BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. PENGANTAR PROGRAM INTEGER

Program linier merupakan perencanaan aktifitas-aktifitas untuk mendapatkan suatu hasil yang optimal, yaitu mencapai tujuan terbaik. Penyelesaian program linier bisa integer dan non integer.

Formulasi model matematis dalam program linier secara umum adalah:

Minimalkan $z_0 = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Kendala : $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Karakteristik-karakteristik yang sering digunakan dalam permasalahan program linier diatas adalah:

1. Variabel keputusan merupakan variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan-keputusan yang akan dibuat.

   Yang merupakan vektor variabel keputusan adalah $\mathbf{x}$
2. Fungsi tujuan merupakan fungsi dari variabel keputusan yang diminimalkan atau dimaksimalkan.

   Yang merupakan fungsi tujuan adalah $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$
3. Kendala merupakan pembatas yang dihadapi dalam pencarian solusi sehingga nilai variabel keputusan tidak bisa diambil secara sembarang

   Yang merupakan kendala adalah $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$

4. Pembatas tanda merupakan batasan yang menjelaskan apakah variabel keputusannya berharga nonnegatif atau nonpositif.

   Yang merupakan pembatas tanda adalah $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Setiap persoalan program linier mempunyai suatu program linier lain yang disebut dual, sehingga solusi pada persoalan awal yang disebut primal juga memberi solusi pada dualnya.

Ketentuan dalam menuliskan bentuk dual dari suatu program linier adalah:

1. Koefisien fungsi tujuan primal menjadi konstanta ruas kanan dual.
2. Kostanta ruas kanan pada primal menjadi koefisien kasus minimal pada dual atau sebaliknya
3. Kasus maksimum pada primal menjadi kasus minimal pada dual atau sebaliknya
4. Setiap kolom pada primal berkorespondensi dengan baris pada dual dan setiap baris pada primal berkorespondensi dengan kolom dual.

Bentuk umum masalah primal-dual adalah:

Primal

Minimalkan: $z_0 = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ (2.1)

Kendala : $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Dual

Maksimalkan: $w = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$ (2.2)

Kendala : $\mathbf{A}^T\mathbf{u} \leq \mathbf{c}$

$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$

Definisi 2.1

Polihedron adalah irisan setengah ruang bilangan berhingga, yang dinyatakan dengan

$$P = \{ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{R}^{n_1} x \mathbf{R}^{n_2} \,|\, \mathbf{Ax} + \mathbf{By} \geq \mathbf{b} \}$$

dimana $\mathbf{R}^{n_1}$ adalah ruang vektor berdimensi n_1

$\mathbf{R}^{n_2}$ adalah ruang vektor berdimensi n_2

$\mathbf{A}$ adalah matrik berukuran mxn_1

$\mathbf{B}$ adalah matrik berukuran mxn_2

Definisi 2.2

Proyeksi pada polihedron P kedalam sub ruang vektor variabel $\mathbf{y}$ adalah :

$\text{proy}_y(\text{P}) := \{ \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{n_2} \,|\,$ ada $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n_1}$ sedemikian sehingga $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \text{P}\}$

Polihedron $\text{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \,|\, \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \}$ dengan $\mathbf{A}$ merupakan matrik bilangan riil ukuran mxn dan $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$. Fungsi tujuan ditentukan ada tidaknya solusi dari $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$. Ide dasar proyeksi adalah mencari sebuah nilai yang akan fisibel jika nilai $\mathbf{x}$ tersebut memenuhi semua kendala $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ dan tidak fisibel jika nilai $\mathbf{x}$ tersebut tidak memenuhi semua kendala $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$. Dibawah ini ditunjukkan hasil proyeksinya adalah sebuah nilai $\mathbf{x}$, misalkan elemen-elemen kolom pertama matrik $\mathbf{A}$ adalah $1, -1$ dan 0 dari kendala $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$

$$x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m_1 \qquad (2.3)$$

$$-x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i = m_1+1, m_1+2,\ldots, m_1+m_2 \qquad (2.4)$$

$$a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i = m_1+m_2+1, m_1+m_2+2,\ldots, m \qquad (2.5)$$

Persamaan (2.3) dan (2.4) dapat juga dinyatakan dengan

$x_1 \geq b_i - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n$, $i=1,2,\ldots,m_1$ (2.6)

$x_1 \leq a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n - b_k$, $k= m_1+1, m_1+2,\ldots, m_1+ m_2$ (2.7)

Dari persamaan (2.6) dan (2.7) diperoleh hubungan bahwa

$b_i - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leq x_1 \leq a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n - b_k$ (2.8)

untuk semua $i=1,2,\ldots,m_1$ dan semua $k= m_1+1, m_1+2,\ldots, m_1+ m_2$.

Dari penjumlahan persamaan (2.3) dan (2.4) diperoleh

$(a_{i2} + a_{k2})\, x_2 + \ldots + (a_{in} + a_{kn})x_n \geq b_i + b_k$, $i=1,2,\ldots,m_1$,$k= m_1+1,\ldots, m_1+ m_2$ (2.9)

$a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$, $i= m_1+ m_2+1, m_1+ m_2+2,\ldots, m$ (2.10)

Metode eliminasi variabel x_1 diatas disebut *eliminasi Fourier-Motzkin.*

Proyeksi digunakan untuk menyelesaikan program linier bentuk primal. Untuk menyelesaikan bentuk dual digunakan invers proyeksi. Sistem yang digunakan pada invers proyeksi adalah

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\ x_0 = \mathbf{0}\ ,\ x_0 = 1,\ x_i \geq 0,\ i=1,2,\ldots,n$$

Langkah pertama, diasumsikan baris pertama dari $\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\ x_0 = \mathbf{0}$ adalah

$a_{1i}>0$, untuk $i=1,2,\ldots,n_1$ (2.11)

