BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 Matriks

Definisi 1.

Sebuah matriks didefinisikan sebagai susunan persegipanjang dari bilangan-bilangan yang diatur dalam barisan-barisan dan kolom-kolom, yang diletakkan diantara tanda ( ) atau [ ]. Dalam tugas akhir ini digunakan tanda [ ].

Matriks lazimnya akan dinyatakan oleh sebuah huruf besar dicetak tebal (**A**, **B**, dan seterusnya), dan elemen-elemen oleh huruf kecil dicetak miring (a_{ij}, b_{ij}, dan seterusnya), kecuali kalau digunakan bilangan-bilangan khusus. Sehingga matriks dapat disajikan sebagai berikut :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks yang memiliki m baris dan n kolom disebut matriks berukuran m x n.

Definisi 2.

Dua matriks **A** dan **B** dikatakan sama, ditulis **A** = **B**, jika elemen-elemen yang bersesuaian adalah sama. Maka **A** = **B** jika dan hanya jika $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i, j. Jika **A** tidak sama dengan **B**, ditulis **A** ≠ **B**.

Contoh :

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ karena $a_{12} \neq b_{12}$ dan $a_{22} \neq b_{22}$

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{A} = \mathbf{B}$

Definisi 3.

Bila diberikan sebuah matriks A dan sebuah skalar λ, hasil perkalian λ dan A, ditulis λ A, didefinisikan sebagai :

$$\lambda \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\lambda \mathbf{A} = [\lambda a_{ij}] = [a_{ij}\lambda] = \mathbf{A}\,\lambda$$

contoh :

$$\lambda = 4, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Definisi 4.

Jumlah C dari matriks A memiliki m baris dan n kolom dan sebuah matriks B memiliki m baris dan n kolom adalah sebuah matriks yang mmpunyai m baris dan n kolom yang elemen-elemennya diberikan oleh :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Ditulis secara mendetil menjadi :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Pernyataan diatas dapat disingkat menjadi :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

Contoh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+0 \\ 3+0 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Definisi 5.

Jika diberikan sebuah m x n matriks **A** dan sebuah n x r matriks **B**, hasil kali **AB** didefinisikan sebagai m x r matriks **C**, yang elemen-elemennya dihitung dari elemen-elemen dari **A**, **B** menurut :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad , i = 1, 2, \ldots, m \qquad j = 1, 2, \ldots, r$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1r} + \cdots + a_{1n}b_{nr} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1r} + \cdots + a_{mn}b_{nr} \end{bmatrix}$$

contoh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4+3.2 & 1.0+3.1 \\ 2.4+1.2 & 2.0+1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 6.

Transpose dari sebuah matriks **A** = $[a_{ij}]$ adalah sebuah matriks dibentuk dari **A** dengan menukar baris-baris dan kolom-kolom sehingga baris i dari **A** menjadi kolom i dari matriks transpose. Transpose **A** dinyatakan oleh $\mathbf{A}^t$ dan $\mathbf{A}^t = [a_{ji}]$ jika $\mathbf{A} = [a_{ij}]$

Contoh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} ; \ \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \ \mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa jika **A** adalah mxn maka $\mathbf{A}^t$ adalah nxm.

2.2 Program Linier

2.2.1. Pengertian Umum

Program linier adalah suatu cara untuk menyelesaikan persoalan pengalokasian sumber-sumber yang terbatas diantara aktivitas yang bersaing, dengan cara yang terbaik yang mungkin dilakukan. Persoalan pengalokasian ini akan muncul manakala seseorang harus memilih tingkat aktivitas-aktivitas tersebut. Beberapa contoh situasi dari uraian diatas antara lain ialah persoalan pengalokasian fasilitas produksi, persoalan pengalokasian sumber daya nasional untuk kebutuhan domestiik, dan sebagainya.

Program linier menggunakan model matematis untuk menjelaskan persoalan yang dihadapinya. Sifat "linier" disini memberi arti bahwa seluruh fungsi matematis dalam model ini merupakan fungsi-fungsi yang linier, sedangkan kata "program" disini tidaklah berhubungan dengan program komputer, tetapi hanya merupakan sinonim untuk "perencanaan". Dengan demikian, program linier adalah merencanakan aktivitas-aktivitas untuk memperoleh suatu hasil yang mencapai tujuan yang terbaik (berdasarkan model matematisnya) diantara seluruh alternatif solusi yang memenuhi pembatas yang ada.

