12 < \sqrt{336} = \|\mathbf{X}_1\| \|\mathbf{X}_2\|$.

2.2 Bentuk Kuadratik

Definisi 2.10

Suatu polinomial homogen berderajat dua :

$$f(\mathbf{X}) = c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + \cdots + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots ; c_{ij} \in R; i, j = 1,2,\cdots,n$$

disebut bentuk kuadratik dalam n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Jika c_{ii} disubstitusi dengan a_{ii} dan c_{ij} dengan a_{ij} dimana $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2} c_{ij}$ maka bentuk kuadratik dapat ditulis dalam bentuk

$$f(\mathbf{X}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \mathbf{X}^T \mathbf{A}\mathbf{X}$$

dimana A adalah matriks simetris order n dan X vektor kolom

Contoh 7:

Akan diubah bentuk kuadratik

$$f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 \qquad (2.8)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

menjadi bentuk matriks .

Penyelesaian:

Dari bentuk kuadratik (2.8) maka :

$$a_{11}=1, a_{22}=1, a_{33}=1, a_{21}=a_{12}=\tfrac{1}{2}c_{12}=-1, a_{13}=a_{31}=\tfrac{1}{2}c_{13}=2,$$

$$a_{23}=a_{32}=\tfrac{1}{2}c_{23}=-3$$

dan matriksnya

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.11

Suatu bentuk kuadratik $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ dikatakan semidefinit positif jika $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\geq 0$ untuk semua $\mathbf{X}$ dan ada $\mathbf{X}\neq\mathbf{0}$ sehingga $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}=0$ dan dikatakan definit positif jika $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}>0$ untuk semua $\mathbf{X}$ dimana $\mathbf{X}\neq\mathbf{0}$. Suatu bentuk kuadratik dikatakan semidefinit negatif jika $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\leq 0$ dan dikatakan definit negatif jika $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}<0$ untuk semua $\mathbf{X}$ dengan $\mathbf{X}\neq\mathbf{0}$. Bentuk kuadratik yang tidak definit positif (semidefinit positif) atau definit negatif (semidefinit negatif) dikatakan indefinit.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh 8 :

Bentuk kuadratik $f(\mathbf{X}) = (x_1 - x_2)^2 + 4x_3^2$ merupakan bentuk kuadratik yang semidefinit positif, karena selalu bernilai positif untuk $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ dan ada $x_1 = x_2 \neq 0, x_3 = 0$ sehingga $f(\mathbf{X})$ bernilai nol .

Bentuk kuadratik $f(\mathbf{X}) = -(x_1 - x_2)^2 - 2x_3^2$ merupakan bentuk kuadratik yang semidefinit negatif, karena selalu bernilai negatif untuk $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ dan ada $x_1 = x_2 \neq 0, x_3 = 0$ sehingga $f(\mathbf{X})$ bernilai nol .

Bentuk kuadratik $f(\mathbf{X}) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2$ merupakan bentuk kuadratik yang definit negatif karena selalu bernilai negatif untuk $x_1, x_2, x_3 \neq 0$

Bentuk kuadratik $f(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ merupakan bentuk kuadratik yang definit positif karena selalu bernilai positif untuk $x_1, x_2 \neq 0$

Bentuk kuadratik $f(\mathbf{X}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$ merupakan bentuk kuadratik yang indefinit karena dapat bernilai positif dan juga negatif.

2.3.1 Diagonalisasi Bentuk Kuadratik

Misal diberikan bentuk kuadratik $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ dan akan dicari transformasi variabel $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y}$ atau $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$ dimana P adalah matriks nonsingular . Jika $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y}$ disubstitusikan pada $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ akan diperoleh :

$$f(\mathbf{X}) = (\mathbf{P}\mathbf{Y})^T\mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}^T\mathbf{B}\mathbf{Y} \qquad (2.9)$$

dimana $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$. Dalam suku – suku variabel baru $\mathbf{Y}$ bentuk $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ menjadi $\mathbf{Y}^T\mathbf{B}\mathbf{Y}$ dengan $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Selanjutnya pandang bentuk kuadratik definit positif

