BAB II

DUALITAS DALAM REGRESI MINMAD

Model regresi linier yang biasa digunakan adalah regresi linier berganda yaitu model regresi yang menggunakan lebih dari satu variabel bebas. Regresi tersebut biasa digunakan secara luas untuk memecahkan kasus dalam berbagai macam bidang ilmu, baik ilmu sosial ataupun ilmu tehnik. Untuk mencari koefisiennya dapat digunakan metode kuadrat tekecil,dengan assumsi kenormalan. Apabila assumsi kenormalan tidak dipenuhi, salah satu metode yang dapat digunakan untuk mencari koefisien-koefisien persamaan regresi linier adalah dengan metode regresi MINMAD

Dalam bab ini akan dibahas akan dibahas sekilas mengenai regresi MINMAD, dualitas dalam program linier dan dualitas dalam regresi MINMAD.

2.1. Regresi MINMAD (Minimizing Mean Absolut Deviations)

Andaikan terdapat variabel tidak bebas y dan variabel bebas x sebanyak p variabel, kedua variabel tersebut diasumsikan mempunyai hubungan linier, maka didapatkan sebuah model linier sebagai berikut:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p + \varepsilon \qquad (2.1)$$

yang disebut model regresi linier berganda dengan p variabel bebas. Parameter β_i , i =1,2,..,p, disebut koefisien regresi.

Pandang model regresi linier (2.1) diatas ,Yang didapatkan dari data pengamatan (X_j , Y_j),j = 1,2,...,n. Koefisien β_1 ,β_2 , ...,β_p dapat dicari dengan syarat

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|d_j| = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|Y_j - \hat{Y}_j| \qquad (2.2)$$

diminimalkan. Persamaan (2.2) diketahui sebagai rata-rata kesalahan absolut (Mean Absolut Deviation). Dimana menurut Arthanari dan Dodge(1980) meminimalkan MAD sama dengan meminimalkan SAD(Sum Absolut Deviation).

$$SAD = \sum_{j=1}^{n}|d_j| = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|Y_j - \hat{Y}_j| \qquad (2.3)$$

Untuk mendapatkan koefisien regresi dapat digunakan dengan metode simpleks, yaitu metode simpleks dengan variabel terbatas.

Selanjutnya Persoalan regresi MINMAD dapat dinyatakan sebagai berikut:

Minimalkan : $Z = \sum|d_j|$

Dengan kendala : $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{d} = \mathbf{Y}$

$\mathbf{d}$, $\boldsymbol{\beta}$ tidak terbatas dalam tanda (2.4)

Untuk titik data pengamatan ke-j terdapat d_{1j} yang merupakan deviasi atas regresi dan d_{2j} yang merupakan deviasi bawah regresi, sehingga $|d_j| = d_{1j} + d_{2j}$ dan $d_j = d_{1j} - d_{2j}$.

Selanjutnya (2.4) dapat dinyatakan sebagai berikut:

Minimalkan : $Z = \sum d_{1j} + \sum d_{2j} = \sum (d_{1j} + d_{2j})$

Dengan kendala $X\beta + \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2 = \mathbf{Y}$

β tidak terbatas dalam tanda

$\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2 \geq 0$ (2.5)

Z merupakan fungsi tujuan.

Untuk menyelesaikan masalah (2.5) diperlukan definisi-definisi sebagai berikut:

Definisi 2.1.1

Variabel keputusan adalah variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan-keputusan yang akan dibuat.

Definisi 2.1.2

Fungsi tujuan adalah fungsi dari variabel keputusan yang akan dimaksimalkan atau diminimalkan.

Definisi 2.1.3

Pembatas adalah kendala yang akan dihadapi sehingga bisa ditentukan harga-harga variabel keputusan keputusan secara sembarang.

Definisi 2.1.4

Pembatas tanda adalah pembatas yanng menjelaskan apakah variabel keputusannya diasumsikan hanya berharga nonnegatif atau boleh berharga positif dan boleh juga berharga negatif(tidak terbatas dalam tanda).

Definisi 2.1.5

Daerah fisibel adalah himpunan dari semua titik yang memenuhi seluruh pembatas termasuk pembatas tanda.

Definisi 2.1.6

Sebarang **W** yang memenuhi **AW=Y** disebut sebagai solusi,dimana **I** merupakan matriks identitas nxn.