Sebagai ilustrasi, berikut ini diberikan sebuah contoh persoalan program linier sebagai berikut :

P.T. Indah Gelas adalah suatu perusahaan yang memproduksi kaca berkualitas tinggi untuk digunakan sebagai jendela dan pintu kaca. Perusahaan ini mempunyai tiga buah mesin, yaitu mesin 1 yang membuat bingkai aluminium, mesin 2 yang membuat bingkai kayu, dan mesin 3 yang digunakan untuk memproduksi kaca dan merakit produk keseluruhan. Saat ini perusahaan mendapat pesanaan berupa dua macam produk baru yang potensial, yaitu pintu kaca setinggi 8 kaki dengan bingkai aluminium (produk A), dan jendela berukuran 4x6 kaki dengan bingkai kayu (produk B). Karena perusahaan sedang mengalami penurunan pendapatan sebagai akibat resesi dunia, maka pimpinan perusahaan merasa perlu untuk memperbaiki/mengubah lintasan produksinya dengan cara menghentikan pembuatan produk yang tidak menguntungkan sehingga kapasitas produksi dapat digunakan untuk membuat salah satu atau kedua produk baru yang potensial tersebut. Kepala bagian pemasaran telah menyimpulkan bahwa perusahaan harus dapat menjual kedua produk tersebut sebayak-banyaknya, yaitu sejumlah yang dapat dibuat dengan kapasitas yang ada. Akan tetapi, karena kedua produk itu akan bersaing untuk mnggunakan kapasitas produk yang sama di mesin 3, maka persoalannya adalah berapa banyakkah masing-masing produk harus dibuat sehingga diperoleh keuntungan terbaik ?

Dari pengamatan diperoleh data sebagai berikut :

- Mesin 1 dapat digunakan selama 4 jam /hari.
- Mesin 2 dapat digunakan selama 12 jam/hari.
- Mesin 3 dapat digunakan selama 18 jam/hari.

Satu unit produk A dapat dibuat dengan menggunakan mesin 1 selama 1 jam dan mesin 3 selama 3 jam.

Satu unit produk B dapat dibuat dengan menggunakan mesin 2 selama 2 jam dan mesin 3 selama 2 jam.

Data diatas dapat disajikan sesuai tabel 1. Berikut ini.

Produk / Mesin	Kapasitas yang digunakan per unit Nama Produk A	B	Kapasitas yang dapat digunakan (jam/hari)
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Keuntungan per unit	\$3	\$5	

Tabel 1. Data untuk P.T. Indah Gelas

Diandaikan dibuat produk A sebanyak x_1 unit dan produk B sebanyak x_2 unit, masalah diatas dapat disajikan sebagai :

Memaksimalkan : $P = 3x_1 + 5x_2$

Pembatas : $x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$x_1 + 2x_2 \leq 18$

dan $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Dengan demikian untuk m kendala dan n peubah dapat disajikan model matematisnya :

Optimalkan $P = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

Berdasarkan pembatas :

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{matrix} \begin{bmatrix} < \\ \leq \\ > \\ \geq \\ = \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{matrix}$$

dan $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$

(tentu saja yang harus kita cari adalah harga-harga $x_1, x_2, \cdots, x_n$).

Istilah yang lebih umum dari model program linier adalah sebagai berikut :

1. Fungsi yang dimaksimumkan , yaitu $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, disebut sebagai fungsi tujuan.
2. Pembatas-pembatas disebut sebagai konstrain
3. Sebanyak m buah konstrain pertama sering disebut sebagai konstrain fungsional.