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} \tag{2.10}$$

Suku – suku yang memuat x_1 yaitu

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \tag{2.11}$$

Karena bentuk kuadratik (2.10) definit positif , untuk $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$ dan $x_1 \neq 0$ akan bernilai positif , sehingga diperoleh $f(\mathbf{X}) = a_{11}x_1^2$ dan $a_{11} > 0$. Jadi (2.11) dapat ditulis dalam bentuk :

$$a_{11}\left(x_1^2 + 2\sum_{k=2}^{n}\frac{a_{1k}}{a_{11}}x_1x_k\right) = a_{11}\left(x_1^2 + 2\sum_{k=2}^{n}\frac{a_{1k}}{a_{11}}x_1x_k + \left\{\sum_{k=2}^{n}\frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k\right\}^2 - \left\{\sum_{k=2}^{n}\frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k\right\}^2\right)$$

$$= a_{11}\left(\left\{x_1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k\right\}^2 - \left\{\sum_{k=2}^{n}\frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k\right\}^2\right) \tag{2.12}$$

dan transformasi variabelnya yaitu:

$$v_1 = x_1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k, \quad v_2 = x_2, v_3 = x_3, \cdots, v_n = x_n \tag{2.13}$$

atau $\mathbf{V} = \mathbf{Q}_1\mathbf{X}$ dimana $\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

Jadi dengan suatu transformasi variabel, bentuk kuadratik (2.10) dapat direduksi menjadi :

$$f(\mathbf{X}) = a_{11}v_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}v_iv_j \tag{2.14}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dan karena $a_{11} > 0$ sehingga (2.14) juga definit positif. Jika prosedur diatas diulangi karena (2.14) definit positif sehingga $b_{22} > 0$. Kemudian untuk melengkapkan kuadrat variabel v_2, didefinisikan variabel baru

$$w_1 = v_1, w_2 = v_2 + \sum_{i,j=3}^{n} c_{ij} w_i w_j, \quad w_3 = v_3, w_4 = v_4, \cdots, w_n = v_n \tag{2.15}$$

atau $\mathbf{W} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{V}, |\mathbf{Q}_2| = 1$ dan akan diperoleh bentuk

$$f(\mathbf{X}) = a_{11} w_1^2 + b_{22} w_2^2 + \sum_{i,j=3}^{n} b_{ij} w_i w_j \tag{2.16}$$

dengan $a_{11}, b_{22} > 0$. Jika proses diulangi sampai ke *n-1* yaitu:

Dari (2.16) dapat dituliskan kembali menjadi :

$$f(\mathbf{W}) = b_{11} w_1^2 + b_{22} w_2^2 + \cdots + \sum_{i,j=n-1}^{n} b_{ij} w_i w_j \tag{2.17}$$

$$= b_{11} w_1^2 + b_{22} w_2^2 + \cdots + b_{n-1,n-1} w_{n-1}^2 + 2 b_{n-1,n} w_{n-1} w_n + b_{nn} w_n^2$$

$$f(\mathbf{W}) = b_{n-1,n-1} \left\{ w_{n-1}^2 + \frac{b_{n-1,n}}{b_{n-1,n-1}} w_{n-1} w_n + \frac{b_{n-1,n}^2}{b_{n-1,n-1}^2} w_n^2 - \frac{b_{n-1,n}^2}{b_{n-1,n-1}^2} w_n^2 + b_{nn} w_n^2 \right\}$$

$$= b_{n-1,n-1} \left\{ (w_{n-1}^2 + \frac{b_{n-1,n}}{b_{n-1,n-1}} w_n)^2 + (\frac{b_{n-1,n}}{b_{n-1,n-1}} w_n^2 - (\frac{b_{n-1,n}}{b_{n-1,n-1}})^2) w_n^2 \right\} \tag{2.18}$$

Misal $y_{n-1} = w_{n-1} + \frac{b_{n-1,n}}{b_{n-1,n-1}} w_n$ atau $\mathbf{Y} = \mathbf{Q}\mathbf{W}$ dimana $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b_{n-1,n}}{b_{n-1,n-1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$y_n = w_n$$

sehingga (2.18) menjadi:

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$f(\mathbf{Y}) = b_{n-1,n-1}y_{n-1}^2 + \left(b_{nn} - \frac{b_{n-1,n}^2}{b_{n-1,n-1}}\right)y_n^2$$

dengan memisalkan $b_{ii} = d_i > 0; i = 1,2,\ldots,n-1$ dan $b_{nn} - \frac{b_{n-1,n}^2}{b_{n-1,n-1}} = d_n > 0$

maka (2.17) menjadi:

$$f(\mathbf{X}) = a_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \cdots + z_{nn}y_n^2 \qquad (2.19)$$

dimana koefisien setiap suku y_i^2 adalah positif.

***Contoh 9* :**

Akan didiagonalisasi bentuk kuadratik:

$$f(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \qquad (2.20)$$

Misal $\mathbf{Y} = \mathbf{QX}$ dimana $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{21}}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sehingga $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{X}$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned} \quad \text{atau} \quad \begin{aligned} x_1 &= y_1 - \tfrac{1}{2}y_2 \\ x_2 &= y_2 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan pada bentuk kuadratik (2.20) akan diperoleh:

$$2(y_1 - \tfrac{1}{2}y_2)^2 - 2(y_1 - \tfrac{1}{2}y_2)y_2 + y_2^2 = 2y_1^2 + \tfrac{1}{2}y_2^2$$

Berikut ini akan diberikan cara praktis untuk menentukan apakah suatu bentuk kuadratik definit positif atau tidak menggunakan test determinan.

Teorema 2.3

Syarat perlu dan cukup agar bentuk kuadratik $\mathbf{X}^T\mathbf{AX}$ definit positif yaitu

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, |\mathbf{A}| > 0$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Bukti:

(Syarat perlu)

Diketahui $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{AX}$ definit positif akan ditunjukkan

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, |\mathbf{A}| > 0$$

Diketahui $\mathbf{X}^T\mathbf{AX}$ definit positif sehingga dapat dibuat transformasi variabel $\mathbf{Y} = \mathbf{QX}$ atau $\mathbf{X} = \mathbf{PY}, \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ dengan $|\mathbf{Q}| = |\mathbf{P}| = 1$ yang mereduksi $\mathbf{X}^T\mathbf{AX}$ menjadi

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{DY} = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2, \quad d_i > 0, i = 1,2,...,n \tag{2.21}$$

Karena $\mathbf{D} = \mathbf{P}^T\mathbf{AP}$ dan $|\mathbf{P}| = 1$ sehingga:

$$|\mathbf{D}| = d_1 d_2 d_3 \cdots d_n = |\mathbf{P}|^2 |\mathbf{A}| = |\mathbf{A}| \tag{2.22}$$

Jadi $|\mathbf{A}| > 0$. Selanjutnya ambil $x_n = 0$, sehingga bentuk kuadratik yang dihasilkan dalam $n-1$ variabel juga definit positif. Dengan transformasi variabel , bentuk kuadratik yang dihasilkan ini akan menjadi $\sum_{i=1}^{n-1} d_i y_i^2$.

$$\text{Jadi} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = d_1 d_2 d_3 \cdots d_{n-1} > 0 \tag{2.23}$$

Dari bentuk kuadratik semula $\mathbf{X}^T\mathbf{AX}$, diambil $x_n = x_{n-1} = 0$ maka pada (2.21) $y_n = y_{n-1} = 0$ dan akan diperoleh:

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix} = d_1 d_2 d_3 \cdots d_{n-2} > 0$$

Jika proses ini diteruskan akan didapatkan $a_{11} = d_{11} > 0$

Jadi jika $\mathbf{X}^T\mathbf{AX}$ definit positif maka $a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, |\mathbf{A}| > 0$

(Syarat cukup)

Diketahui $a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, |\mathbf{A}| > 0$ akan ditunjukkan $\mathbf{X}^T\mathbf{AX}$ definit positif.

