BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. RUANG SAMPEL

Sebelum membahas lapangan σ terlebih dahulu dibicarakan mengenai definisi ruang sampel.

Definisi 2.1.1

Setiap hasil (outcome) yang mungkin dari suatu eksperimen disebut titik sampel, dinotasikan dengan ω. Keseluruhan dari semua hasil (outcome) yang mungkin dari suatu eksperimen disebut ruang sampel, dinotasikan dengan Ω.

Definisi 2.1.2

Peristiwa (event) adalah suatu himpunan bagian dari Ω (ruang sampel).

Peristiwa (event) dinotasikan dengan A, B, dan sebagainya. Peristiwa (event) yang terdiri dari satu hasil (outcome) ω_o disebut singleton dinotasikan dengan $\{\omega_o\}$. Kelas dengan anggota-anggotanya semua peristiwa (event) yang mungkin dari suatu eksperimen disebut kelas peristiwa (kelas event) dinotasikan dengan $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, dan seterusnya.

2.2. LAPANGAN DAN LAPANGAN σ

2.2.1. LAPANGAN

Anggap $\mathcal{F}$ adalah kelas dari semua himpunan bagian Ω. Jika dengan operasi satu atau beberapa elemen $\mathcal{F}$ diperoleh suatu elemen dari kelas yang sama, maka kelas ini tertutup dibawah operasi. Sebagai contoh

$A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$, dikatakan $\mathcal{F}$ tertutup dibawah komplemennya.

$A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$, dikatakan $\mathcal{F}$ tertutup dibawah gabungannya.

Selanjutnya jika $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ maka $\bigcup_i^n A_i \in \mathcal{F}$, $\forall n < \infty$ sehingga $\mathcal{F}$ tertutup dibawah gabungannya.

Demikian pula jika $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$ maka

$$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}, \quad \forall n < \infty,$$

karenanya $\mathcal{F}$ tertutup dibawah irisan berhingga.

Contoh 2.2.1.

$\mathcal{E}$ adalah kelas dari semua interval pada (x, ∞), $x \in \mathbb{R}$

$$(x, \infty) \cup (y, \infty) = (u, \infty), \ u = \min(x, y)$$

$$(x, \infty) \cap (y, \infty) = (v, \infty), \ v = \max(x, y)$$

Karenanya $\mathscr{E}$ tertutup dibawah gabungan berhingga dan irisan berhingga. Tetapi $\mathscr{E}$ tidak tertutup dibawah komplemennya karena $(x,\infty)^c = (-\infty,x] \notin \mathscr{E}$. ■

Definisi 2.2.2

Diambil Ω adalah suatu ruang sampel yang tidak kosong. Suatu kelas $\mathscr{F}$ yang terdiri dari himpunan bagian-himpunan bagian Ω disebut suatu lapangan jika kelas tersebut memuat Ω dan tertutup dibawah komplemennya dan gabungan berhingga.

(i) $\Omega \in \mathscr{F}$

(ii) $A \in \mathscr{F} \Longrightarrow A^c \in \mathscr{F}$

(iii) $A, B \in \mathscr{F} \Longrightarrow A \cup B \in \mathscr{F}$

Dengan hukum De Morgan, $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ dan $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$. Jika $\mathscr{F}$ tertutup dibawah komplemennya, karena itu $\mathscr{F}$ tertutup dibawah irisan berhingga. Selanjutnya (iii) dapat diganti dengan

(iii´) $A, B \in \mathscr{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathscr{F}$ ■

Setiap lapangan memuat $\emptyset$ dan Ω. Kelas yang hanya memuat $\emptyset$ dan Ω juga disebut lapangan. Ini adalah lapangan terkecil dan termuat dalam setiap lapangan yang lain.

Sedangkan lapangan yang terbesar dalam Ω memuat semua himpunan bagian dari Ω.

Contoh 2.2.3

Misal Ω terdiri dari empat elemen a,b,c,d dan $\mathcal{E}$ terdiri dari himpunan {a} dan {b}. Dengan menambahkan pada $\mathcal{E}$ komplemen {a} dan {b} dan gabungan serta irisannya, didapatkan kelas $\mathcal{E}$ terdiri dari himpunan-himpunan $\emptyset$, {a}, {b}, {a,b}, {c,d}, {b,c,d}, {a,c,d}, Ω adalah tertutup dibawah komplementasi dan gabungan berhingga. Karena itu $\mathcal{E}$ adalah suatu lapangan. Dan ini adalah merupakan lapangan terkecil yang memuat {a} dan {b}. ■

