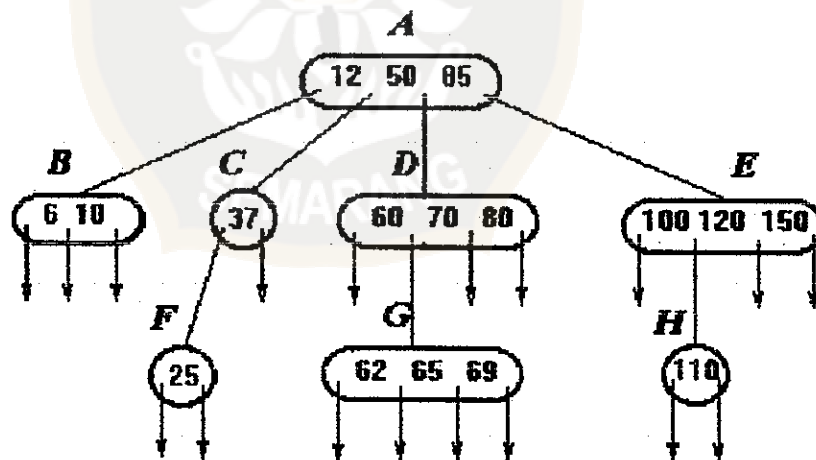


BAB III

POHON TELUSUR BANYAK CABANG (MULTIWAY SEARCH TREE)

3.1 Karakteristik Pohon Telusur m - Cabang

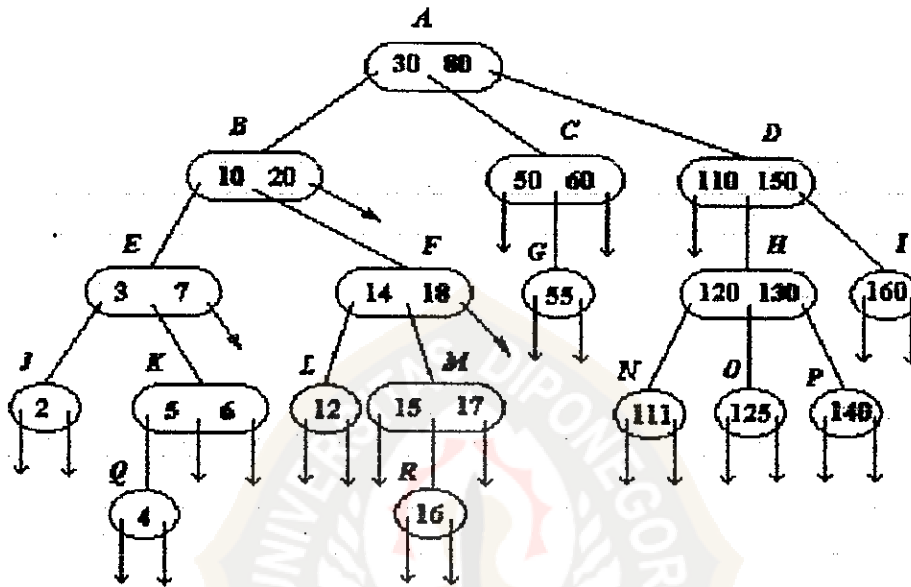
Pohon telusur banyak cabang orde m (multiway search tree of order m) adalah pohon umum yang setiap simpulnya memiliki paling banyak m buah subpohon (cabang) atau kurang dan memuat $m - 1$ kunci dari banyaknya subpohon.



Gambar 5. Pohon telusur banyak cabang orde 4

Gambar 5. di atas adalah contoh pohon telusur banyak cabang orde 4.

Simpul A, D, E, G disebut simpul penuh (*full nodes*), karena memuat maksimum banyaknya kunci.

