BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 Himpunan

Definisi **2.1.1 :**

Objek (*objects*) yang berada dalam suatu himpunan disebut juga dengan **elemen** (*elements*), atau **anggota** (*members*) dari himpunan tersebut. Suatu himpunan dikatakan "*memuat*" elemen-elemennya.

Contoh 1. Himpunan N yang terdiri dari semua bilangan asli kurang dari 5, $N = \{1, 2, 3, 4\}$.

Definisi **2.1.2 :**

Himpunan A disebut **himpunan bagian** (*subset*) dari B jika dan hanya jika setiap elemen dari A juga merupakan elemen dari B.

Notasi : $A \subseteq B$

Definisi **2.1.3 :**

Misalkan S suatu himpunan. Jika terdapat dengan tepat n elemen berbeda dalam S dengan n adalah bilangan bulat tak negatif, maka S disebut **himpunan**

berhingga (*finite set*) dan n adalah **kardinalitas** (*cardinality*) dari S yang dinyatakan dengan $|\ S\ |$.

Contoh 2. **Misalkan S adalah himpunan bilangan bulat positif yang ganjil kurang dari 10.** Maka $|\ S\ | = 5$.

Definisi **2.1.4 :**

*S*uatu himpunan dikatakan ***infinite*** (tak berhingga) jika himpunan tersebut tak ***finite*** (terbatas / berhingga).

Contoh 3. Himpunan seluruh bilangan bulat positif adalah ***infinite***.

Definisi **2.1.5 :**

*M*isalkan A dan B himpunan. **Gabungan** (***union***) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang memuat elemen-elemen baik yang berada di A atau B, atau keduanya.

Notasi : $A \cup B$

Contoh 4. $\{ 1, 3, 5 \} \cup \{ 1, 2, 3 \} = \{ 1, 2, 3, 5 \}$.

2.2 Struktur Pohon

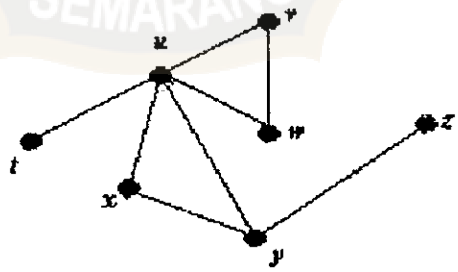
***Definisi* 2.2.1 :**

Suatu *graf* (atau ***undirected graph***) G terdiri dari suatu himpunan V yang beranggotakan titik (***vertices*** atau ***nodes***) dan suatu himpunan E yang beranggotakan garis (***edges***) sedemikian sehingga garis $e \in E$ berasosiasi dengan pasangan titik yang tak terurut .

Notasi : $G = (V, E)$.

Jika sebuah garis e berasosiasi dengan sepasang titik v dan w yang tunggal (***unique***), maka dinotasikan dengan $e = (v, w)$ atau $e = (w, v)$. Dalam konteks ini, (v, w) menyatakan sebuah garis dalam graf tak berarah dan bukan merupakan pasangan terurut. Untuk selanjutnya titik dalam V disebut **simpul**.

Contoh 5. Gambar 1 menunjukkan suatu graf yang terdiri dari 7 simpul dan 8 garis.



G

Gambar 1. Sebuah graf (tak berarah) G

Definisi 2.2.2 :

Simpul v dan w disebut **simpul akhir** (*endpoint*) dari garis e jika e menghubungkan simpul v dan w.

Definisi 2.2.3 :

Suatu garis e dikatakan *incident* dengan simpul v jika v simpul akhir dari e.