4. Pembatas $x_j \geq 0$ disebut sebagai konstrain nonnegatif.
5. Variabel x_j adalah variabel keputusan

2.2.2. Bentuk Standar Model Program Linier

Bentuk standar pada masalah program linier dengan m konstrain dan n variabel keputusan dapat dinyatakan sebagai berikut:

Memaksimumkan : $\mathbf{P} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_{1n}x_n$

Pembatas :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$$

Meminimumkan : $\mathbf{P} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_{1n}x_n$

Pembatas :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$$

Dalam notasi matriks, bentuk standar masalah program linier dapat dinyatakan dalam bentuk pendek sebagai berikut :

Memaksimalkan : $\mathbf{P}_{(1x1)} = \mathbf{C}_{(1xn)}\, \mathbf{X}_{(nx1)}$

Pembatas : $\mathbf{A}_{(mxn)}\, \mathbf{X}_{(nx1)} \leq \mathbf{B}_{(mx1)}$

$$X_{(nx1)} \geq 0$$

Meminimalkan : $P_{(1x1)} = C_{(1xn)} X_{(nx1)}$

Pembatas : $A_{(mxn)} X_{(nx1)} \geq B_{(mx1)}$

$$X_{(nx1)} \geq 0$$

dimana **A** adalah suatu matriks (mxn), **X** adalah suatu vektor kolom (nx1), **B** adalah suatu vektor kolom (mx1), dan **C** adalah suatu vektor baris (1xn).

Dengan kata lain,

$$A_{(mxn)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X_{(nx1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$B_{(mx1)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \text{ dan } C_{(1xn)} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

Dalam prakteknya, **A** disebut matriks koefisien, **X** adalah vektor keputusan, **B** adalah vektor syarat, dan **C** adalah vektor keuntungan (biaya) dari program linier.

Contoh bentuk standar :

Meminimumkan : $P = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 8$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 \geq 7$$

$$x_1 \geq 0, \cdots, x_5 \geq 0$$

pada masalah ini :

$$A_{(2X5)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, X_{(5x1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, B_{(2x1)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$C_{(1x5)} = [5 \quad 2 \quad 3 \quad -1 \quad 1]$$

Untuk memahami uraian selanjutnya, berikut ini diberikan beberapa peristilahan dasar di dalam program linier.

1. Solusi fisibel

   Yang dimaksud dengan solusi fisibel dari suatu persoalan program linier adalah suatu solusi yang memenuhi seluruh pembatas yang ada pada persoalan tersebut.

2. Solusi optimum

   Yang dimaksud dengan solusi optimum adalah solusi fisibel yang memberkan nilai terbaik bagi fungsi tujuannya. Terbaik disini berarti nilai terbesar atau terkecil, bergantung pada apakah tujuannya maksimasi atau minimasi.

2.2.3. Teori Dualitas

Teori dualitas merupakan salah satu konsep program linier yang penting dan menarik ditinjau dari segi teori dan praktiknya. Ide dasar yang melatarbelakangi teori adalah bahwa setiap persoalan program linier mempunyai suatu program linier lain yang saling berkaitan yang disebut "dual". Sedemikian sehingga solusi pada persoalan semula (yang disebut "primal") juga memberi solusi padanya.

Pendefinisian dual akan bergantung pada jenis pembatas, tanda-tanda variabel, dan bentuk optimasi dari persoalan primalnya. Akan tetapi, karena setiap persoalan program linier harus dibuat dalam bentuk standar lebih dahulu sebelum modelnya dipecahkan, maka pendefinisian di bawah ini akan secara otomatis meliputi ketiga hal diatas.

Bentuk umum masalah primal-dual adalah sebagai berikut :

Primal :

Meminimumkan $\mathbf{P} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

Berdasarkan pembatas :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

dan

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$$

Dual :

Memaksimumkan : $D = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$

Berdasarkan pembatas :

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}x_n \leq c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n$$

dan

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \cdots, y_m \geq 0$$

jika dibandingkan dual persoalan di atas terdapat korespodensi antara dual dan primal sebagai berikut :

1. Koefisien fungsi tujuan primal menjadi konstanta ruas kanan bagi dual, sedangkan konstanta ruas kanan primal menjadi koefisien fungsi tujuan bagi dual.
2. Tanda ketidaksamaan pada pembatas akan bergantung pada fungsi tujuannya.
3. Fungsi tujuan berubah bentuk (maksimasi menjadi minimasi dan sebaliknya.
4. Setiap kolom pada primal berkorespondensi dengan baris (pembatas) pada dual.