$a_{1n_1+j} < 0$, untuk $j=1,2,\ldots,n_2$

$a_{1k} = 0$, untuk $k= n_1+n_2+1,\ldots,n$

$b_1<0$

Karena $\mathbf{Ax} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, maka baris pertama dari $\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\ x_0 = \mathbf{0}$ adalah

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j - b_1\ x_0 = 0 \qquad (2.12)$$

Dengan mensubstitusi (2.11) ke dalam (2.12) diperoleh

$$\sum_{j=1}^{n_1} a_{1j}x_j + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} a_{1j}x_j + \sum_{j=n_1+n_2+1}^{n} a_{1j}x_j - b_1 \ x_0 = 0 \qquad (2.13)$$

Transformasi variabel yang digunakan untuk mengeliminasi persamaan (2.13) adalah

$$x_i = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{y_{ij}}{a_{1i}}, i=1,2,\ldots,n_1, \quad x_0 = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{y_{0j}}{b_1} \qquad (2.14)$$

$$x_{n_1+j} = -\sum_{i=0}^{n_1} \frac{y_{ij}}{a_{1n_1+i}}, j=1,2,\ldots,n_2 \qquad (2.15)$$

dengan $\mathbf{y} = (y_{ij})$. Selanjutnya persamaan (2.14) dan (2.15) diatas dieliminasi kedalam (2.13) dengan syarat $x_0=1$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, menghasilkan invers proyeksi baris ke-*k* yaitu

$$\sum_{i=1}^{n_1}(a_{ki} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{y_{ij}}{a_{1i}}) - \sum_{i=1}^{n_2}(a_{kn_1+j} \sum_{j=0}^{n_1} \frac{y_{ij}}{a_{1n_1+j}}) + \sum_{l=n_1+n_2+1}^{n} a_{kl}x_l - b_k \sum_{j=1}^{n_2} \frac{y_{0j}}{b_1} = 0, i=1,2,\ldots,m \qquad (2.16)$$

$$\sum_{j=1}^{n_2} \frac{y_{0j}}{b_1} = 1 \qquad (2.17)$$

Dari persamaan (2.16) dan (2.17) apabila $\mathbf{x}$ nonnegatif maka $\mathbf{y}$ dan $\mathbf{x}_i$, dengan $i=n_1+n_2+1,\ldots,n$ juga nonnegatif

$y_{ij} \geq \mathbf{0}$, $i=1,2,\ldots,n_1$ $\quad j=1,2,\ldots,n_2$

$\mathbf{x}_l \geq 0$, $i=n_1+n_2+1,\ldots,n$

Untuk menyelesaikan program linier $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} | \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$ dilakukan dengan merubah fungsi tujuan menjadi $z_0 - \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, dengan z_0 merupakan nilai dari fungsi tujuan . Vektor variabel $\mathbf{x}$ dieliminasi menggunakan proyeksi

$$z_0 - \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq 0 \tag{2.18}$$

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \tag{2.19}$$

untuk mencari nilai fisibel z_0 minimum.

Karena variabel z_0 didefinisikan dengan sistem (2.18), langkah berikutnya dengan mensubstitusi $\mathbf{c} = \mathbf{A}^T\mathbf{u}_k$ ke (2.18)

$$z_0 - (\mathbf{A}^T\mathbf{u}_k)^T\mathbf{x} \geq 0 \tag{2.20}$$

Sedangkan $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ dikalikan $(\mathbf{u}_k)^T$ diperoleh

$$(\mathbf{u}_k)^T\mathbf{Ax} \geq (\mathbf{u}_k)^T\mathbf{b}$$

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{u}_k)^T\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T\mathbf{u}_k \tag{2.21}$$

Dengan menjumlahkan (2.20) dan (2.21) diperoleh $z_0 \geq \mathbf{b}^T\mathbf{u}_k$. Karena $\mathbf{d}_k = \mathbf{b}^T\mathbf{u}_k$, maka

$$z_0 \geq \mathbf{d}_k,\ k=1,\ldots,q \tag{2.22}$$

dengan $\mathbf{d}_k$ merupakan ruas kanan kendala *easy*. Sehingga nilai minimumnya adalah z_0 = maks$\{\mathbf{d}_k \mid k=1,\ldots,q\}$, karena $\mathbf{d}_k$ paling maksimal mengakibatkan nilai z_0 fisibel. Setiap vektor pengali $\mathbf{u}_k$,k=1,...,q adalah nonnegatif, akibatnya $\mathbf{A}^T\mathbf{u}_k = \mathbf{c}$ dan $\mathbf{d}_k = \mathbf{b}^T\mathbf{u}_k$ menghasilkan batas lebih rendah dari nilai optimal program linier.

Teorema 2.1 (Weak Duality)

Jika $\bar{\mathbf{x}}$ merupakan sebuah solusi dari kendala $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ dan, $\bar{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$ adalah sebuah solusi dari $\mathbf{A}^T\mathbf{u} = \mathbf{c}$, maka $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{b}^T\bar{\mathbf{u}}$. $\bar{\mathbf{x}}$ merupakan solusi optimal primal dan $\bar{\mathbf{u}}$ merupakan solusi optimal dual

Bukti :

Karena $\bar{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$ maka $\bar{\mathbf{u}}^T \geq 0$. Untuk $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ maka $\bar{\mathbf{u}}^T\mathbf{Ax} \geq \bar{\mathbf{u}}^T\mathbf{b}$, dimana $\bar{\mathbf{u}}^T\mathbf{Ax} \geq \bar{\mathbf{u}}^T\mathbf{b}$ merupakan kumpulan kendala dari sistem $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$. Jika $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{b}$ maka $\bar{\mathbf{u}}^T\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \geq \bar{\mathbf{u}}^T\mathbf{b}$. Dari hipotesa $\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{c}$ sehingga $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{u}})^T\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{u}}^T\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \geq \bar{\mathbf{u}}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\bar{\mathbf{u}}$ ♦