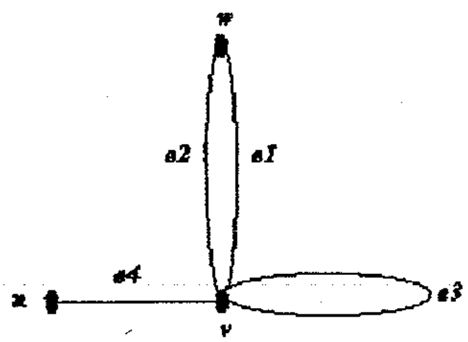
Definisi 2.2.4 :

Derajat (*degree*) dari simpul v dinotasikan $d(v)$ adalah banyaknya garis yang *incident* dengan simpul v.

Definisi 2.2.5 :

Loop adalah suatu garis dengan bentuk (v,v). **Garis parallel** (*parallel edges*) adalah garis-garis yang berasosiasi dengan pasangan simpul yang sama.

Contoh 6. Dalam gambar 2, garis e_1 dan e_2 kedua-duanya berasosiasi dengan pasangan simpul (v, w). Garis e_3 = (v, v) adalah sebuah *loop*.



Gambar 2. Sebuah graf dengan *loop* dan **garis paralel**

Definisi 2.2.6 :

*S*uatu graf yang tidak memiliki *loops* atau garis sejajar (*parallel edges*) disebut dengan **graf sederhana** (*simple graph*).

Contoh 7. Graf *G* dalam gambar 1. adalah graf sederhana.

Definisi 2.2.7 :

***W*alk** dari suatu graf *G* adalah barisan simpul dan garis secara bergantian yang dimulai dan diakhiri dengan simpul. Setiap garis dalam *walk* menghubungkan dua simpul, yaitu simpul-simpul yang berada tepat sebelum dan sesudahnya.

Definisi 2.2.8 :

*M*isalkan *G* adalah suatu graf dan misalkan v dan w adalah simpul-simpul dalam *G*. Sebuah **lintasan** (*path*) dari v hingga w dengan panjang n adalah barisan garis yang berbeda (satu sama lain) dari v sampai w dengan panjang n. Sebuah **lintasan sederhana** (*simple path*) dari v hingga w dengan panjang n adalah lintasan dengan bentuk

$$(v_0 , v_1 , v_2 , \ldots , v_n)$$

dengan $v_0 = v$, $v_n = w$ dan $v_0 , v_1 , v_2 , \ldots , v_n$ saling berbeda.

Sebuah **sirkuit** (*circuit*) atau *cycle* (**sirkuit tertutup**) adalah lintasan dari v sampai v.

Sebuah **sirkuit sederhana** (*simple circuit*) adalah sirkuit dengan bentuk

$$(v_0 , v_1 , v_2 , \ldots , v_n)$$

dengan $v_0 = v_n$ dan $v_0 , v_1 , \ldots , v_{n-1}$ adalah saling berbeda.

Contoh 8. Berikut ini contoh lintasan dan sirkuit untuk graf dalam gambar 1.

Lintasan : (t, u, w, v, u, t), (y, x, u, w), (u, y, x, u, w, v, u), (x, y, u, x)

Lintasan sederhana : (y, x, u, w)

Sirkuit : (u, y, x, u, w, v, u), (x, y, u, x)

Sirkuit sederhana : (x, y, u, x)

Definisi **2.2.9:**

Graf G dikatakan **terhubung** (*connected*) jika diberikan sebarang simpul-simpul v dan w yang berbeda, terdapat suatu lintasan dari v hingga w.

Definisi **2.2.10 :**

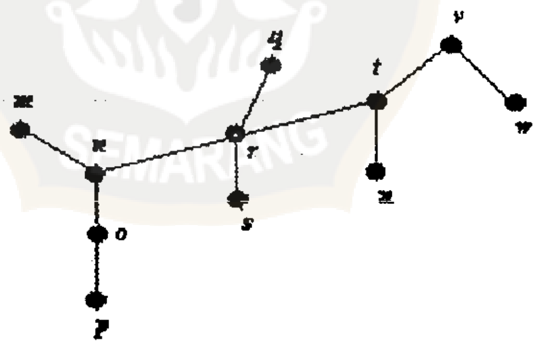
Komponen (*component*) dari sebuah graf G adalah sebuah subgraf terhubung G' dari G yang memiliki sifat berikut : Jika G'' adalah sebuah subgraf terhubung dari G dan G' adalah sebuah subgraf dari G'', maka $G'=G''$. Dengan kata lain, komponen dari graf G adalah **subgraf terhubung maksimal** dari G (*maximal connected subgraph of G*) .