Karena $a_{11} > 0$ maka dapat dilakukan transformasi variabel $\mathbf{X} = \mathbf{PV}$ dan akan diperoleh:

$$a_{11}v_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}v_i v_j \qquad (2.24)$$

Karena koefisien b_{ij} bebas dari variabel x_i atau v_i, jika diambil $x_i = v_i = 0$ untuk $i = 3,4,\ldots,n$ maka (2.24) menjadi bentuk dalam dua variabel dengan diskriminannya $a_{11}b_{22}$. Jika variabel diatas diambil nol , maka bentuk kuadratik $\mathbf{X}^T\mathbf{AX}$ semula akan tereduksi menjadi bentuk kuadratik dalam dua variabel yang determinannya adalah $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$

Jadi diskriminannya adalah sama karena determinan dari transformasinya adalah satu. Oleh karena itu $a_{11}b_{22} > 0$ dan $b_{22} > 0$

Transformasi variabel yang lain mereduksi (2.24) menjadi

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$a_{11}w_1^2 + b_{22}w_2^2 + \sum_{i,j=3}^{n} c_{ij}w_i w_j \qquad (2.25)$$

dengan mengambil $w_i = v_i = x_i = 0, i = 4,5,...,n$ akan diperoleh $c_{33} > 0$, sehingga :

$$a_{11}b_{22}c_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$$

dan $c_{33} > 0$ (karena $a_{11}, b_{22} > 0$).

Jika proses ini dilanjutkan akan didapat bentuk umum $\sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2, d_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$

Jadi bentukkuadratiknya definit positif. *(Terbukti)*

Contoh 10:

Bentuk kuadratik $f(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ adalah definit positif sebab:

$$a_{11} = 2 > 0, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

2.3 Ekstrim Fungsi

Metode optimasi merupakan cara untuk memperoleh nilai optimal suatu fungsi. Studi kalkulus dari bentuk optimasi tanpa kendala merupakan dasar untuk membangun sebagian besar teknik numerik dari optimasi. Pada bagian ini akan dijabarkan konsep dasar kalkulus yang berhubungan dengan masalah optimasi tanpa kendala suatu fungsi nonlinier multivariabel.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

2.3.1 Fungsi berharga riil

Definisi 2.12

Jika untuk setiap vektor $\mathbf{X} \in R^n$ terdapat suatu bilangan riil $f(\mathbf{X})$ yang tunggal maka $f(\mathbf{X})$ dikatakan fungsi berharga riil dari **X.**

Definisi 2.13

Suatu fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan kontinu pada $\mathbf{X}_0$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > o$ sedemikian sehingga $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| < \delta$ berlaku $|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_0)| < \varepsilon$ dimana

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})^2 ; \mathbf{X}_0, \mathbf{X} \in R^n$$

2.3.2 Derivatif parsial dan vektor gradien

Definisi 2.14

Misal $(\Delta x)_j^T = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; \delta x_j \;\; \ldots \;\; 0 \;\; 0]$ vektor dalam R^n dengan semua komponennya nol kecuali yang ke $-j$ yaitu δx_j .Derivatif parsial dari $f(\mathbf{X})$ terhadap komponen x_j dari **X** didefinisikan sebagai

$$\lim_{\delta x_j \to 0} \frac{f(\mathbf{X} + \Delta x_j) - f(\mathbf{X})}{\delta x_j}$$

dan dinotasikan dengan $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Vektor yang komponen - komponennya terdiri dari n derivatif parsial dari $f(\mathbf{X})$ dikatakan gradien dari $f(\mathbf{X})$ atau dapat ditulis :

$$grad\ f = (\nabla f)^T = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

Definisi 2.15

Jika $f(\mathbf{X})$ mempunyai derivatif parsial yang kontinu terhadap masing masing variabelnya maka dikatakan diferensiabel.