Teorema 2.2 (Strong Duality)

Jika solusi optimal program linier primal min{ $\mathbf{c}^T\mathbf{x} | \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ }ada dan solusi optimal program linier maks{ $\mathbf{b}^T\mathbf{u} | \mathbf{A}^T\mathbf{u}_k = \mathbf{c}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ } ada, maka $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$

Bukti:

Solusi optimal masalah primal dalam (2.22) adalah $\bar{z}_0$=maks{ $\mathbf{d}_k$ | k=1,...,q}. Andaikan nilai maksimum yang memenuhi persamaan adalah k=1, maka $\mathbf{d}_1 = \mathbf{b}^T\mathbf{u}_1$ dan $\mathbf{c} = \mathbf{A}^T\mathbf{u}_1$. Sehingga solusi fisibel dualnya adalah $\bar{z}_0 = \mathbf{b}^T\mathbf{u}_1$. Selanjutnya dengan teorema weak duality yaitu $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{u}_1)^T\mathbf{x} = \mathbf{u}_1{}^T\mathbf{Ax} \geq \mathbf{u}_1{}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{u}_1$, dimana $\mathbf{u}_1$ merupakan solusi optimal dual. Kontradiksi dengan hipotesa, bahwa primal dan dual mempunyai fungsi tujuan yang sama, yaitu $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{u}_1)^T\mathbf{x} = \mathbf{u}_1{}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{u}_1{}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{u}_1$. ♦

Untuk membahas teorema dari program linier, diberikan dahulu beberapa pegertian:

Kombinasi konvek titik-titik $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q$ dalam $\mathbf{R}^n$ merupakan kombinasi linier

$\lambda_1\,\mathbf{x}_1 + \lambda_2\,\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_r\,\mathbf{x}_q$ dengan $\lambda_i \geq 0$ dan $\sum_{i=1}^{q}\lambda_i = 1$ untuk semua i=1,2,…,q.

Kombinasi konik titik-titik $\mathbf{x}_{q+1}, \mathbf{x}_{q+2}, \ldots, \mathbf{x}_r$ dalam $\mathbf{R}^n$ merupakan kombinasi linier $\lambda_{q+1}\,\mathbf{x}_{q+1} + \lambda_{q+2}\,\mathbf{x}_{q+2} + \ldots + \lambda_r\,\mathbf{x}_{q+r}$ dimana $\lambda_i \geq 0$ untuk semua i=q+1,q+2,…,r.

Konvek hull titik-titik $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q$ atau conv({ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q$ }) merupakan himpunan titik-titik dalam $\mathbf{R}^n$ yang dibentuk oleh semua kombinasi titik-titik tersebut.

Konik hull titik-titik $\mathbf{x}_{q+1}, \mathbf{x}_{q+2}, \ldots, \mathbf{x}_r$ atau cone({ $\mathbf{x}_{q+1}, \mathbf{x}_{q+2}, \ldots, \mathbf{x}_r$ }) merupakan himpunan titik-titik dalam $\mathbf{R}^n$ yang dibentuk oleh semua kombinasi titik-titik tersebut.

Polihedron P dapat juga dinyatakan dengan

P = conv({ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q$ }) + cone({ $\mathbf{x}_{q+1}, \mathbf{x}_{q+2}, \ldots, \mathbf{x}_r$ })

Teorema 2.3 (Teorema dasar program linier)

Jika program linier min $\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ mempunyai solusi optimal, maka program linier optimal tersebut mempunyai solusi sebuah titik ekstrim optimal.

Jika tidak mempunyai solusi optimal, maka program linier tersebut tak terbatas atau tidak fisibel.

Bukti:

Pandang titik-titik $x_1, x_2, ..., x_q, x_{q+1}, x_{q+2}, ..., x_r$ pada polihedron P yang tidak kosong. Titik-titik ini dapat dinyatakan dengan

$$P = conv(\{x_1, x_2, ..., x_q\}) + cone(\{x_{q+1}, x_{q+2}, ..., x_r\})$$

Diasumsikan himpunan $\{x_1, x_2, ..., x_q\}$ adalah minimal dari subhimpunan, sehingga setiap $x_1, x_2, ..., x_q$ adalah titik ekstrim dari P. Jika $\bar{x} \in P$, maka:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{r} \bar{z}_i \; x_i, \quad \sum_{i=1}^{q} \bar{z}_i = 1, \; \bar{z}_i \geq 0, \; i=1,2,...,r \tag{2.23}$$

Jika $\bar{x}$ sebuah solusi optimal program linier, maka $c^T x_i \geq 0$ untuk i=q+1,q+2,...,r. Sedangkan program linier untuk i=1,2,...,q adalah tak terbatas karena $\bar{x} + \alpha x_i$ fisibel untuk i=q+1,q+2,...,r, dengan α merupakan bilangan riil. Dari persamaan (2.23) dan $\bar{x}$ optimal mengakibatkan $\bar{z}_i = 0$ jika $c^T x_i > 0$, i=q+1,q+2,...,r dan akan memenuhi $c^T x_i = c^T \bar{x}$ jika $\bar{z}_i > 0$, i=1,2,...,q. Sehingga untuk sembarang x_i dengan $\bar{z}_i > 0$, i=1,2,...,q merupakan solusi optimal. ♦

Metode yang sering digunakan dalam program linier adalah metode simpleks. Keterbatasan program linier karena penyelesaiannya bisa integer dan non integer. Jika permasalahan program linier ini ditambah sebuah kendala integer menjadi masalah program integer.

Dalam menyelesaikan program integer metode yang sering digunakan adalah metode knapsack, metode B&B, metode cutting plane dan metode relaksasi Lagrange. Yang mempengaruhi jenis metode yang sering digunakan adalah jumlah kendala. Untuk satu kendala dengan metode knapsack, dua kendala menggunakan metode B&B dan metode cutting plane Dalam tugas akhir ini metode yang digunakan adalah relaksasi Lagrange.