5. Setiap baris (pembatas) pada primal berkorespondensi dengan kolom pada dual.
6. Dual dari dual adalah primal.

Dalam bentuk matriks dapat ditulis :

Primal :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Meminimumkan : } & \mathbf{P}_{(1\times 1)} = \mathbf{C}_{(1\times n)}\,\mathbf{X}_{(n\times 1)} \\ \text{Pembatas : } & \mathbf{A}_{(m\times n)}\,\mathbf{X}_{(n\times 1)} \geq \mathbf{B}_{(m\times 1)} \\ & \mathbf{X}_{(n\times 1)} \geq \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Dual :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Memaksimumkan : } & \mathbf{D}_{(1\times 1)} = \mathbf{B}^t_{\ (1\times m)}\,\mathbf{Y}_{(m\times 1)} \\ \text{Pembatas : } & \mathbf{A}^t_{\ (n\times m)}\,\mathbf{Y}_{(m\times 1)} \leq \mathbf{C}^t_{\ (n\times 1)} \\ & \mathbf{Y}_{(m\times 1)} \geq 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

dengan notasi Σ dapat tulis :

Primal :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Meminimumkan : } \mathbf{P} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{Pembatas : } & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \\ & x_j \geq 0 \\ & i = 1,2,\ldots,m \end{array}\right\} \quad (1)$$

Dual :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Memaksimalkan : } D = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{Pembatas :} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j \\ & y_i \ge 0 \\ & j = 1, 2, \ldots, n \end{array}\right\} \quad (2)$$

soal (2) disebut dual terhadap (1), sedang soal (1) disebut primalnya. Sebaliknya jika (2) dianggap primal, maka (1) adalah dualnya.

Diperhatikan bahwa :

- Koefisien ongkos c_j pada (1) menjadi kolom suku tetap pada (2).
- Kolom suku tetap b_i pada (1) menjadi koefisien ongkos pada (2).
- Matriks koefisien pada (2) adalah transpose matriks koefisien pada (1).

Contoh :

Dua macam makanan M_1 dan M_2 masing-masing unitnya mengandung vitamin A, B, dan C dengan kandungan tertera dalam tabel di bawah, sekaligus batas minimal masukan vitamin tersebut bagi seseorang per harinya supaya memenuhi tuntutan gizi bagi kesehatan. Satu unit M_1 harganya Rp 300,- , sedang M_2 Rp 500,-.

1 unit

Vitamin	M_1	M_2	Tuntutan gizi
A	2	4	40
B	3	2	50
C	4	1	30
Harga	300	500	

Seorang ibu asrama yang mendapat tugas untuk membeli M_1 dan M_2 dengan mengingat syarat gizi dan harus meminimalkan total biaya yang keluar akan mendapat masalah :

Menentukan :

M_1 = banyaknya unit M_1 yang harus di beli per hari.

M_2 = banyaknya unit M_2 yang harus di beli per hari.

(dua-duanya tidak negatif).

Memenuhi :

$$2m_1 + 4m_2 \geq 40$$
$$3m_1 + 2m_2 \geq 50$$
$$4m_1 + m_2 \geq 30$$

dan meminimalkan : $P = 300\, m_1 + 500\, m_2$

di lain pihak diketahui bahwa harga M_1 dan M_2 diatas tertentu, terutama kerena kandungan vitaminnya.

Seorang pemilik perusahaan farmasi yang menyediakan vitamin-vitamin penunjang diatas menghadapi masalah sebagai berikut :

Menentukan harga satuan vitamin A, B, C misalkan berturut-turut a, b, c sedemikian sehingga jumlah harga vitamin penyusun 1 unit M_1 takkan melebihi Rp 300,- . Juga jemlah harga penyusun 1 unit M_2 jangan sampai melebihi Rp 500,-

Supaya dagangannya tetap laku, timbullah soal :

Mencari a, b, c (tak negatif) yang memenuhi :

$$2a + 3b + 4c \leq 300$$
$$4a + 2b + c \leq 500$$

dan memaksimalkan uang masuk total per hari baginya ialah

D $= 40a + 50b + 30c$

inilah dual terhadap soal bagi ibu asrama di atas.

2.2.4. Dalil – Dalil Dualitas

ditulis kembali :

Primal :

mencari : $X \geq 0$

memenuhi : $AX \geq B$ (1)

meminimalkan : $P = CX$

Dual :

mencari : $W \geq 0$

memenuhi : $A^tW \leq C$ (2)

memaksimalkan : $D = B^tW$

untuk menyingkat kita gunakan :

PF = penyelesaian fisibel

PO = penyelesaian optimal

Dalil 1.