2.3.3 Deret Taylor

Misal $f(\mathbf{X})$ fungsi berharga riil yang diferensiabel dua kali dalam R^n dan misal $\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}$ adalah suatu titik persekitaran dari $\mathbf{X}$ dalam R^n dimana $(\Delta\mathbf{X})^T = [\delta x_1 \quad \delta x_2 \quad \ldots \quad \delta x_n]$ dan $(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X})^T = [x_1 + \delta x_1 \quad x_2 + \delta x_2 \quad \ldots x_n + \delta x_n]$

Deret Taylor untuk fungsi $f(\mathbf{X})$ dengan n variabel di $\mathbf{X}^*$ dapat ditulis

$$f(x_1^* + \delta x_1, x_2^* + \delta x_2, \ldots, x_n^* + \delta x_n) = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) + \sum_{i=1}^{n} \delta x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta x_i \delta x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + R(\mathbf{X}^*, \Delta\mathbf{X})$$

Dalam bentuk vektor dapat ditulis dengan

$$f(\mathbf{X}^* + \Delta\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}^*) + (\Delta\mathbf{X})^T \nabla f(\mathbf{X}^*) + \tfrac{1}{2}(\Delta\mathbf{X})^T \nabla^2 f(\mathbf{X}^*)(\Delta\mathbf{X}) + R(\mathbf{X}^*, \Delta\mathbf{X})$$

Dari persamaan diatas dapat didefinisikan matriks Hessian n x n dari fungsi $f(\mathbf{X})$ yaitu:

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}^*) = \nabla^2 f(\mathbf{X}^*) = \left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_i \partial x_j}\right]; i, j = 1,2,\cdots,n$$

2.3.4 Turunan berarah dan arah penurunan tercuram

Definisi 2.16

Turunan berarah dari $f(\mathbf{X})$ pada arah vektor satuan $\mathbf{U}$ didefinisikan sebagai :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{X}+t\mathbf{U}) - f(\mathbf{X})}{t}.$$

Dengan menggunakan deret Taylor diperoleh:

$$f(\mathbf{X}+t\mathbf{U}) = f(\mathbf{X}) + t\mathbf{U}^T \nabla f(\mathbf{X}) + R(t^2)$$

untuk $t \to 0$ maka $R(t^2) \to 0$

sehingga $\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{X}+t\mathbf{U}) - f(\mathbf{X})}{t} = \mathbf{U}^T \nabla f(\mathbf{X})$

Jadi $\mathbf{U}^T \nabla f(\mathbf{X})$ merupakan turunan berarah $f(\mathbf{X})$ pada arah vektor satuan $\mathbf{U}$ dan merupakan laju perubahan $f(\mathbf{X})$ pada arah $\mathbf{U}$. Vektor satuan pada arah vektor gradiennya yaitu $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ dan laju perubahan pada arah vektor gradien yaitu

$$\frac{(\nabla f)^T \nabla f}{\|\nabla f\|} = \|\nabla f\|$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz diperoleh

$$\left|\mathbf{U}^T \nabla f\right| \le \|\mathbf{U}\| \|\nabla f\|$$

$$\le \|\nabla f\| \text{ (karena } \|\mathbf{U}\| = 1)$$

Jadi laju perubahan pada arah vektor gradien merupakan laju perubahan maksimum yaitu $f(\mathbf{X})$ akan naik paling cepat pada arah vektor gardien (∇f)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

dan $f(\mathbf{X})$ turun paling curam pada arah negatif gradien (- ∇f). Oleh karena itu gradien (∇f)dan negatif gradien (-∇f) masing – masing dinamakan arah *steepest ascent* dan arah *steepest descent*

2.3.5 Nilai Ekstrim

Definisi 2.17

Fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan mempunyai nilai minimum lokal di $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ jika terdapat persekitaran $N(\mathbf{X}^*, \delta)$ yang memuat $\mathbf{X}^*$ sedemikian sehingga $f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}^*)$, untuk semua $\mathbf{X}$ dalam persekitaran $N(\mathbf{X}^*, \delta)$.