2.2.2. LAPANGAN σ

Suatu kelas yang tertutup dibawah operasi-operasi berhingga tidak berarti tertutup dibawah operasi-operasi terhitung. Pada contoh 2.2.1 terlihat bahwa kelas $\mathcal{E}$ terdiri dari semua interval pada (x,∞), $x \in \mathbb{R}$ tertutup dibawah irisan berhingga tetapi tidak tertutup dibawah irisan terhitung, sebab

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(x-1/n,\infty) = [x,\infty)\notin\mathcal{E}$$

Definisi 2.2.4

Suatu kelas $\mathcal{F}$ dari himpunan-himpunan bagian Ω sebarang yang tidak kosong adalah suatu lapangan-σ

jika kelas tersebut adalah suatu lapangan dan tertutup dibawah gabungan terhitung :

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Longrightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{F}$$ ■

Definisi 2.2.5

Misalkan $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ adalah barisan tak berhingga himpunan anggota $\mathcal{F}$. Bila gabungan terhitung dan irisan terhitung dari himpunan tersebut juga ada dalam $\mathcal{F}$ maka $\mathcal{F}$ disebut lapangan Borel. ■

Pada subbab 2.1 telah didefinisikan bahwa Ω adalah keseluruhan hasil (outcome) yang mungkin dari suatu eksperimen. Dan jika $\mathcal{F}$ adalah suatu kelas peristiwa (kelas event), dimana $\mathcal{F}$ merupakan suatu lapangan σ dari peristiwa (event) maka $(\Omega, \mathcal{F})$ dikatakan ruang terukur.

2.3. FUNGSI TERUKUR

Andaikan Ω dalah ruang sampel dan ω adalah titik sampel. X adalah suatu fungsi dengan domain Ω dan range $\mathbb{R}$, dimana $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan riil. Dinotasikan dengan

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Untuk setiap $\omega \in \Omega$ dipetakan ke $X(\omega)=\omega'$, $\omega' \in \mathbb{R}$.

Andaikan $B' \subset \mathbb{R}$. Himpunan semua titik dari Ω untuk

$X(\omega) \in B'$ disebut invers dari $X(B')$, dinotasikan dengan $X^{-1}(B')$:

$$X^{-1}(B') = [\omega; X(\omega) \in B']$$

Jadi dengan setiap titik fungsi X, diasosiasikan suatu fungsi himpunan X^{-1}, yang domainnya adalah kelas $\mathcal{B}'$ himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ dan rangenya adalah kelas $\mathcal{B}$ himpunan bagian dari Ω. X^{-1} disebut fungsi invers dari X. Dinotasikan

$$X(B) = [X(\omega); \omega \in B], \; B \subset \Omega.$$

$$X^{-1}(\mathcal{B}') = \{X^{-1}(B'); B' \in \mathcal{B}'\}$$

Jelasnya, $X^{-1}(\mathbb{R}) = [\omega; X(\omega) \in \mathbb{R}]$.

Andaikan $\mathcal{B}$ adalah lapangan Borel dari himpunan bagian dari $\mathbb{R}$, dan $\mathcal{F}$ adalah lapangan σ dari himpunan bagian dari Ω. Jika $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ untuk semua himpunan Borel $B \in \mathcal{B}$, X dikatakan fungsi terukur $\mathcal{F}$.

Contoh 2.3.1

Misalkan fungsi bilangan riil I_A didefinisikan pada Ω sebagai berikut:

$$I_A(\omega) = 1, \text{ jika } \omega \in A$$

$I_A(\omega) = 0$, jika $\omega \in A^c$

Jika $B \subset \mathbb{R}$ adalah ruang range, maka

$I_A^{-1}(B) = \emptyset$, jika B tidak memuat 0 atau 1

$= A$, jika B memuat 1 tapi tidak memuat 0

$= A^c$, jika B memuat 0 tapi tidak memuat 1

$= \Omega$, jika B memuat 0 dan 1

$I_A^{-1}(\mathcal{B}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\} = \sigma(A)$.

$I_A^{-1}(B) \in \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$. Selama $\mathcal{F}$ adalah lapangan σ pada Ω, jika $A \in \mathcal{F}$, maka $A^c \in \mathcal{F}$ dan karenanya $I_A^{-1}(B) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \in \mathcal{F}$. Jadi I_A adalah $\mathcal{F}$-terukur jika $A \in \mathcal{F}$. ■

2.4. RUANG PROBABILITAS

Definisi 2.4.1

μ adalah suatu ukuran jika fungsi μ didefinisikan pada $(\Omega, \mathcal{F})$ memiliki sifat:

(i) $\mu(A) \geq 0$

(ii) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ ■

Himpunan yang ukuran μ-nya nol disebut himpunan μ null. Dengan penjumlahan, gabungan terhitung dari himpunan μ null adalah μ null.