Definisi 2.1.7

Misalkan **C'** merupakan vektor (**0**,e',e') ,dimana **0** merupakan vektor 1xp dan **e'** =(1,1,...,1) merupakan vektor 1xn, maka **C'W** disebut fungsi tujuan .

Definisi 2.1.8

Sebarang solusi W jika memenuhi

$$W_j \geq 0, \qquad j=p+1,\ldots,p+2n$$

maka solusi tersebut disebut solusi fisibel.

Definisi 2.1.9

Himpunan n kolom bebas linier dari matriks **A** disebut basis dari **A**.

Misalkan **B**=[a_{11} , a_{22},. . . , a_{nn}]merupakan basis maka terdapat n+p kolom yang tidak terdapat dalam **B** yang disebut kolom nonbasis.

Definisi 2.1.10

Solusi optimal adalah suatu titik pada daerah fisibel dengan nilai fungsi tujuan yang paling menguntungkan. Untuk masalah maksimisasi, solusi optimal adalah suatu titik pada daerah fisibel dengan nilai fungsi tujuan terbesar dan pada masalah minimisasi, solusi optimal adalah suatu titik pada daerah fisibel dengan nilai fungsi tujuan terkecil.

2.2. Dualitas Dalam Program Linier

Teori dualitas merupakan salah satu konsep program linier yang penting dan menarik dari segi teori dan praktiknya. Ide dasar yang melatarbelakangi teori ini adalah bahwa setiap persoalan program linier mempunyai suatu program linier lain yang saling berkaitan yang disebut "dual", sedemikian sehingga solusi pada persoalan semula(yang disebut "primal") juga memberi solusi pada dualnya.

Pendefinisian dual ini tergantung pada jenis pembatas, tanda, variabel, dan bentuk optimisasi dari persoalan primalnya. Andaikan diberikan fungsi objektif **C'W** dengan **C** merupakan koefisien fungsi tujuan dan **W** adalah variabel fungsi objektif, dan terdapat pembatas **AW ≥b**, dengan **A** adalah koefisien-kopefisien pembatas, **W** merupakan solusi dari permasalahan yang sesuai dengan fungsi objektifnya dan **b** batas untuk setiap persamaan pembatas. Variabel **W** dalam pembatas harus nonnegatif, selanjutnya permasalahan diatas dianggap sebagai permasalahan primal, yang dapat digambarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\text{Minimalkan} && \mathbf{C'W} \\ &\text{Pembatas} && \mathbf{AW} \geq \mathbf{b} \\ & && \mathbf{W} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Dual permasalahan diatas didefinisikan sebagai berikut:

Maksimalkan $\mathbf{b' U}$

Pembatas $\mathbf{A'U \leq C}$

$$\mathbf{U \geq 0} \qquad (2.7)$$

U merupakan solusi pada dual , Dari perumusan diatas terlihat bahwa solusi **W** pada primal diubah menjadi **U** pada dual. Jadi kedudukan **W** dan **U** tersebut sama, yaitu keduannya merupakan solusi masing-masing permasalahan. Dalam permasalahan program linier, beberapa pembatas seperti

$$a_{i1}W_1+a_{i2}W_2+\ldots+a_{in}W_n \leq b_i$$

adalah ekuivalen dengan dengan

$$-a_{i1}W_1-a_{i2}W_2-\ldots-a_{in}W_n \geq -b_i$$

demikian juga, beberapa persamaan, sebagai berikut:

$$a_{i1}W_1+a_{i2}W_2+\ldots+a_{in}W_n = b_i$$

adalah ekuivalen dengan dua pembatas,

$$a_{i1}W_1+a_{i2}W_2+\ldots+a_{in}W_n \geq b_i$$

$$-a_{i1}W_1-a_{i2}W_2-\ldots-a_{in}W_n \geq -b_i$$

Demikian Juga, jika terdapat fungsi objektif **C'W** dimaksimalkan ekuivalen dengan fungsi objektif **-C' W** yang diminimalkan.

Teorema 2.2.1

Dual dari dual permasalahan (2.7) adalah primal (2.6).