Definisi 2.18

Fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan mempunyai nilai minimum global di $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ jika $f(\mathbf{X}^*) \leq f(\mathbf{X})$, untuk semua $\mathbf{X} \in R^n$

Teorema 2.4

Jika $f(\mathbf{X})$ mempunyai titik ekstrim di $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ dan jika derivatif parsial pertama dari $f(\mathbf{X})$ ada di $\mathbf{X}^*$ maka

$$\frac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_k} = \ldots = \frac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_n} = 0 \text{ atau } \nabla f(\mathbf{X}^*) = \mathbf{0}$$

Bukti:

Misalkan derivatif parsial pertama yang ke-$i, i=1,2,\ldots,n$ tidak hilang di $\mathbf{X}^*$, dimana $\mathbf{X}^* \in R^n$ sehingga dengan menggunakan deret Taylor diperoleh:

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$f(\mathbf{X}^* + \Delta\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}^*) + \sum_{j=1}^{n} \delta x_j \frac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_j} + R(\mathbf{X}^*, \Delta\mathbf{X})$$

yaitu:

$$f(\mathbf{X}^* + \Delta x_i) - f(\mathbf{X}^*) = \delta x_i \frac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_i} + R(\mathbf{X}^*, \Delta\mathbf{X}) \qquad (2.26)$$

karena untuk Δx_i yang kecil suku sisanya mendekati nol sehingga dapat diabaikan maka tanda positif / negatif dari $f(\mathbf{X}^* + \Delta x_i) - f(\mathbf{X}^*)$ ditentukan oleh

$$\delta x_i \frac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_i}$$

Diketahui $f(\mathbf{X})$ mempunyai titik ekstrim, misal minimum di $\mathbf{X}^*$ (untuk maksimum analog). Karena $f(\mathbf{X})$ minimum di $\mathbf{X}^*$ sehingga menurut definisi 2.17

$f(\mathbf{X}^* + \Delta x_i) - f(\mathbf{X}^*) \geq 0$ untuk $\delta x_i > 0$ dan

$f(\mathbf{X}^* + \Delta x_i) - f(\mathbf{X}^*) \leq 0$ untuk $\delta x_i < 0$ (2.27)

Dari hipotesis $f(\mathbf{X})$ mempunyai turunan parsial di $\mathbf{X}^*$, sehingga dari (2.27) diperoleh :

$$\lim_{\delta x_i \to 0^+} \frac{f(\mathbf{X}^* + \Delta x_i) - f(\mathbf{X}^*)}{\delta x_i} = \lim_{\delta x_i \to 0^-} \frac{f(\mathbf{X}^* + \Delta x_i) - f(\mathbf{X}^*)}{\delta x_i} = 0$$

sehingga dari (2.26) diperoleh:

$$\frac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_i} = 0$$

untuk $i = 1,2,\cdots,n$. *(Terbukti).*

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.4 Himpunan dan Fungsi konveks

Suatu kelompok khusus dari himpunan titik dalam R^n yang dinamakan himpunan konveks mempunyai peranan penting dalam teori optimasi. Berikut akan diberikan definisi secara singkat tentang himpunan dan fungsi konveks.

2.4.1 Himpunan Konveks

Definisi 2.19

Titik $\mathbf{X} = (1-\theta)\mathbf{X}_1 + \theta\mathbf{X}_2; 0 \le \theta \le 1$ dinamakan kombinasi linier konveks dari titik $\mathbf{X}_1$dan $\mathbf{X}_2$

Definisi 2.20

Himpunan $K \subseteq R^n$ dikatakan sebagai himpunan konveks jika setiap kombinasi linier konveks dari dua titik dalam K adalah anggota K. Dengan kata lain setiap titik $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in K$ dan $\theta \in R; 0 \le \theta \le 1$ berlaku: $\mathbf{X} = (1-\theta)\mathbf{X}_1 + \theta\mathbf{X}_2 \in K$

2.4.2 Fungsi Konveks

Definisi 2.21

Misalkan $K \subseteq R^n$ adalah himpunan konveks dan $f(\mathbf{X})$ terdefinisi pada K. Untuk setiap $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in K, \theta \in R; 0 \le \theta \le 1$. $f(\mathbf{X})$ disebut fungsi konveks jika:

$$f(\mathbf{X}) = f((1-\theta)\mathbf{X}_1 + \theta\mathbf{X}_2) \le (1-\theta)f(\mathbf{X}_1) + \theta f(\mathbf{X}_2)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

Teorema 2.5

Diberikan $\mathbf{X} \in K$ dan bentuk kuadratik $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\,\mathbf{X}$. Jika $f(\mathbf{X})$ semi definit positif maka $f(\mathbf{X})$ fungsi konveks.