Jika **X** suatu PF soal (1) dan **W** suatu PF soal (2) maka :

$CX \geq B^tW$ ....(3)

(artinya $P(X) \geq D(W)$)

Bukti :

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ adalah PF soal (1), jadi :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \qquad , i = 1,2,\ldots,m$$

$\underline{\hspace{3cm}} \cdot w_i$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j w_i \geq b_i w_i \qquad , i = 1,2,\ldots,m$$

dengan notasi matriks dapat ditulis : $W^tAX \geq B^tW$

$\mathbf{W} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ adalah PF soal (2). Jadi :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \le c_j \qquad , j = 1,2,\ldots,n$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; . \, x_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i x_j \le c_j x_j \qquad , j = 1,2,\ldots,n$$

Dengan notasi matriks dapat ditulis $\mathbf{A^t WX} \le \mathbf{C^t X}$

Supaya bisa diperkalikan diubah menjadi $\mathbf{W^tAX} \le \mathbf{CX}$

dari kedua hasil di atas diperoleh :

$\mathbf{CX} \ge \mathbf{W^tAX} \ge \mathbf{B^tW}$, jadi $\mathbf{CX} \ge \mathbf{B^tW}$

Terbukti

Dalil 2.

Jika $\mathbf{X_0}$ adalah PF soal (1), $\mathbf{W_0}$ adalah PF soal (2) dan $\mathbf{CX_0} = \mathbf{B^tW_0}$ maka $\mathbf{X_0}$ adalah PO soal (1) dan $\mathbf{W_0}$ adalah PO soal (2), dan ini berarti $\mathbf{P_{min}} = \mathbf{D_{mak}}$

Bukti :

Diketahui $\mathbf{CX_0} = \mathbf{B^tW_0}$

Dengan (3) $\mathbf{CX} \ge \mathbf{B^tW_0} = \mathbf{CX_0}$ untuk sebarang PF bagi (1).

Jadi $\mathbf{CX} \ge \mathbf{CX_0}$, berarti $\mathbf{X_0}$ adalah PO soal (1)

Sejalan dengan cara di ataas untuk sebarang PF bagi (2) misalnya $\mathbf{W_0}$ berlaku $\mathbf{B^tW} \le \mathbf{CX_0} = \mathbf{B^tW_0}$, jadi $\mathbf{B^tW} \le \mathbf{B^tW_0}$

Jadi $\mathbf{W_0}$ adalah PO bagi (2) dan jelas bahwa :

$\mathbf{P_{min}} = \mathbf{CX_0} = \mathbf{B^tW_0} = \mathbf{D_{mak}}$ Terbukti.

2.3 TEORI GRAPH

2.3.1. Pengertian

Definisi 7.

Graph adalah himpunan sejumlah berhingga objek yang disebut titik yang dinyatakan dengan N dan suatu himpunan A yang merupakan himpunan pasangan unsur dari N yang disebut dengan sisi dengan A boleh kosong.

Notasi $G = (N, A)$

N = himpunan titik-titik (node)

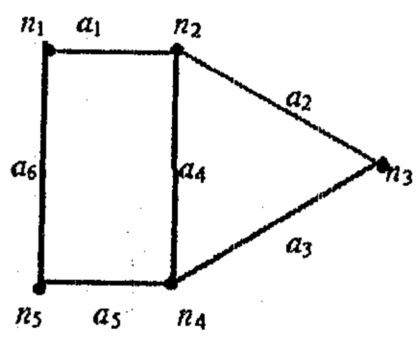
$= (n_1, n_2, \cdots, n_n)$

A = himpunan arc/sisi/garis

$= \{(n_1, n_2), (n_2, n_3), \cdots, (n_{n-1}, n_n)\}$

$= (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

contoh :



$G = (N, A)$

$N = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$

$A = \{(n_1, n_2), (n_2, n_3), (n_2, n_4), (n_3, n_4), (n_4, n_5), (n_5, n_1)\}$

$\quad = (a_1, a_2, a_4, a_3, a_5, a_6)$

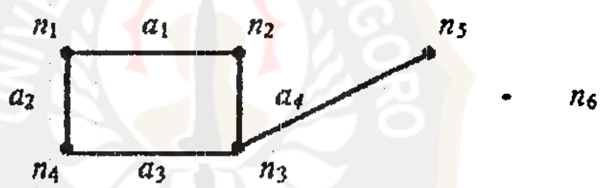
graph di atas mempunyai 5 titik (node) dan 6 sisi (arc).