Bukti:

bentuk dual (2.7) disajikan sebagai berikut:

Minimalkan $-\mathbf{b}'\,\mathbf{U}$

Pembatas $-\mathbf{A}'\mathbf{U} \geq -\mathbf{C}$ dan $\mathbf{U} \geq 0$

bentuk dual dari permasalahan diatas adalah:

Maksimalkan $-\mathbf{C}'\mathbf{W}$

Pembatas $-\mathbf{A}\mathbf{W} \leq -\mathbf{b}$

$\mathbf{W} \geq 0$

yang ekuivalen dengan permasalahan (2.6). ■

Apabila dibandingkan persoalan primal dan dual diatas, ternyata terdapat korespondensi antara keduanya sebagai berikut:

1. Koefisien fungsi tujuan primal yaitu **C** menjadi konstanta ruas kanan bagi dual, sedangkan konstanta ruas kanan primal yaitu **b** menjadi koefisien tujuan bagi dual.
2. Untuk setiap pembatas primal ada satu variabel dual, dan untuk setiap variabel primal ada satu pembatas dual.
3. Tanda ketidaksamaan pembatas akan tergantung pada fungsi tujuan.
4. Fungsi tujuan berubah bentuk (minimisasi menjadi maksimisasi dan sebaliknya).
5. Setiap kolom pada primal berkorespondensi dengan baris (pembatas) pada dual, yaitu bentuk **A** pada primal menjadi **A'** pada dual.
6. Setiap baris (pembatas) pada primal berkorespondensi dengan kolom pada dual.
7. Dual dari dual adalah primal.

2.3. Dualitas Dalam Regresi MINMAD

Diberikan model regresi(2.1), untuk mendapatkan parameter β_i, i=1,2,...,p dapat digunakan metode MINMAD, Telah diketahui bahwa metode MINMAD berhubungan dengan perhitungan dalam program linier. Oleh karena itu diperlukan perumusan MINMAD(2.5) yang sesuai dengan perumusan dalam program linier, yaitu sebagai berikut:

Minimalkan **C' W**

Pembatas **AW = Y**

$W_{P+r} \geq 0$, r = 1,2,...,2n

$W_1, \ldots, W_P$ (2.8)

dengan **A = (X, I, -I)** merupakan matrik nxp+2n

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} & 1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

W = (β, d₁ , d₂) merupakan vektor p+2nx1

W = $[\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p\ d_{11}, d_{12}, \ldots, d_{1n}, d_{21}, d_{22}, \ldots, d_{2n}]$

Permasalahan MINMAD secara program linier diatas dianggap sebagai permasalahan primal, selanjutnya akan dinyatakan dalam dual sebagai berikut:

Maksimalkan **Y'λ**

Pembatas $\mathbf{A'\lambda} = \begin{bmatrix} X' \\ I \\ I \end{bmatrix} \lambda \begin{matrix} = \\ \leq \\ \leq \end{matrix} C = \begin{bmatrix} 0 \\ e' \\ e' \end{bmatrix}$ (2.9)

λ adalah solusi permasalahan dual merupakan vektor nx1. Sehingga terdapat n variabel yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dan pembatas 2n+p. p tersebut berupa persamaan dan pertidaksamaan.

Untuk lebih menjelaskan perubahan dari bentuk primal ke bentuk dual, perhatikan contoh berikut ini:

Andaikan diberikan sebuah data penelitian X sebagai variabel babas dan Y sebagai variabel terikat yang diassumsikan mempunyai hubungan linier . Data tersebut disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

. Akan dicari persamaan regresi $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2$ dari kedua data tersebut dengan metode variabel terbatas. Sehingga diperlukan perumusan masalah MINMAD sebagai berikut:

Minimalkan : $\sum d_{1j} + \sum d_{2j}$

Pembatas : $\mathbf{X\beta} + \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2 = \mathbf{Y}$

dengan $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

permasalahan tersebut dianggap sebagai permasalahan primal. Karena metode yang digunakan untuk mencari koeffisien persamaan menggunakan metode MINMAD variabel terbatas , maka yang akan dipecahkan adalah bentuk dual dari permasalahan primal. Sehingga diperlukan perumusan masalah dual sebagai berikut:

Maksimalkan : $3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 + 6\lambda_4 + 4\lambda_5 + 3\lambda_6$

Pembatas
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ tidak terbatas dalam tanda

Pembatas kedua dan ketiga dapat dibentuk secara ekuivalen sebagai berikut:

$-1 \leq \lambda_i \leq 1$. Dari perumusan masalah tersebut selanjutnya dicari solusi optimalnya dengan metode MINMAD Variabel terbatas yang akan dijelaskan pada pembahasan selanjutnya

Akan ditentukan hubungan antara persamaan dual (2.9) dengan permasalahan regresi MINMAD (2.5)

Teorema 2.3.1

Untuk beberapa solusi fisibel MINMAD (2.5) dan beberapa solusi dari dual didapatkan

$$\mathbf{Y}'\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{C}'\mathbf{W}$$

Bukti

Jika **W** adalah sebuah pemecahan layak bagi (2.5), maka **AW** = **Y**. Kalikan persamaan tersebut dengan $\boldsymbol{\lambda}'$ di sebelah kanannya sehinga diperoleh $\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{AW} = \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{Y}$ yang ekuivalen dengan

$$\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{AW} = \mathbf{Y}'\boldsymbol{\lambda} \qquad (2.10)$$

karena $\mathbf{Y}'\boldsymbol{\lambda}$ adalah sebuah skalar.

Jika $\boldsymbol{\lambda}$ adalah sebuah pemecahan layak bagi (2.9) maka didapat $\mathbf{A}'\boldsymbol{\lambda}\begin{Bmatrix} = \\ \leq \\ \leq \end{Bmatrix}\mathbf{C}$

atau $\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{A}\begin{Bmatrix} = \\ \leq \\ \leq \end{Bmatrix}\mathbf{C}'$, kalikan peridaksamaan ini dengan vektor tidak negatif **W**sebelah kanannya maka diperoleh:

$$\lambda' AW \begin{Bmatrix} = \\ \leq \\ \leq \end{Bmatrix} C'W \tag{2.11}$$

Dari hubungan (2.10) dan (2.11) didapatkan $\mathbf{Y'\lambda \leq C'W}$. ■

Selanjutnya akan diberikan syarat-syarat untuk beberapa $\mathbf{W^*}$, λ^* yang merupakan solusi optimal untuk permasalahan (2.5) dan untuk permasalahan dualnya.

Teorema 2.3.2

Jika $\mathbf{W^*}$ adalah fisibel untuk (2.5) dan λ^* beberapa solusi untuk dual dan $\mathbf{C'W^*=Y'\lambda^*}$,maka λ^* adalah solusi optimal untuk permasalahan dual dan $\mathbf{W^*}$ optimal untuk (2.5)

Bukti:

Dari teorema (2.3.1) telah didapatkan bahwa $\mathbf{C'W^* \geq Y'\lambda^*}$ untuk beberapa solusi λ (2.3.1),tetapi $\mathbf{C'W^* = Y'\lambda^*}$. Maka $\mathbf{Y'\lambda^* \geq C'W^*}$ atau λ^* adalah optimal untuk permasalahan dual. Karena $\mathbf{C'W^*=Y'\lambda^*}$ maka $\mathbf{W^*}$adalah optimal untuk (2.5).■

Teorema 2.3.3

Pandang solusi basis fisibel optimal $\mathbf{W_B}$ untuk permasalahan (2.5). Maka $\lambda' = C_B B^{-1}$ solusi optimal untuk permasalahan dual, dan nilai fungsi objektifnya sesuai.

Bukti:

Karena $\mathbf{W}_B$ optimal untuk (2.5), maka C_j-Z_j=0 untuk semua variabel-variabel tidak terbatas, dan C_j-$Z_j \geq 0$ untuk semua variabel-variabel terbatas positif. Maka

Z_j= $\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$ =C_j untuk semua variabel-variabel tidak terbatas dan C_j=0, untuk j=1, ... , p. Juga

$$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j= \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_r \leq C_j =1, \qquad j=p+r, \qquad r=1,2, \ldots , n$$

dan

$$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j= \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}(-\mathbf{e}_r) \leq C_j = 1, \qquad j=p+n+r, \qquad r=1,2, \ldots ,n$$

Maka $\boldsymbol{\lambda}'=\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ memenuhi semua pembatas dari (2.9). ■

Sekarang pandang fungsi objektif dual,

$$\mathbf{Y}'\boldsymbol{\lambda}= \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Y}.$$

$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Y}=\mathbf{W}_B$. Maka $\mathbf{Y}'\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{C}_B\,\mathbf{W}_B=\mathbf{Z}$. Dari Teorema (2.3.2) $\boldsymbol{\lambda}$ adalah optimal untuk permasalahan (2.9). Sebagaiman Teorema (2.3.3), dapat dipecahkan permasalahan MINMAD(2.5) dan dicari solusi yang optimal.