Definisi 2.2.11 :

P*ohon (bebas) *T adalah suatu graf sederhana yang memiliki sifat yaitu terdapat lintasan tunggal (***unique***) di antara setiap pasang simpul.

Pohon berakar (***rooted tree***) adalah suatu pohon *T* yang memiliki simpul tertentu yang dijadikan sebagai akar.

Contoh 9. Graf dalam gambar 3.a, adalah pohon (bebas) dan graf dalam gambar 3.b, adalah suatu pohon berakar. Gambar 3.b diperoleh dari gambar 3.a dengan cara menjadikan simpul *r* dalam gambar 3.a sebagai akar.



T

Gambar 3.a Sebuah pohon (bebas) *T*

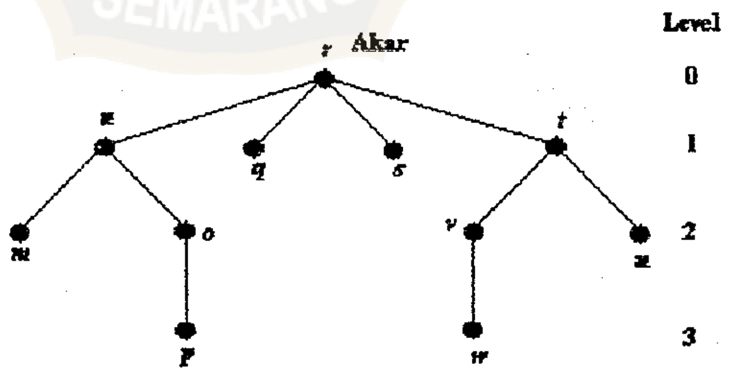
Definisi **2.2.12 :**

*D*iberikan *T* suatu pohon berakar dengan akar *r*. **Tingkat (** ***level*** **)** dari *r* adalah 0, dan tingkat dari suatu simpul *v* ($v \neq r$) adalah panjang lintasan tunggal dari *r* ke *v* . **Tinggi (** ***height*** **)** dari *T* adalah tingkat maksimum dari suatu simpul dalam *T*.

Definisi **2.2.13 :**

*D*iberikan *T* suatu pohon berakar. **Orde (** ***order*** **)** dari *T* adalah ***degree*** maksimum dari suatu simpul dalam *T* .

Contoh 10. Pohon berakar *T* dalam gambar 3.b memiliki ketinggian 3 dan orde 3.



T

Gambar 3.b. Sebuah pohon berakar *T* dengan level simpul-simpulnya

Teorema **2.2.14:**

Misalkan T adalah pohon dengan n simpul. Berikut ini adalah ekivalen :

a) T terhubung dan tidak memuat sirkuit.

b) T terhubung dan memiliki $n - 1$ garis.

c) T tidak memiliki sirkuit dan mempunyai $n - 1$ garis.

***Bukti* :**

Andaikan T terhubung dan tidak memuat sirkuit. Akan dibuktikan bahwa T memiliki $n - 1$ garis dengan induksi terhadap n.

Jika $n = 1$, maka T terdiri dari satu simpul dan nol garis, jadi benar jika $n = 1$.

Sekarang andaikan hasilnya berlaku untuk graf bebas-sirkuit terhubung dengan n simpul. Misalkan T graf bebas-sirkuit terhubung dengan $n + 1$ simpul. Pilih sebuah lintasan P yang memiliki panjang maksimum. Karena T adalah bebas-sirkuit, P bukan sebuah sirkuit, jadi P memuat sebuah simpul v dengan derajat satu. Misalkan T^* adalah T dengan v dan garis yang insiden dengan v dihilangkan.