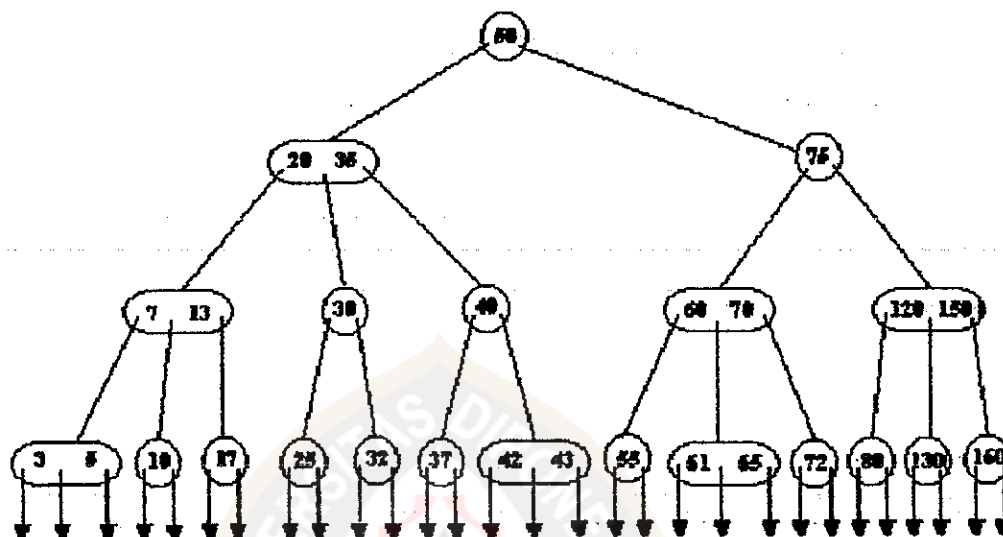


Gambar 6. Pohon telusur banyak cabang atas-bawah orde 3

Gambar 6. di atas adalah contoh pohon telusur banyak cabang atas-bawah

(*top down multiway search tree*). Pohon demikian memiliki karakteristik yaitu :

- sebarang simpul tak penuh (*nonfull node*) merupakan daun.
- semi-daun (*semileaf*) merupakan simpul penuh, atau jika bukan simpul penuh maka haruslah merupakan daun.



Gambar 7. Pohon telusur banyak cabang seimbang orde 3 (Pohon-B)

Gambar 7. merupakan contoh lain dari pohon telusur banyak cabang yang berorde 3. Pohon di atas bukan merupakan pohon telusur banyak cabang atas-bawah, karena terdapat empat simpul yang memiliki satu kunci dan subpohon yang tak kosong. Namun demikian, pohon di atas memiliki karakteristik khusus yang disebut seimbang (*balanced*), yaitu semua semi-daun berada dalam level yang sama (level 3).

Definisi 3.1.1 :

Suatu pohon telusur m - cabang (*m-way search tree*), memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

- 1). Akar pohon paling banyak memiliki m subpohon (cabang) dan memiliki struktur berikut ini : $m, (A_1, K_1), (A_2, K_2), (A_3, K_3), \dots, (A_{m-1}, K_{m-1}), A_m$ dengan $A_i, 1 \leq i \leq m$, merupakan pointer yang menunjuk ke subpohon, dan $K_i, 1 \leq i < m$, merupakan nilai kunci-kuncinya.
- 2). $K_i < K_{i+1}, 1 \leq i < m - 1$.
- 3). Nilai setiap kunci yang berada dalam subpohon $A_i, 1 \leq i \leq m$, lebih kecil dari $K_i, 1 \leq i < m$.
- 4). Nilai setiap kunci yang berada dalam subpohon A_m lebih besar dari K_{m-1} .
- 5). Subpohon $A_i, 1 \leq i \leq m$, juga merupakan pohon telusur m -cabang.

3.2 Pencarian Pohon Telusur Banyak Cabang

Diasumsikan simpul $node(p)$ memuat medan-medan (*fields*) $numtrees(p)$ (yang nilai bilangannya lebih kecil atau sama dengan orde (*order*) pohon, m , dan sama dengan banyaknya subpohon dari $node(p)$), $son(p,1)$ sampai dengan $son(p, numtrees(p))$ (yang nilainya adalah pointer-pointer yang menunjuk ke subpohon-subpohon dari $node(p)$) dan $k(p,1)$ sampai dengan $k(p, numtrees(p) - 1)$ (yang nilainya adalah kunci-kunci yang termuat dalam $node(p)$ berdasarkan urutan naik). Subpohon yang ditunjuk oleh $son(p, i)$ (untuk i antara 2 sampai dengan

$numtrees(p) - 1$ memuat seluruh kunci dalam pohon antara $k(p, i - 1)$ dan $k(p, i)$. $son(p, 1)$ menunjuk ke subpohon yang hanya memuat kunci-kunci yang lebih kecil dari $k(p, 1)$, dan $son(p, numtrees(p) - 1)$ menunjuk ke subpohon yang hanya memuat kunci-kunci yang lebih besar $k(p, numtrees(p) - 1)$.