Definisi 2.3.

Sebuah permasalahan $\min\{f(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in \text{conv}(\Gamma) \subseteq \mathbf{R}^n\}$ adalah relaksasi dari masalah $\min\{g(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in \Gamma \subseteq \mathbf{R}^n\}$ jika $\Gamma \subseteq \text{conv}(\Gamma)$ dan $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ untuk semua $\mathbf{x} \in \Gamma$.

Dimana: $f(\mathbf{x})$ = fungsi tujuan hasil relaksasi

$g(\mathbf{x})$ = fungsi tujuan sebelum direlaksasi

$\text{conv}(\Gamma)$ = daerah fisibel $\mathbf{x}$ setelah direlaksasi

Γ = daerah fisibel $\mathbf{x}$ sebelum direlaksasi

2.2. DUAL LAGRANGE

Dalam subab ini membahas bagaimana bentuk primal dibawa kebentuk dual Lagrange dengan pendekatan menggunakan Dekomposisi Dantzig Wolfe. Dekomposisi Dantzig Wolfe merupakan program linier dengan kendala berskala besar jika dihitung manual. Kendala ini terbagi menjadi kendala umum yang selanjutnya disebut masalah utama dan kendala khusus yang selanjutnya disebut submasalah.

Masalah utama atau bentuk umum program linier dengan **P** merupakan polihedral yang menyatakan batasan dari bentuk khusus yang disebut politop, **c** dan **x** merupakan vektor kolom *n* komponen rasional, **b** vektor kolom *m* komponen rasional dan **A** matrik bilangan rasional ukuran *mxn* adalah:

Minimalkan $z_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ (2.28)

Kendala : $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$

$\mathbf{Bx} \geq \mathbf{d}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Diasumsikan $\mathbf{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | \mathbf{Bx} \geq \mathbf{d}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$ merupakan politop. Maka sembarang titik dalam politop **P** dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier konvek dari sejumlah berhingga titik-titik ekstrem politop. Titik-titik ekstrem tersebut adalah $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q$. Jika $\bar{\mathbf{x}}$ merupakan sebuah titik dalam politop $\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | \mathbf{Bx} \geq \mathbf{d}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$ maka terdapat $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_q$ sehingga

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{r} \bar{z}_i \, \mathbf{x}_i = \bar{z}_1 \, \mathbf{x}_1 + \bar{z}_2 \, \mathbf{x}_2 + \ldots + \bar{z}_r \, \mathbf{x}_r$$

$$\sum_{i=1}^{q} \bar{z}_i = 1$$

$$\bar{z}_i \geq 0, i=1,2,\ldots,r$$

$\bar{\mathbf{x}}$ ini disebut submasalah. Selanjutnya masalah ini ekivalen dengan masalah asal program linier, yaitu:

Minimalkan $z_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$

Kendala : $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} z_i \ \mathbf{x}_i$$

$$\sum_{i=1}^{q} z_i = 1$$

$$z_i \geq 0, i=1,2,\ldots,r$$

Dengan mensubstitusikan $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} z_i \ \mathbf{x}_i$ kedalam kendala $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ dan fungsi tujuan $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ diperoleh

Minimalkan: $z_0 = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

$$= \mathbf{c}^T(z_1 \mathbf{x}_1 + z_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + z_r \mathbf{x}_r)$$

$$= \mathbf{c}^T z_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}^T \ z_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{c}^T \ z_r \mathbf{x}_r$$

$$= [c_1 \ \cdots \ c_n] z_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + [c_1 \ \cdots \ c_n] z_2 \begin{bmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} + \cdots +$$

$$[c_1 \ \cdots \ c_n] z_r \begin{bmatrix} x_{1r} \\ \vdots \\ x_{nr} \end{bmatrix}$$

$$= [c_1 \ \cdots \ c_n] \begin{bmatrix} z_1 x_{11} \\ \vdots \\ z_1 x_{n1} \end{bmatrix} + [c_1 \ \cdots \ c_n] \begin{bmatrix} z_2 x_{12} \\ \vdots \\ z_2 x_{n2} \end{bmatrix} + \cdots +$$

$$[c_1 \ \cdots \ c_n] \begin{bmatrix} z_r x_{1r} \\ \vdots \\ z_r x_{nr} \end{bmatrix}$$

$$= (c_1 z_1 x_{11} + \ldots + c_n z_1 x_{n1}) + (c_1 z_2 x_{12} + \ldots + c_n z_2 x_{n2}) +$$

$$(c_1 z_r x_{1r} + \ldots + c_n z_r x_{nr})$$

$$= [c_1 \ \cdots \ c_n] \{(x_{11} + \ldots + x_{n1}) z_1 + (x_{12} + \ldots + x_{n2}) z_2 +$$

$$(x_{1r} + \ldots + x_{nr}) z_r\}$$

$$= \mathbf{c}^T (z_1 \mathbf{x}_1 + z_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + z_r \mathbf{x}_r)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} (\mathbf{c}^T \ \mathbf{x}_i) \ z_i$$