Maka T^* terhubung dan bebas-sirkuit dan, karena T^* memuat n simpul, dengan induksi T^* memuat $n - 1$ garis. Oleh karena itu T memuat n garis. Argumen induktif sudah lengkap. Jadi telah ditunjukkan a) maka berlaku b).

Sekarang andaikan T terhubung dan memiliki $n - 1$ garis. Harus ditunjukkan bahwa T tidak memuat sirkuit.

Andaikan T memuat sekurang-kurangnya satu sirkuit. Karena menghilangkan sebuah garis dari sebuah sirkuit membuat sebuah graf menjadi terhubung, maka garis dapat dihilangkan, namun tidak berlaku untuk simpul, dari sirkuit dalam T sampai hasil graf T^* adalah bebas-sirkuit. Sekarang, T^* adalah graf terhubung sederhana dengan n simpul dan tidak memuat sirkuit. Dapat digunakan hasil bukti di atas, a) maka berlaku b), untuk menyimpulkan bahwa T^* memiliki $n - 1$ garis. Dengan demikian T memiliki lebih dari $n - 1$ garis. Berarti kontradiksi. Oleh karena itu T tidak memuat sirkuit. Jadi telah ditunjukkan b) maka berlaku c). Akhirnya, andaikan T tidak memuat sirkuit dan memiliki $n - 1$ garis. Harus ditunjukkan bahwa T adalah sebuah pohon, yaitu, T memiliki lintasan tunggal di antara setiap pasang simpul yang berbeda.

Pertama kali akan ditunjukkan bahwa T terhubung. Andaikan, dengan cara kontradiksi, T tidak terhubung. Misalkan

$$T_1, T_2, \ldots, T_k$$

adalah komponen-komponen dari T. Karena T tidak terhubung, $k > 1$. Andaikan T_i memiliki n_i simpul. Setiap T_i terhubung dan bebas-sirkuit, jadi dapat digunakan hasil yang telah dibuktikan sebelumnya , a) maka berlaku b), untuk membuktikan bahwa T_i memiliki $n_i - 1$ garis. Sekarang

$$n - 1 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_k - 1) \quad \text{(menghitung garis)}$$

$$< (n_1 + n_2 + \ldots + n_k) - 1 \quad \text{(karena } k > 1\text{)}$$

$= n - 1$ (menghitung simpul)

adalah tidak mungkin. Oleh karena itu T terhubung.

Andaikan terdapat lintasan-lintasan berbeda P dan $(v_0, \ldots, v_n)$ dari a sampai b dalam T. Maka, P beserta $(v_n, \ldots, v_n)$ adalah sebuah sirkuit yang mana hal demikian adalah tidak mungkin. Dengan demikian, terdapat sebuah lintasan tunggal diantara setiap pasang simpul dalam T. Oleh karena itu, T adalah sebuah pohon. Telah ditunjukkan c) maka berlaku a) dan oleh karena itu semua kondisi adalah ekivalen.

Definisi **2.2.15:**

Misalkan T adalah pohon berakar dengan akar v_0. Andaikan x, y, dan z adalah simpul-simpul dalam T dan $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah suatu lintasan dalam T. Maka :

a) v_{n-1} adalah **orang tua** (*parent*) atau **ayah** dari v_n.

b) $v_0, \ldots, v_{n-1}$ adalah **pendahulu** (*ancestor*) dari v_n.

c) v_n adalah **anak** (*child*) dari v_{n-1}.

d) Jika x adalah pendahulu y, maka y adalah turunan (*descendant*) dari x.

e) Jika x dan y anak dari z, maka x dan y bersaudara (*siblings*).

f) Jika x tidak memiliki anak, x adalah simpul akhir (*terminal vertex*) atau daun (*leaf*).