Diasumsikan pula suatu fungsi $nodesearch(p, key)$ yang mengembalikan baik bilangan bulat terkecil j sedemikian sehingga $key \leq k(p, j)$ atau $numtrees(p)$ jika key lebih besar dari setiap kunci dalam $node(p)$. Berikut adalah algoritma rekursif untuk fungsi $search(tree, key)$ yang mengembalikan pointer yang menunjuk ke simpul yang memuat key (atau Nil jika tidak diperoleh simpul dalam pohon) dan men-set variabel global $position$ untuk posisi kunci dalam simpul tersebut:

```

p := tree
if p = nil
  then begin
    search := nil
    position := 0
  end { then begin }
else begin
  i := nodesearch(p, key)
  if i = numtrees(p) then
    search := search(son(p, numtrees(p)), key)
  else begin
    if key = k(p, i)
      then begin
        search := p
        position := i
      end { then begin }
    else search := search(son(p, i), key)
  end { else begin }
end { else begin }

```

Berikut ini adalah algoritma versi *non-rekursif*:

```

p := tree
found := false
while (p  $\neq$  nil) and (not found)
do begin
    i := nodesearch(p,key)
    if i = numtrees(p) then
        p := son(p,numtrees(p))
    else begin
        if key = k(p,i)
            then found := true
        else p := son(p,i)
        end { else begin }
    end { while ... do begin }
if found
then begin
    search := p
    position := i
end { then begin }
else begin
    search := nil
    position := 0
end { else begin }

```

Fungsi *nodesearch* berperan untuk mengalokasikan kunci terkecil dalam simpul yang lebih besar atau sama dengan argumen yang dicari.

3.3 Penerapan Pohon Telusur Banyak Cabang

Jika pohon telusur banyak cabang berada dalam penyimpanan luar, pointer yang menunjuk ke suatu simpul merupakan alamat penyimpanan luar yang menentukan titik awal dari blok penyimpanan. Blok penyimpanan yang membentuk simpul harus dibaca ke penyimpanan dalam (misal memori) sebelum medan-medan *numtrees*, *k*,

atau *son* dapat diakses. Diasumsikan rutin (*routine*) *directread(p,block)* membaca suatu simpul pada alamat penyimpanan luar *p* ke dalam buffer penyimpanan dalam *block*. Diasumsikan pula medan-medan *numtrees*, *k*, dan *son* dalam buffer diakses berturut-turut sebagai berikut, yaitu *block.numtrees*, *block.k*, dan *block.son*, serta fungsi *nodesearch* dimodifikasi untuk menerima blok penyimpanan dalam . Berikut adalah algoritma non-rekursif untuk pohon telusur banyak yang tersimpan di luar :

```

p := tree
found := false
while ( p  $\diamond$  nil ) and ( not found )
do begin
    directread(p,block)
    i := nodesearch(block,key)
    if i = block.numtrees then
        p := block.son(block.numtrees)
    else begin
        if key = block.k(i)
            then found := true
        else p := block.son(i)
        end { else begin }
    end { while ... do begin }
if found
then begin
    search := p
    position := i
end { then begin }
else begin
    search := nil
    position := 0
end { else begin }

```

3.4 Kunjungan Pohon Telusur Banyak Cabang

Salah satu bentuk operasi umum dalam struktur data adalah mengakses setiap elemen dari (dalam) struktur yang bersangkutan menurut suatu urutan yang tetap. Berikut ini adalah algoritma rekursif *traverse(tree)* yang berfungsi untuk mengunjungi pohon telusur banyak cabang dan mencetak kunci-kuncinya berdasarkan urutan naik.

```

if tree  $\diamond$  nil
  then begin
    nt := numtrees(tree)
    for i := 1 to nt - 1
      do begin
        traverse(son(tree,i))
        writeln(k(tree,i))
      end { for ... do begin }
    traverse(son(tree,nt))
  end {then begin}