Kendala: $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} \ (z_1 \mathbf{x}_1 + z_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + z_r \mathbf{x}_r) \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} \ z_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{A} \ z_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{A} \ z_r \mathbf{x}_r \geq \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} z_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} z_2 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} + \cdots$$

$$+ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} z_r \begin{bmatrix} x_{1r} \\ x_{2r} \\ \vdots \\ x_{nr} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 x_{11} \\ z_1 x_{21} \\ \vdots \\ z_1 x_{n1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 x_{12} \\ z_2 x_{22} \\ \vdots \\ z_2 x_{n2} \end{bmatrix} + \cdots$$

$$+ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r x_{1r} \\ z_r x_{2r} \\ \vdots \\ z_r x_{nr} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}z_1x_{11} + & a_{12}z_1x_{21} + & \cdots + & a_{1n}z_1x_{n1} \\ a_{21}z_1x_{11} + & a_{22}z_1x_{21} + & \cdots + & a_{2n}z_1x_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}z_1x_{11} + & a_{m2}z_1x_{21} + & \cdots + & a_{mn}z_1x_{n1} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}z_2x_{12} + & a_{12}z_2x_{22} + & \cdots + & a_{1n}z_2x_{n2} \\ a_{21}z_2x_{12} + & a_{22}z_2x_{22} + & \cdots + & a_{2n}z_2x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}z_2x_{12} + & a_{m2}z_2x_{22} + & \cdots + & a_{mn}z_2x_{n2} \end{bmatrix} + \cdots +$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}z_rx_{1r} + & a_{12}z_rx_{2r} + & \cdots + & a_{1n}z_rx_{nr} \\ a_{21}z_rx_{1r} + & a_{22}z_rx_{2r} + & \cdots + & a_{2n}z_rx_{nr} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}z_rx_{1r} + & a_{m2}z_rx_{2r} + & \cdots + & a_{mn}z_rx_{nr} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_{11} + & a_{12}x_{21} + & \cdots + & a_{1n}x_{n1} \\ a_{21}x_{11} + & a_{22}x_{21} + & \cdots + & a_{2n}x_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_{11} + & a_{m2}x_{21} + & \cdots + & a_{mn}x_{n1} \end{bmatrix} z_1 +$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_{12} + & a_{12}x_{22} + & \cdots + & a_{1n}x_{n2} \\ a_{21}x_{12} + & a_{22}x_{22} + & \cdots + & a_{2n}x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_{12} + & a_{m2}x_{22} + & \cdots + & a_{mn}x_{n2} \end{bmatrix} z_2 + \cdots +$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_{1r} + & a_{12}x_{2r} + & \cdots + & a_{1n}x_{nr} \\ a_{21}x_{1r} + & a_{22}x_{2r} + & \cdots + & a_{2n}x_{nr} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_{1r} + & a_{m2}x_{2r} + & \cdots + & a_{mn}x_{nr} \end{bmatrix} z_r \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}\, z_1)\,\mathbf{x}_1 + (\mathbf{A}\, z_2)\,\mathbf{x}_2 + \ldots + (\mathbf{A}\, z_r)\,\mathbf{x}_r \geq \mathbf{b}$$

$$\sum_{i=1}^{r} (\mathbf{A}\mathbf{x}_i)\, z_i \geq \mathbf{b}$$

$$\sum_{i=1}^{q} z_i = 1$$

$$z_i \geq 0, i=1,2,\ldots,r \qquad (2.29)$$

Untuk merubah persamaan (2.29) kedalam persamaan Dantzig Wolfe (DW) dengan memisalkan :

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i \text{ dan } \mathbf{f}_i = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_i$$

sehingga persamaan Dantzig Wolfe adalah:

Meminimalkan: $\sum_{i=1}^{r} \mathbf{f}_i z_i$

Kendala $\sum_{i=1}^{r} \mathbf{p}_i z_i \geq \mathbf{b}$

$\sum_{i=1}^{q} z_i = 1$

$z_i \geq 0, i=1,2,\ldots,r$ (2.30)

dimana $\mathbf{x}_i, i=1,2,\ldots,q$ merupakan titik-titik ekstrem pada politop $\mathbf{P}=\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{B}\mathbf{x} \geq \mathbf{d}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ dan $\mathbf{x}_i, i=q+1,q+2,\ldots,r$ merupakan daerah ekstrim pada kendala konik politop $\mathbf{P}$.

Untuk mempermudah dibawa kebentuk dual, persamaan (2.30) diatas diuraikan menjadi:

Minimalkan $\sum_{i=1}^{r} \mathbf{f}_i z_i = (\mathbf{f}_1 z_1 + \ldots + \mathbf{f}_q z_q) + (\mathbf{f}_{q+1} z_{q+1} + \ldots + \mathbf{f}_r z_r)$

$$= \sum_{i=1}^{q} \mathbf{f}_i z_i + \sum_{i=q+1}^{r} \mathbf{f}_i z_i$$

Kendala: $\sum_{i=1}^{r} \mathbf{p}_i z_i \geq \mathbf{b}$

$$(\mathbf{p}_1 z_1 + \mathbf{p}_2 z_2 + \ldots + \mathbf{p}_q z_q) + (\mathbf{p}_{q+1} z_{q+1} + \ldots + \mathbf{p}_r z_r) \geq \mathbf{b}$$

$$z_1 + \ldots + z_q = 1$$

$z_i \geq 0, i=1,2,\ldots,r$

Pendekatan Danztig Wolfenya didasarkan pada dual Lagrange, yaitu dengan:

1. $\mathbf{u}$ merupakan vektor variabel dual pada kendala $\sum_{i=1}^{r} \mathbf{p}_i \; z_i \geq \mathbf{b}$

2. u_0 merupakan variabel dual pada kendala $\sum_{i=1}^{q} z_i = 1$

sehingga Dual Dantzig Wolfe (DDW) adalah:

Maksimalkan : $g(u_0, \mathbf{u}) = u_0 + \mathbf{b}^T\mathbf{u}$

Kendala : $u_0 + \mathbf{u}^T\mathbf{p}_i \leq \mathbf{f}_i, i=1,\ldots,q$

$\mathbf{u}^T\mathbf{p}_i \leq \mathbf{f}_i, i=q+1,\ldots,r$

$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$

Untuk sembarang solusi optimal Dual Danztig Wolfe (DDW), u_0 mengakibatkan nilai minimum $\mathbf{f}_i - \mathbf{u}^T\mathbf{p}_i, i=1,\ldots,q$.