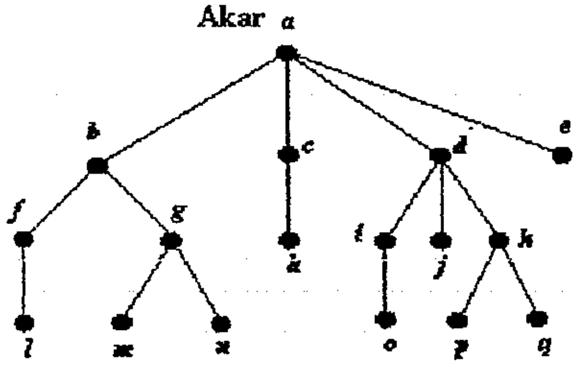
g) Jika x bukan simpul akhir, x adalah simpul dalam (*internal vertex*) atau simpul cabang (*branch vertex*).

h) Subgraf (*subgraph*) T yang terdiri dari x dan semua *descendant*-nya, dengan x dijadikan sebagai akar, adalah subpohon (*subtree*) dari T yang berakar pada x.

i) Jika x adalah suatu simpul dengan sekurang-kurangnya satu subpohon yang kosong, maka x disebut semi-daun (*semileaf*).

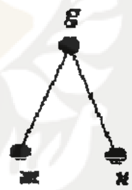
Contoh 11. Dalam pohon berakar dari gambar 4.a, diperoleh

a) Orang tua (*parent*) atau ayah dari i adalah d.
b) Pendahulu (*ancestors*) dari q adalah k, d, dan a.
c) Anak (*children*) dari a adalah b, c, d, dan e.
d) Turunan (*descendants*) dari b adalah f, g, l , m, dan n.
e) p dan q adalah bersaudara (*siblings*).
f) Simpul akhir (*terminal vertices*) adalah e, h , j, l, m, n, o, p, dan q.
g) Simpul dalam (*internal vertices*) adalah a, b, c, d, f, g, i, dan k.
h) Subpohon (*subtree*) yang berakar pada g ditunjukkan dalam gambar 4.b.



T

Gambar 4.a. Pohon berakar *T* dengan elemen-elemennya



T'

Gambar 4.b. Subpohon *T'* dari pohon *T*

2.3 Kompleksitas Waktu

Kompleksitas waktu adalah sebuah fungsi $f(n)$ yang diberikan untuk waktu tempuh atau kebutuhan storage dengan ukuran n input data. Waktu tempuh (*running time*) suatu algoritma terhadap inputan khusus (tertentu) adalah banyaknya operasi-operasi primitif atau langkah (*step*) yang dijalankan (*executed*).

Definisi **2.3.1 :**

Untuk suatu fungsi yang diberikan $g(n)$, $O(g(n))$ dinyatakan sebagai himpunan fungsi-fungsi (*set of function*)

$O(g(n)) = \{ f(n)$: terdapat konstanta positif c, dan n_0 sedemikian sehingga

$$0 \le f(n) \le cg(n) \text{ untuk setiap } n \ge n_0 \}$$

Teorema **2.3.2:**

Jika $f(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0$, maka $f(n) = O(n^m)$.

Bukti **:**

$$f(n) \le \sum_{i=0}^{m} |a_i| n^i$$

$$\le n^m \sum_{i=0}^{m} |a_i| n^{i-m}$$

$$\leq n^m \sum_{i=0}^{m} |a_i|, \text{ untuk } n \geq 1$$

Jadi, $f(n) = O(n^m)$. ■

Definisi **2.3.3 :**

*U*ntuk sebarang bilangan riil x, bilangan bulat terbesar yang kurang atau sama dengan x dinyatakan dengan $\lfloor x \rfloor$ (dibaca " ***floor*** " dari x) dan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x dinyatakan dengan $\lceil x \rceil$ (dibaca " ***ceiling*** " dari x).