```

Jika setiap simpul adalah suatu blok penyimpanan luar dan *tree* adalah alamat penyimpanan luar simpul akar, maka suatu simpul harus dibaca ke dalam *internal memory* sebelum medan *son* atau medan *k*-nya dapat diakses. Berikut adalah modifikasi algoritmanya.

```

if tree  $\diamond$  nil
  then begin
    directread(tree,block)
    nt := block.numtrees
    for i := 1 to nt - 1
      do begin
        traverse(block.son(i))
        writeln(block.k(i))
      end { for ... do begin }
    traverse(block.son(nt))
  end {then begin}

```


Operasi yang biasa dilakukan pada pohon telusur banyak lainnya dan masih sangat berhubungan dengan kunjungan (*traversal*), adalah *direct sequential access*. Hal ini berhubungan dengan cara mengakses kunci dengan cepat berdasarkan suatu kunci yang lokasinya di dalam pohon diketahui. Diasumsikan, telah diketahui lokasi suatu kunci k_1 dengan mencari (menelusuri) pohon dan kunci tersebut berada pada posisi $k(m_1, i_1)$. suksesor (*successor*) k_1 dapat ditemukan dengan menjalankan fungsi berikut yaitu $next(m_1, i_1)$ (*nilkey* adalah nilai khusus yang mengindikasikan bahwa kunci yang dicari tidak ditemukan).

```

p := son(m1, i1+1)
q := nil
while p <> nil
  do begin
    q := p
    p := son(p, 1)
  end { while ... do begin }
if q <> nil
  then next := k(q, 1)
  else if i1 < numtrees(m1) - 1
    then next := k(m1, i1+1)
  else next := nilkey

```

Algoritma di atas didasarkan pada kenyataan bahwa suksesor k_1 adalah kunci pertama dalam subpohon yang mengikuti k_1 dalam simpul $node(m_1)$, atau jika subpohon tersebut kosong [$son(m_1, i_1+1)$ sama dengan nil] dan jika k_1 bukan merupakan kunci terakhir dalam simpulnya [$i_1 < numtrees(m_1) - 1$], maka suksesor adalah kunci setelah k_1 dalam simpul $node(m_1)$.

Namun demikian, jika $k1$ adalah kunci terakhir dalam simpulnya dan jika subpohon berikutnya kosong, maka suksesornya hanya dapat ditemukan dengan cara menelusuri pohon (naik) ke atas (*backing up the tree*). Diasumsikan setiap simpul memuat dua medan tambahan: *medan ayah (father field)* yang merupakan pointer menunjuk ke simpul ayah dan *medan indeks (index field)* yang menentukan simpul berada dalam cabang yang keberapa dari simpul ayah. Berikut adalah algoritma *successor(m1, i1)* untuk menemukan suksesor kunci yang dicari dalam posisi $i1$ dari simpul yang ditunjuk oleh $m1$:

```

p := son(m1, i1+1)
if ( p <> nil ) or ( i1 < numtrees(m1) - 1 )
  then successor := next(m1, i1)
  else begin
    f := father(m1)
    i := index(m1)
    while ( i = numtrees(f) ) and ( f <> nil )
      do begin
        i := index(f)
        f := father(f)
      end { while ... do begin }
    if f = nil
      then successor := nilkey
      else successor := k(f, i)
    end { else begin }
  end

```

3.5 Penyisipan Pohon Telusur Banyak Cabang

Ada dua teknik penyisipan untuk pohon telusur banyak cabang. Yang pertama analog dengan penyisipan pada pohon telusur biner dan menghasilkan pohon telusur banyak cabang atas - bawah (*top-down multiway search tree*). Teknik yang kedua adalah teknik baru yang menghasilkan suatu jenis khusus yaitu pohon telusur banyak cabang seimbang.