Secara grafis, graph dibedakan menjadi dua yaitu :

1) *Indirect graph/***graph tidak berarah.**

Adalah suatu graph dimana sisi-sisinya tidak mempunyai arah.

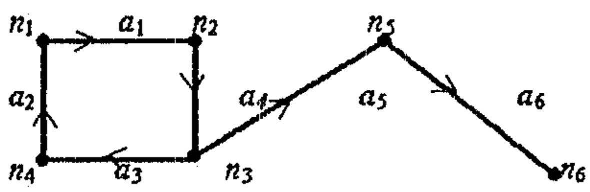
Contoh :



2) *Directed Graph/***Graph berarah**

Adalah suatu graph dimana sisi-sisinya mempunyai arah, dengan ditunjukkan anak panah pada masing-masing sisinya.

Contoh :



$a_1 = (n_1, n_2) \neq (n_2, n_1)$

Definisi 8.

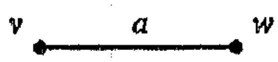
Dua sisi atau lebih busur yang menghubungkan pasangan titik-titik yang sama dalam arah yang sama disebut busur ganda dan suatu busur yang menghubungkan suatu titik ke dirinya sendiri disebut lup. Suatu digraph (*directed graph*) yang tidak mempunyai lup maupun busur ganda disebut digraph sederhana.

Contoh :

Definisi 9.

misal v dan w adalah titik-titik pada digraph. Jika v dan w dihubungkan dengan sebuah busur a, maka v dan w dikatakan berdekatan. Jika busur a diarahkan dari v ke w, maka busur a dikatakan insiden dari v dan insiden pada w.

contoh :



v dan w berdekatan

a insiden dari v dan insiden pada w

Definisi 10.

Misal D suatu digraph tanpa lup, dengan n titik berlabel 1, 2, 3,…, n dan m busur berlabel 1, 2, 3, …, m. Matriks insideni I(D) adalah matriks nxm yang setiap masukan pada baris i dan kolom j adalah :

1, jika busur e adalah insiden dari titik i

-1, jika busur e adalah insiden pada titik i

0, jika tidak demikian

catatan bahwa matriks insidensi bergantung pada cara titik dan busurnya diberi label.

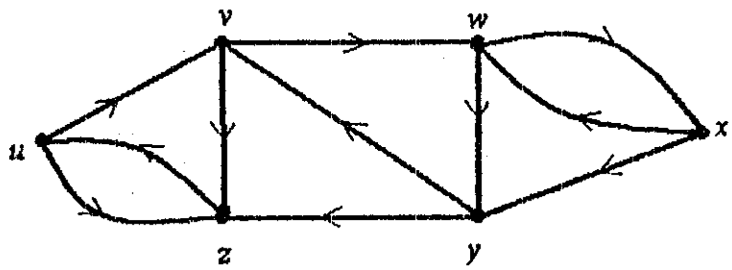
Definisi 11.

Walk yang panjangnya k pada sebuah digraph D adalah suksesi (rangkaian) k busur D.

Contoh :

$uv, vw, wx, \cdots, yz$

walk ini dinotasikan dengan $uvwx..yz$, dan ditunjuk sebagai walk dari u ke z. Jika semua busur (tetapi tidak perlu semua titik) suatu walk berbeda, maka walk itu disebut trail. Jika semua titiknya berbeda, maka trail itu disebut path.



Pada diagram diatas *vwxyvwyzu* adalah walk yang panjangnya 8 dari *v* ke *u*. Walk *vwxwyz* adalah trail (karena titik *w* muncul dua kali). *vwyz* adalah path karena tidak ada titik yang diulang.

Definisi 12.

Walk tertutup dalam digraph *D* adalah rangkaian busur-busur *D* yang bentuknya $uv, vw, wx, \ldots, yz, zu$.