Dari permasalahan (2.9) ditemukan bahwa dual tersebut sesuai dengan definisi umum dual dalam permasalahan program linier. Dalam regresi MINMAD terdapat kondisi dimana permasalahan dual mempunyai baris yang lebih banyak dari permasalahan (2.9), oleh karena itu diperlukan baris yang lebih besar saat memecahkan dual. Juga diperlukan penambahan 2n lebih variabel pembatas dalam tanda untuk membuat pembatas-pembatas pertidaksamaan dalam dual kedalam persamaan-persamaan. Walaupun begitu dapat dikurangi banyak perhitungan yang muncul dengan melakukan transformasi sebagai berikut:

Misalkan $V = \lambda + e$

maka $Y'\lambda = Y'V - Y'e$,dimana $Y'e$ merupakan konstanta

oleh karena itu meminimalan $Y'\lambda$ sama dengan meminimalkan $Y'V$.

$A'\lambda = A'(V-e)$

$$= \begin{bmatrix} X'V - X'e \\ V - e \\ -V + e \end{bmatrix}$$

sesuai dengan (2.9) ,maka pembatas diatas menjadi

$X'V = X'e$

$V \leq e + e$

$-V \leq e - e$

atau apabila disajikan dalam bentuk lain menjadi berikut:

$X'V = X'e$

$0 \leq V \leq 2e$

Sehingga didapatkan permasalahan umum

Maksimalkan $Y'V$

Pembatas $X'V = X'e$

$0 \leq V \leq 2e$ (2.12)

dengan Y = Matriks nilai observasi berukuran 1xn

V = Variabel solusi berbentuk matrik kolom berukuran nxi

X = Data pengamatan berbentuk Matriks berukuran pxn

0 = batas bawah variabel berbentuk matriks kolom

berukuran nx1

2 = batas atas variabel

e = Kolom Matriks satu berukuran nx1

saat ini hanya terdapat p persamaan linier karena **X'** adalah matriks pxn, sehingga pada persamaan tersebut terdapat p baris dan n kolom, yang menunjukkan banyaknya variabel bebas regresi yang akan dicari dan banyaknya pengulangan yang dilakukan. Selain pembatas **X'V=X'e** terdapat juga pembatas untuk variabel **V** yaitu **0** ≤ **V** ≤ **2e**. Untuk lebih jelasnya bentuk persamalahan diatas dapat dijabarkan sebagai berikut:

Maksimalkan : $Y_1V_1 + Y_2V_2 + \ldots + Y_nV_n$

$$\text{Pembatas}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{pi} \end{bmatrix}$$

$$O \le V_i \le 2$$

Jadi **X'** adalah sebuah matriks yang disusun berdasar pada pengamatan yang dilakukan. **X'** disini merupakan bentuk transpose matriks yang berukuran pxn sebagaimana yang telah disebutkan diatas. Oleh karena itu dari matriks **X'** dapat diketahui banyaknya variabel yang akan dibentuk dalam penyusunan persamaan regresi linier dan banyaknya pengamatan yang dilakukan, berturut-turut yaitu sebanyak p variabel dan n pengamatan.Perhitungan yang dilakukan untuk memecahkan persamaan (2.12) diassumsikan rank dari dari matriks **X'** tersebut adalah p. Sehingga apabila baris-baris pada matriks tersebut dikombinasikan satu dengan yang lainnya harus bebas linier. Dengan diketahuinya bahwa **X'V** = **X'e** memiliki p persaman dan n pengamatan, yang dalam hal ini n menunjukkan banyaknya variabel yang tidak diketahui. Maka pemecahan basis diperoleh dengan menetapkan n-p varaibel sama dengan nol, lalu memecahkan variabel yang tersisa . Setiap p yang merupakan vektor yang independen secara linier akan bersesuaian dengan pemecahan basis **X'V = X'e.** Dalam kasus ini vektor p yang dipilih membentuk sebuah basis sebagai sebuah matriks bujur sangkar , yangmana matriks tersebut haruslah bersifat nonsingular.