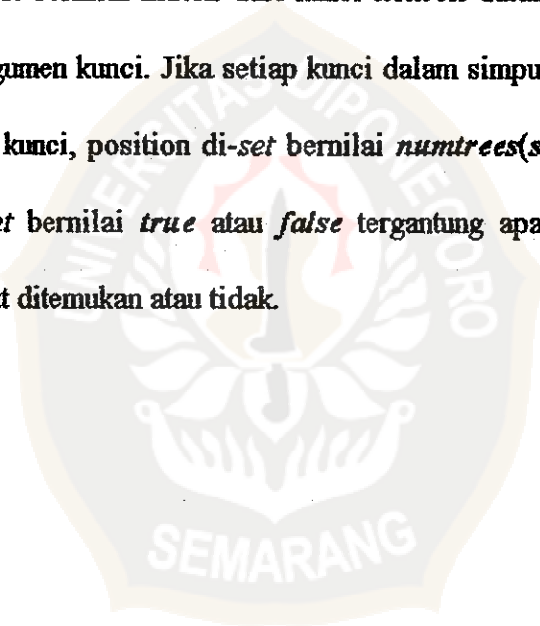
Langkah pertama untuk kedua teknik di atas adalah proses pencarian untuk argumen kunci. Berikut adalah prosedur *find* untuk proses pencarian argumen kunci:

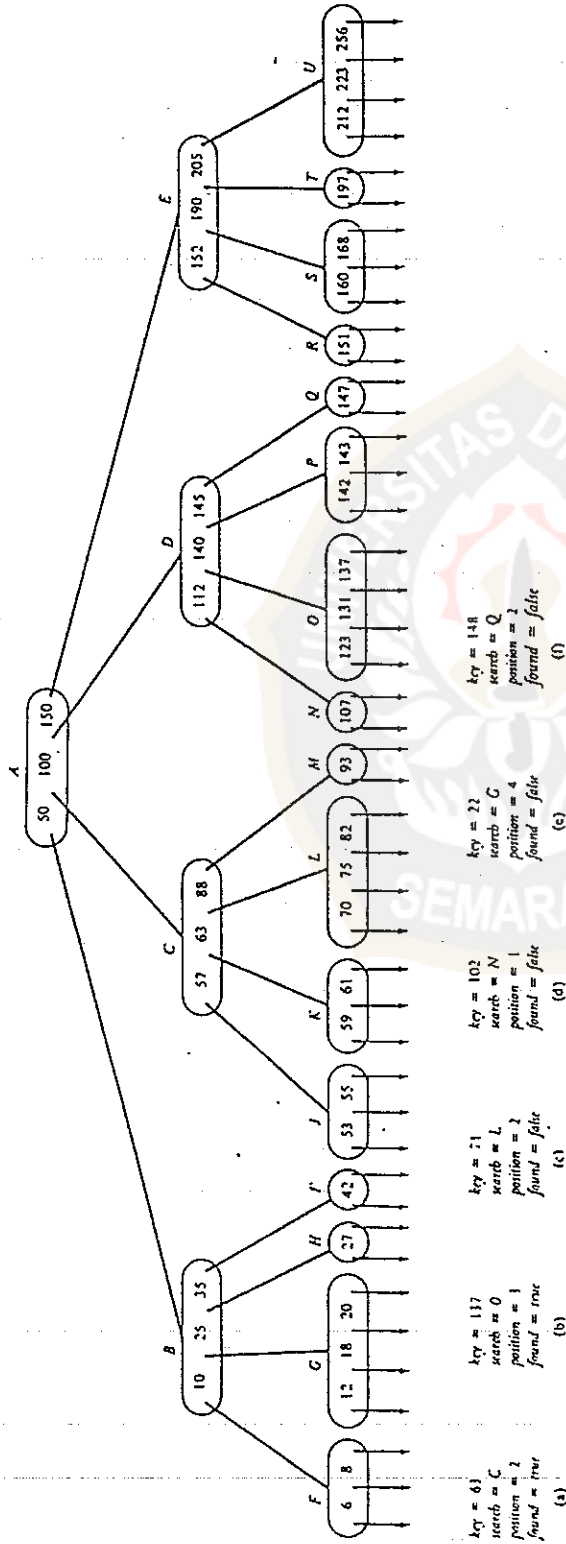
```

procedure find ( tree : nodeptr, key : keytype; var search : nodeptr,
                  var position : integer, var found : boolean )
    q := nil
    p := tree
    found := false
    while ( p > nil ) and ( not found )
    do begin
        i := nodesearch(p, key)
        q := p
        if i = numtrees(p) then
            p := son(p, numtrees(p))
        else begin
            if key = k(p, i)
            then found := true
            else p := son(p, i)
            end { else begin }
        end { while ... do begin }
    if found
    then search := p { kunci ditemukan dalam simpul node(p) }
    else search := q { p bernilai nil; q menunjuk semileaf }
    position := i