Karena $u_0 + \mathbf{u}^T\mathbf{p}_i \leq \mathbf{f}_i, i=1,\ldots,q$

$u_0 \leq \mathbf{f}_i - \mathbf{u}^T\mathbf{p}_i$

maka masalah DDW menjadi:

$\text{maks}\{\mathbf{b}^T\mathbf{u} + \min u_0 \mid \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, 0 \leq \mathbf{f}_i - \mathbf{u}^T\mathbf{p}_i, i=q+1,\ldots,r\}$

$=\text{maks}\{\mathbf{b}^T\mathbf{u} + \min\{(\mathbf{f}_i - \mathbf{u}^T\mathbf{p}_i) \mid i=1,\ldots,q\} \mid \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, 0 \leq \mathbf{f}_i - \mathbf{u}^T\mathbf{p}_i, i=q+1,\ldots,r\}$

Dari teorema 2.3, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q+1}, \mathbf{x}_{q+2}, \ldots, \mathbf{x}_r$ merupakan titik-titik ekstrem dan daerah politop $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{B}\mathbf{x} \geq \mathbf{d}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ serta $\mathbf{p}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i$, $\mathbf{f}_i = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_i$, maka:

$$\text{maks}\{\mathbf{b}^T\mathbf{u} + \min\{(\mathbf{f}_i - \mathbf{u}^T\mathbf{p}_i) \mid i=1,\ldots,q\} \mid \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u}^T\mathbf{p}_i \leq \mathbf{f}_i, i=q+1,\ldots,r\} \quad (2.31)$$

$$=\text{maks}\{\mathbf{b}^T\mathbf{u}+\min\{(\mathbf{c}^T\mathbf{x}_i-\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_i)|\,\mathbf{B}\mathbf{x}\geq\mathbf{d},\mathbf{x}\geq 0\}|\,\mathbf{u}\geq 0\}$$

$$=\text{maks}\{\mathbf{b}^T\mathbf{u}+\min\{(\mathbf{c}^T-\mathbf{u}^T\mathbf{A})\mathbf{x}_i)|\,\mathbf{B}\mathbf{x}\geq\mathbf{d},\mathbf{x}\geq 0\}|\,\mathbf{u}\geq 0\}\}$$

$$=\text{maks}\{\mathbf{b}^T\mathbf{u}+\min\{(\mathbf{c}-\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\mathbf{x}_i)|\,\mathbf{B}\mathbf{x}\geq\mathbf{d},\mathbf{x}\geq 0\}|\,\mathbf{u}\geq 0\}\} \quad (2.32)$$

Persamaan (2.32) diperoleh dengan menghapus kendala $\mathbf{u}^T\mathbf{p}_i\leq\mathbf{f}_i$,i=q+1,...,r pada (2.31), karena $\mathbf{f}_i-\mathbf{u}^T\mathbf{p}_i<0$,i=q+1,...,r berkorespondensi dengan daerah ekstrim $\mathbf{x}_i$ yang mengakibatkan $(\mathbf{c}-\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\mathbf{x}_i<0$. Sehingga nilai $\mathbf{u}$ dalam $\min\{(\mathbf{c}-\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\mathbf{x}_i)|\,\mathbf{B}\mathbf{x}\geq\mathbf{d},\mathbf{x}\geq 0\}$ adalah negatif tak hingga. Selanjutnya karena $\mathbf{b}^T\mathbf{u}$ tidak mempengaruhi minimisasi maka:

$$\text{maks}_{u\geq 0}\{\mathbf{b}^T\mathbf{u}+\min\{(\mathbf{c}-\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\mathbf{x}_i\,|\,\mathbf{B}\mathbf{x}\geq\mathbf{d},\mathbf{x}\geq 0\}\}$$

$$=\text{maks}_{u\geq 0}\{\min\{(\mathbf{c}-\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{u}\,|\,\mathbf{B}\mathbf{x}\geq\mathbf{d},\mathbf{x}\geq 0\}\}$$

Masalah pengoptimalan $\text{maks}_{u\geq 0}\ L(\mathbf{u})$, dimana:

$$L(\mathbf{u}):=\min\{(\mathbf{c}-\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{u}\,|\,\mathbf{B}\mathbf{x}\geq\mathbf{d},\mathbf{x}\geq 0\} \quad (2.33)$$

merupakan dual Lagrange dari program linier:

Minimalkan: $z_0=\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Kendala : $\mathbf{A}\mathbf{x}\geq\mathbf{b}$

$\mathbf{B}\mathbf{x}\geq\mathbf{d}$

$\mathbf{x}\geq 0$

Dual Lagrange tidak lain merupakan kendala $\mathbf{A}\mathbf{x}\geq\mathbf{b}$ yang didualkan dan terbentuk fungsi Lagrangian $L(\mathbf{u})$. Uraian dual Lagrange diatas terangkum dalam teorema 2.4.

Teorema 2.4:

Jika program linier (PL) $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \ge \mathbf{b}, \mathbf{B}\mathbf{x} \ge \mathbf{d}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$ mempunyai sebuah solusi optimal dan $\bar{\mathbf{u}}$ merupakan sebuah himpunan pengali optimal dual program linier untuk himpunan kendala $\mathbf{A}\mathbf{x} \ge \mathbf{b}$, maka:

$$\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \ge \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\} = \text{maks}\{L(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \ge \mathbf{0}\} = L(\bar{\mathbf{u}})$$

dimana $L(\mathbf{u}) := \min\{(\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{u} \mid \mathbf{B}\mathbf{x} \ge \mathbf{d}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$

Bukti:

Karena z_0 (PL) merupakan nilai solusi optimal program linier dan z_0 (DW) merupakan nilai solusi optimal DW, dengan menggunakan invers proyeksi diperoleh

$$z_0\,(\text{PL}) = z_0\,(\text{DW})$$

$$\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \ge \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\} = \min\{\sum_{i=1}^{r}\mathbf{f}_i\, z_i \mid \sum_{i=1}^{r}\mathbf{p}_i\, z_i \ge \mathbf{b}, \sum_{i=1}^{q} z_i = 1, z_i \ge 0, i=1,2,\ldots,r\}$$