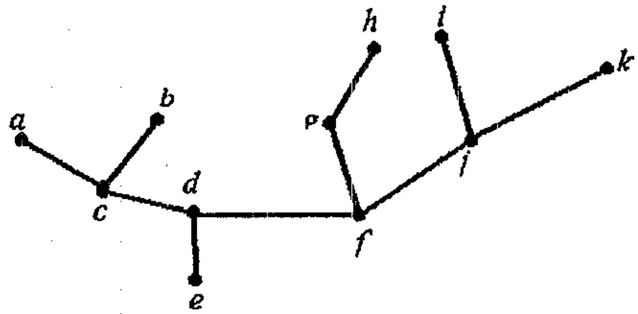
Jika semua busurnya berbeda, maka walk itu disebut trail tertutup.

Jika titik-titik $u, v, w, x, \ldots, y, z$ semuanya berbeda, maka trail tersebut disebut sikel.

Definisi 13.

Suatu graph sederhana dimana setiap pasangan titik yang berbeda dihubungkan oleh satu lintasan yang elementer disebut tree.

Contoh :

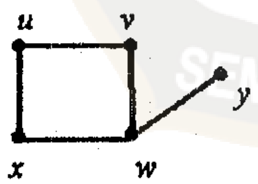


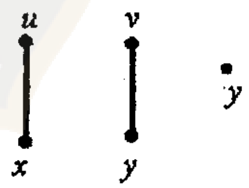
Definisi 14.

Graph terhubung (*connected graph*) adalah graph dimana setiap pasang titik-titiknya dihubungkan oleh path, dan sebaliknya disebut graph tak terhubung (*disconnected graph*).

Contoh :

Graph terhubung graph tak terhubung



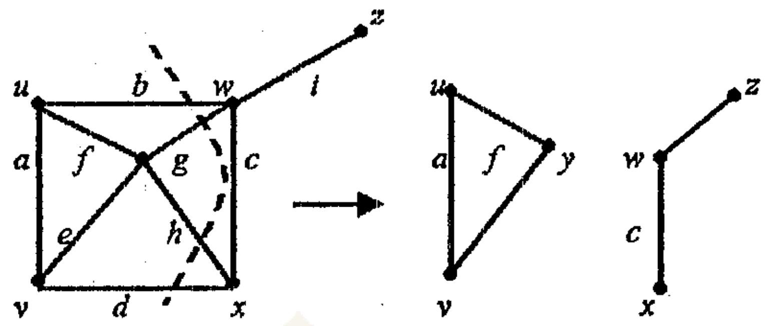


2.3.2. Himpunan Potong

Pengertian :

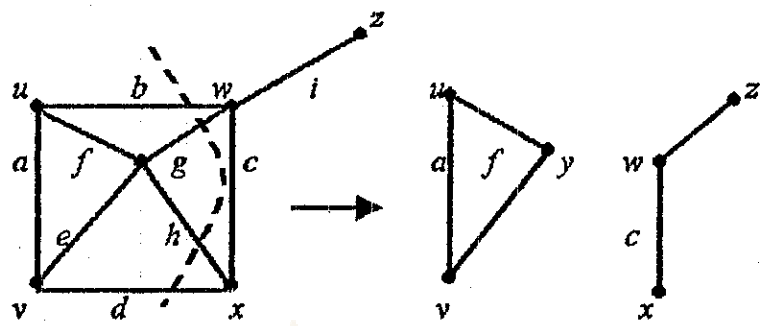
Dalam graph terhubung, himpunan potong adalah himpunan garis (arc) graph yang apabila himpunan garis graph tersebut dihilangkan dari graph *G* akan menghasilkan graph *G* yang tak terhubung.

Contoh :



himpunan arc {*b*, *g*, *h*, *d*} dalam graph terhubung *G* adalah merupakan himpunan potong, sebab jika arc-arc tersebut dihilangkan dari *G* maka *G* akan menjadi graph tak terhubung (seperti gambar diatas). Sedangkan himpunan arc {*f*, *h*, *e*, *d*} bukan merupakan himpunan potong, sebab jika arc-arc tersebut dihilangkan, *G* tetap terhubung.

Contoh :



himpunan arc {*b*, *g*, *h*, *d*} dalam graph terhubung *G* adalah merupakan himpunan potong, sebab jika arc-arc tersebut dihilangkan dari *G* maka *G* akan menjadi graph tak terhubung (seperti gambar diatas). Sedangkan himpunan arc {*f*, *h*, *e*, *d*} bukan merupakan himpunan potong, sebab jika arc-arc tersebut dihilangkan, *G* tetap terhubung.