```

Dalam prosedur di atas, jika argumen kunci ditemukan dalam pohon, maka *search* di-set untuk menunjuk ke simpul yang memuat kunci tersebut, dan *position* bernilai bilangan bulat yang memberikan informasi posisi kunci tersebut. Sebaliknya, jika argumen kunci tidak ditemukan dalam pohon, *search* di-set untuk menunjuk ke semi-daun yang memuat kunci tersebut seandainya kunci itu ada, dan *position* di-set bernilai indeks dari kunci terkecil dalam *node(search)* yang lebih besar dari argumen kunci. Jika setiap kunci dalam simpul *node(search)* lebih kecil dari argumen kunci, *position* di-set bernilai *numtrees(search)*. Variabel *boolean*, *found*, di-set bernilai *true* atau *false* tergantung apakah argumen kunci dalam pohon tersebut ditemukan atau tidak.





Gambar 8. Hasil proses pencarian prosedur *find* pada pohon telusur banyak cabang atas-bawah

Langkah kedua dari prosedur penyisipan berlaku jika kunci yang dicari tidak ditemukan dan jika $node(search)$ tidak penuh -- yaitu jika $numtrees(search) < m$, dimana m adalah orde dari pohon. Langkah kedua terdiri dari proses penyisipan kunci baru (dan rekaman) ke dalam $node(search)$.

Misalkan $insrec(p, i, rec)$ adalah sebuah rutin untuk menyisipkan rekaman rec pada posisi i dari simpul $node(p)$ yang sesuai. Berikut adalah prosedur $insleaf(search, position, key, rec)$ yang merupakan langkah kedua untuk proses penyisipan :

```

nt := numtrees(search)
numtrees(search) := nt + 1
for i:= nt downto position + 1
    do k(search,i):= k(search, i - 1)
k(search.position):= key
insrec(search.position,rec)

```

Gambar 9.a mengilustrasikan simpul-simpul yang ditemukan oleh prosedur $find$ dalam gambar 8.d dan f dengan kunci-kunci baru yang disisipkan.

Jika langkah 2 cocok (yaitu jika simpul daun tak penuh dimana kunci yang dapat disisipkan telah ditemukan), maka kedua prosedur penyisipan tersebut berakhir. Kedua teknik tersebut berbeda pada langkah ketiga yang diperlukan pada saat prosedur $find$ menempati semi-daun (yang) penuh.

Teknik penyisipan yang pertama, yang menghasilkan pohon telusur banyak cabang atas-bawah, memiliki tahapan yang sama dengan algoritma penyisipan pada pohon telusur biner. Pertama kali, dilakukan tahap pengalokasian simpul baru,

kemudian dilanjutkan penyisipan kunci dan rekaman ke dalam simpul baru, dan diakhiri dengan penempatan simpul baru dengan tepat sebagai anak dari $node(search)$. Teknik ini memerlukan fungsi $maketree(key, rec)$ untuk mengalokasikan simpul dan men-set m pointer dalam simpul tersebut menjadi nil , medan $numtrees$ bernilai 2, dan medan kunci pertamanya menjadi sama dengan $key.maketree$. Terakhir, teknik ini menggunakan rutin $insrec$ untuk menyisipkan rekaman secara tepat dan akhirnya mengembalikan sebuah pointer ke simpul baru yang dialokasikan. Berikut adalah rutin $insfull$ untuk menyisipkan kunci pada saat semi-daun yang cocok penuh:

$$p := maketree(key, rec)$$

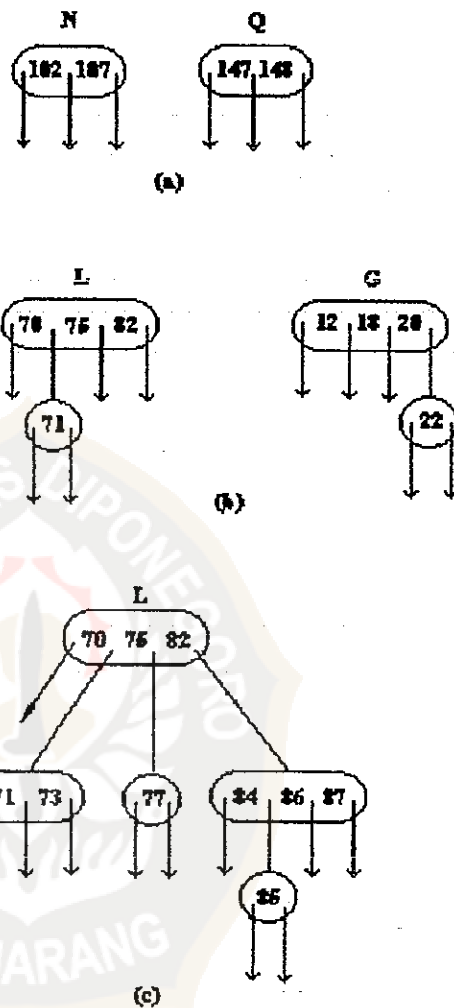
$$son(search, position) := p$$

Jika medan $father$ dan $index$ dipasang dalam setiap simpul, operasi berikut ini diperlukan :

$$father(p) := search$$

$$index(p) := position$$

Gambar 9.b mengilustrasikan hasil dari penyisipan kunci-kunci berturut-turut 71 dan 22, ke dalam simpul-simpul yang ditemukan oleh prosedur $find$ dalam gambar 8.c dan e. Gambar 9.c mengilustrasikan penyisipan berikutnya dari kunci-kunci 86, 77, 87, 84, 85, dan 73 dalam urutan demikian.



Gambar 9. Penyisipan kunci pada pohon telusur banyak cabang atas-bawah

Berikut adalah keseluruhan langkah algoritma tahap pencarian dan penyisipan yang menghasilkan pohon telusur banyak cabang untuk teknik pertama :

```

if tree = nil
then begin
    tree := maketree(key, rec)
    search := tree
    position := 1
end { then begin }

```



```

else begin
  find(tree, key, search, position, found)
  if not found
    then if numtrees(search) < m
      then insleaf(search, position, key, rec)
      else begin
        p := maketree(key, rec)
        son(search, position) := p
        search := p
        position := 1
      end { else begin }
    end { else begin }
end { else begin }

```

3.6 Analisis Pohon Telusur Banyak Cabang

Faktor cabang adalah banyaknya cabang yang berasal dari simpul. Faktor cabang biasanya sama dengan banyaknya kunci yang dapat ditempatkan dalam sebuah simpul atau satu lebih banyak dari banyaknya kunci. Untuk kasus pohon-B, digunakan yang terakhir.

Untuk analisis berikut, diasumsikan, setiap simpul memiliki faktor cabang $s + 1$, dan banyaknya kunci per simpul s . Banyaknya kunci yang dapat ditempatkan dalam sebuah pohon pada ketinggian h adalah

$$s + s(s+1) + s(s+1)^2 + \dots + s(s+1)^k \quad (a)$$

Jika faktor cabang $s + 1$ dibuat sama dengan m , tinggi h dapat ditentukan dengan menyamakan persamaan (a) sama dengan n dan menyelesaikannya untuk tinggi h , yaitu

$$n = s + sm + sm^2 + \dots + sm^k \quad (b)$$

Jika rumus untuk jumlahan deret geometrik digunakan, (b) dapat ditulis kembali menjadi

$$n = S \left(\frac{m^{k+1} - 1}{m - 1} \right) = \frac{m - 1}{m - 1} (m^{k+1} - 1) = m^{k+1} - 1 \quad (c)$$

(c) dapat ditulis kembali menjadi $n + 1 = m^{k+1}$ (d)

Tinggi h , dapat dinyatakan sebagai fungsi dari n dan m dengan mengambil logaritma untuk kedua sisi persamaan (d) terhadap m , yaitu,

$$\log_m(n + 1) = h + 1 \quad (e)$$

(e) dapat dinyatakan kembali sebagai

$$h \cong \log_m(n + 1) - 1 \quad (f)$$

atau $O(\log_m n)$.