Bukti :

Akan dibuktikan : $f(\mathbf{X}) \le (1-\theta) f(\mathbf{X}_1) + \theta f(\mathbf{X}_2)$

Ambil sebarang dua titik $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in K$ sehingga $\mathbf{X} = (1-\theta)\mathbf{X}_1 + \theta\mathbf{X}_2, 0 \le \theta \le 1$

$$(1-\theta) f(\mathbf{X}_1) + \theta f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}) = (1-\theta)\mathbf{X}_1^T \mathbf{A}\mathbf{X}_1 + \theta\mathbf{X}_2^T \mathbf{A}\mathbf{X}_2 -$$

$$\{(1-\theta)\mathbf{X}_1 + \theta\mathbf{X}_2\}^T \mathbf{A}\{(1-\theta)\mathbf{X}_1 + \theta\mathbf{X}_2\}$$

$$= (1-\theta)\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_1 + \theta\mathbf{X}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_2$$

$$-(1-\theta)^2 \mathbf{X}_1^T \mathbf{A}\mathbf{X}_1 - 2\theta(1-\theta)\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_2 - \theta^2 \mathbf{X}_2^T \mathbf{A}\mathbf{X}_2$$

$$= \theta(1-\theta)\{\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_2 - 2\mathbf{X}_1^T \mathbf{A}\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2^T \mathbf{A}\mathbf{X}_2\}$$

$$= \theta(1-\theta)(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)^T \mathbf{A}(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)\ 0 \le \theta \le 1$$

karena $\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1$ sebarang vektor dan $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\,\mathbf{X} \ge 0$ maka

$$\theta(1-\theta)(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)^T \mathbf{A}(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \ge 0$$

Jadi $(1-\theta) f(\mathbf{X}_1) + \theta f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}) \ge 0$ atau $(1-\theta) f(\mathbf{X}_1) + \theta f(\mathbf{X}_2) \ge f(\mathbf{X})$

(Terbukti) .

Teorema 2.6

Misal $K \subseteq R^n$ merupakan himpunan konveks, $\mathbf{X} \in K$ dan $f(\mathbf{X})$ fungsi konveks. Jika $f(\mathbf{X})$ mempunyai minimum lokal maka sekaligus merupakan minimum global.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation.
(http://eprints.undip.ac.id)

Bukti :

misal $f(\mathbf{X})$ mempunyai minimum lokal di $\mathbf{X}^*$ dan $\mathbf{X}_1 \in K$ maka untuk suatu $\delta > 0$ dapat dipilih θ di mana $0 < \theta < 1$ sedemikian sehingga $\mathbf{X} = (1-\theta)\mathbf{X}^* + \theta\mathbf{X}_1$ terletak pada persekitaran $N(\mathbf{X}^*, \delta)$

Dari definisi 2.17 maka:

$$f(\mathbf{X}^*) \le f(\mathbf{X})$$

$$\le f((1-\theta)\mathbf{X}^* + \theta\mathbf{X}_1)$$

$$\le (1-\theta) f(\mathbf{X}^*) + \theta f(\mathbf{X}_1) \quad \text{(karena } f(\mathbf{X}) \text{ fungsi konveks)}$$

$$\theta f(\mathbf{X}^*) \le \theta f(\mathbf{X}_1)$$

karena $\theta > 0$ sehingga

$$f(\mathbf{X}^*) \le f(\mathbf{X}_1)$$

Jadi menurut definisi 2.18, $\mathbf{X}^*$ merupakan titik minimum global dari $f(\mathbf{X})$.

(Terbukti).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)