Definisi 2.4.2

Diberikan suatu ukuran μ didefinisikan pada lapangan σ $\mathcal{F}$, dan ukuran $\bar{\mu}$ didefinisikan pada $\mathcal{F}_\mu$ kelas dari semua himpunan $A \cup N$, dimana $A \in \mathcal{F}$ dan N adalah μ null sebagai berikut. $\mathcal{F}_\mu$ dikatakan pelengkap (completion) dari $\mathcal{F}$ jika

$$\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$$ ■

Definisi 2.4.3

Ω sebarang himpunan, $\mathcal{F}$ adalah lapangan σ dalam Ω dan P adalah fungsi himpunan dengan domain $\mathcal{F}$ dan kodomain [0,1], memenuhi :

1. $0 \leq P(F) \leq 1, \forall F \in \mathcal{F}$

2. $F_n \in \mathcal{F}$ sedemikian hingga

$$F_i \cap F_j = \emptyset$$

untuk $i \neq j$ dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$, maka

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n)$$

3. $P(\Omega) = 1$

Maka $(\Omega,\mathcal{F},P)$ adalah ruang probabilitas. Anggota dari $\mathcal{F}$ disebut peristiwa dan harga P pada setiap $F\in\mathcal{F}$ disebut probabilitas dari peristiwa. ■

2.5. PROSES STOKASTIK

Menurut J. Medhi (1982) proses stokastik adalah himpunan variabel random yang merupakan fungsi waktu atau sering pula disebut proses random. Kerandoman diperoleh dari pengertian ruang terukur $(\Omega,\mathcal{F})$ yang disebut sebagai ruang sampel yang ukuran probabilitasnya bisa ditetapkan. Jadi, proses stokastik adalah suatu koleksi dari variabel random $X=\{X_t;0\le t<\infty\}$, yang memuat nilai-nilai dalam ruang terukur $(S,\mathcal{S})$. $(S,\mathcal{S})$ disebut ruang state yaitu suatu himpunan yang memuat nilai-nilai yang mungkin untuk suatu variabel random X_t dari suatu proses stokastik $\{X_t;0\le t<\infty\}$. Ruang state $(S,\mathcal{S})$ menjadi ruang Euclid berdimensi d dilengkapi dengan lapangan-σ dari himpunan Borel, yaitu $S=\mathbb{R}^d$, $\mathcal{S}=\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, dimana $\mathcal{B}(U)$ selalu digunakan untuk menunjukkan lapangan-σ terkecil yang memuat semua himpunan terbuka dari ruang topologi U.

Untuk titik sampel $\omega \in \Omega$ tertentu, fungsi $t \longrightarrow X_t(\omega)$; $t\ge 0$ adalah lintasan sampel (trayektori) dari proses X berasosiasi dengan ω. Hal ini memberikan model matematika untuk eksperimen random yang hasilnya diamati secara kontinu dalam waktu.

Definisi 2.5.1

Proses stokastik X dikatakan terukur jika untuk setiap $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ himpunan $\{(t,\omega); X_t(\omega) \in A\}$ termuat dalam product lapangan σ, $\mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F}$; dengan kata lain, jika

$$X_t : ([0,\infty) \times \Omega, \mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

adalah terukur. ■

Ruang sampel $(\Omega, \mathcal{F})$ dilengkapi dengan filtrasi, yaitu keluarga tidak menurun $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ dari sub lapangan-σ dari $\mathcal{F} : \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ untuk $0 \leq s < t < \infty$. Diambil

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t).$$

Diberikan proses stokastik, pilihan paling sederhana dari filtrasi adalah yang dibangun oleh proses itu sendiri, yaitu

$$\mathcal{F}_t^X \triangleq \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t)$$

lapangan-σ terkecil yang memuat variabel terukur X_s, $s \in [0,t]$.

Definisi 2.5.2

Proses stokastik X bersesuaian terhadap filtrasi $\{\mathcal{F}_t\}$

jika untuk setiap $t \geq 0$, X_t adalah suatu variabel random terukur $\mathcal{F}_t$ ■

Definisi 2.5.3

Ruang metrik adalah suatu pasangan (S,ρ), dimana S adalah himpunan dan ρ adalah metrik di S (fungsi jarak di S), yaitu

$$\rho : S \times S \longrightarrow \mathbb{R},$$

dengan $S=\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}$ = himpunan bilangan riil sedemikian hingga untuk semua $x,y,z \in S$ harus dipenuhi:

(i) $\rho(x,y) \geq 0$

(ii) $\rho(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

(iii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

(iv) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ ■

Nilai $\rho(x,y)$ dinamakan jarak dari x ke y, atau dengan kata lain $\rho(x,y) = |x-y|$.