Dengan menggunakan *strong duality* diperoleh

$$z_0\,(\text{DW}) = z_0\,(\text{DDW})$$

$$\min\{\sum_{i=1}^{r}\mathbf{f}_i\, z_i \mid \sum_{i=1}^{r}\mathbf{p}_i\, z_i \ge \mathbf{b}, \sum_{i=1}^{q} z_i = 1, z_i \ge 0, i=1,2,\ldots,r\}$$

$$= \text{maks}_{\mathbf{u}\ge 0}\{\min\{(\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{u} \mid \mathbf{B}\mathbf{x} \ge \mathbf{d}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}\}$$

Dari (2.31) –(2.32) dan definisi $L(\mathbf{u})$ pada (2.33) diperoleh:

$$z_0\,(\text{PL}) = \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \ge \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$$

$$= \text{maks}\{L(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \ge \mathbf{0}\} \blacklozenge$$

Supaya lebih mudah memahami teorema 2.4, pandang contoh 2.1.

Contoh 2.1:

Diketahui: Minimalkan $f(x_1,x_2) = -x_1-x_2$

Kendala $-x_1+x_2 \geq -2$

$-4x_1-9x_2 \geq -18$

$2x_1-4x_2 \geq -4$

$x_1,x_2 \geq 0$

Ditanya: Berapa nilai optimal dualnya?

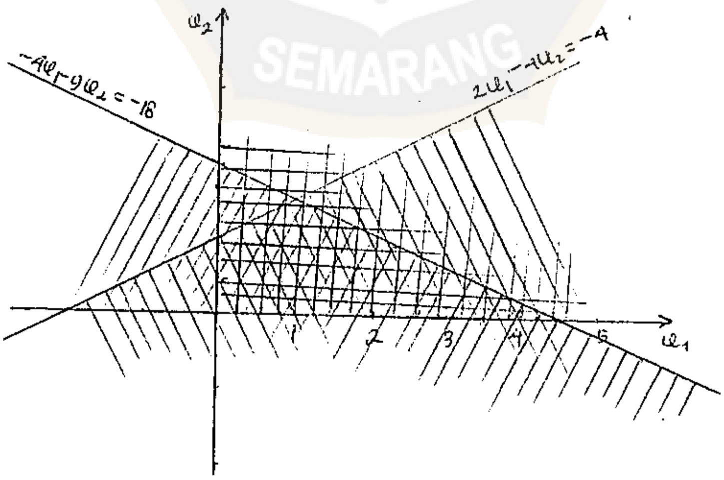
Jawab:

Pada contoh 2.1 kendala pertama merupakan himpunan kendala $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ disebut kendala *hard*, sedangkan kendala kedua dan ketiga merupakan himpunan kendala $\mathbf{Bx} \geq \mathbf{d}$ disebut kendala *easy*.

$$\begin{array}{l|l|l} -4x_1-9x_2=-18 & x1 & -4x_1-9x_2=-18 \\ 2x_1-4x_2=-4 & x2 & 4x_1-8x_2=-8 \\ \hline & & \quad + \end{array}$$

$$-17x_2=-26$$

$$x_2 = 1\frac{9}{17},\ x_1 = 1\frac{1}{17}$$



Grafik 2.1 untuk contoh 2.1.

Dari grafik diatas ada 4 buah titik ekstrem pada politop yang didefinisikan oleh kendala kedua dan ketiga dengan kendala nonnegatif. Keempat titik ekstrim tersebut adalah (0,0),$(4\frac{1}{2},0)$,$(1\frac{1}{17},1\frac{9}{17})$,(0,1) sehingga sembarang titik dalam politop dapat dinyatakan

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = z_1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z_2\begin{bmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + z_3\begin{bmatrix} 1\frac{1}{17} \\ 1\frac{9}{17} \end{bmatrix} + z_4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1$ dan non negatip

Kolom utama dalam $\mathbf{p}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i$,i=1,2,3,4 untuk $\mathbf{A} = [-1,1]$ adalah

$$\mathbf{p}_1 = [-1,1]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [0] \qquad \mathbf{p}_2 = [-1,1]\begin{bmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = [-4\tfrac{1}{2}]$$

$$\mathbf{p}_3 = [-1,1]\begin{bmatrix} 1\frac{1}{17} \\ 1\frac{9}{17} \end{bmatrix} = [\tfrac{8}{17}] \qquad \mathbf{p}_4 = [-1,1]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [1]$$

Sedangkan koefisien utama dalam fungsi tujuan $\mathbf{f}_i = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_i = [-1,-1]\,\mathbf{x}_i$ dengan i=1,2,3,4, adalah:

$$\mathbf{f}_1 = [-1,-1]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [0] \qquad \mathbf{f}_2 = [-1,-1]\begin{bmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = [-4\tfrac{1}{2}]$$

$$\mathbf{f}_3 = [-1,-1]\begin{bmatrix} 1\frac{1}{17} \\ 1\frac{9}{17} \end{bmatrix} = [-2\tfrac{10}{17}] \qquad \mathbf{f}_4 = [-1,-1]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [-1]$$

Sehingga program utamanya menjadi:

Minimalkan : $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0z_1 - 4\frac{1}{2}z_2 - 2\frac{10}{17}z_3 - z_4$

Kendala : $0z_1 - 4\frac{1}{2}z_2 + \frac{8}{17}z_3 + z_4 \geq -2$

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1$$

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \geq 0$$

dan dual utamanya adalah:

Maksimalkan : $g(u_0,u) = u_0 + -2u$

Kendala : $u_0 \leq 0$

$$-4\tfrac{1}{2}u + u_0 \leq -4\tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{8}{17}u + u_0 \leq -2\tfrac{10}{17}$$

$$u + u_0 \leq -1$$

$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$$

yang ekivalen dengan

$$\text{maks}\{-2u + \min\{u_0 | \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}\}$$

$$= \text{maks}\{-2u + \min\{0, -4\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2}u, -2\tfrac{10}{17} - \tfrac{8}{17}u, -1-u\} | \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}$$

juga ekivalen dengan

$$\text{maks}\{\min\{-x_1 - x_2 + u(-2-(-x_1+x_2)) | -4x_1 - 9x_2 \geq -18, 2x_1 - 4x_2 \geq -4, x_1, x_2 \geq 0\} | \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}$$

$$= \text{maks}\{\min\{-x_1 - x_2 - 2u + ux_1 - ux_2 | -4x_1 - 9x_2 \geq -18, 2x_1 - 4x_2 \geq -4, x_1, x_2 \geq 0\} | \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}$$

$$= \text{maks}\{-2u + \min\{x_1(u-1) - x_2(1+u) | -4x_1 - 9x_2 \geq -18, 2x_1 - 4x_2 \geq -4, x_1, x_2 \geq 0\} | \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}$$

$$= \text{maks}\{L(u) | \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}$$

dimana fungsi Lagrangian L(u) adalah:

$$L(u) = \{-2u + \min\{x_1(u-1) - x_2(1+u) | -4x_1 - 9x_2 \geq -18, 2x_1 - 4x_2 \geq -4, x_1, x_2 \geq 0\}$$

Untuk memperoleh nilai u dengan menggunakan tabel simpleks

Bentuk Standar dari dual diatas

$$u_0 + S_1 = 0$$

$$-4\tfrac{1}{2}u + u_0 + S_2 = -4\tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{8}{17}u + u_0 + S_3 = -2\tfrac{10}{17}$$

$u + u_0 + S_4 = -1$

$g + 2u - u_0 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 - 0S_4 = 0$

BV	g	u	u_0	S_1	S_2	S_3	S_4	BSF
g	1	2	-1	0	0	0	0	0
S_1	0	0	1	1	0	0	0	0
S_2	0	-9/2	1	0	1	0	0	-9/2
S_3	0	8/17	1	0	0	1	0	-44/17
S_4	0	1	1	0	0	0	0	-1
	Iterasi 1:							
g	1	0	-5/9	0	4/9	0	0	-2
S_1	0	0	1	1	0	0	0	0
u	0	1	-2/9	0	-2/9	0	0	1
S_3	0	0	169/153	1	16/153	1	0	-52/17
S_4	0	0	11/9	0	2/9	0	1	-2

Proses iterasi 1:

* Mencari u : (-2/9) S_2 awal

(-2/9)(0 -9/2 1 0 1 0 0 -9/2)

= (0 1 -2/9 0 -2/9 0 0 1)

* Mencari g : -2u + g awal

-2(0 1 -2/9 0 -2/9 0 0 1)

(1 2 -1 0 0 0 0 0)

(1 0 -5/9 0 4/9 0 0 -2)

* Mencari S_3 :(-8/17)u + S_3 awal

(-8/17)(	0	1	-2/9	0	-2/9	0	0	1)
	(0	8/17	1	0.	0	1	0	-44/17)
	(0	0	169/153	1	16/153	1	0	-52/17)

* Mencari S_4 :-u + S_4 awal

-(0	1	-2/9	0	-2/9	0	0	1)
(0	1	1	0	0	0	0	-1)
(0	0	11/9	0	2/9	0	1	-2)

Iterasi 2:

g	1	0	0	0	84/169	85/169	0	-46/13
S_1	0	0	0	1	-16/169	-153/169	0	36/13
u	0	1	0	0	-34/169	34/169	0	5/13
u_0	0	0	1	0	16/169	153/169	0	-36/13
S_4	0	0	0	0	-18/169	-187/169	1	18/13

Proses iterasi 2:

* Mencari u_0 : (153/169) S_3 iterasi 1

(153/169)(	0	0	169/153	1	16/153	1	0	-52/17)
=(0	0	1	0	16/169	153/169	0	-36/13)	

* Mencari g :(5/9) u_0 + g iterasi 1

(5/9)(	0	0	1	0	16/169	153/169	0	-36/13)
	(1	0	-5/9	0	4/9	0	0	-2)
	(1	0	0	0	84/169	85/169	0	-46/13)

* Mencari S_1 : -u_0 + S_1 iterasi 1

-(0 0 1 0 16/169 153/169 0 -36/13)

$$\frac{(0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)}{(0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -16/169 \quad -153/169 \quad 0 \quad 36/13)}$$

* Mencari u : $(2/9)u_0$ + u iterasi 1

$$(2/9)(0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 16/169 \quad 153/169 \quad 0 \quad -36/13)$$

$$\frac{(0 \quad 1 \quad -2/9 \quad 0 \quad -2/9 \quad 0 \quad 0 \quad 1)}{(0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -34/169 \quad 34/169 \quad 0 \quad 5/13)}$$

* Mencari S_4 : $(-11/9)\ u_0 + S_4$ iterasi 1

$$(-11/9)(0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 16/169 \quad 153/169 \quad 0 \quad -36/13)$$

$$\frac{(0 \quad 0 \quad 11/9 \quad 0 \quad 2/9 \quad 0 \quad 1 \quad -2)}{(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -18/169 \quad -187/169 \quad 1 \quad 18/13)}$$

Dari iterasi kedua diatas diperoleh

$(g,S_1,u,u_0,S_4) = (-\frac{46}{13}, \frac{36}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{36}{13}, \frac{18}{13})$

$u = \frac{5}{13}$, $L(\frac{5}{13}) = \text{maks}\{-2.\ \frac{5}{13} + \min\{0, -4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}.\frac{5}{13}, -2\frac{10}{17} - \frac{8}{17}.\frac{5}{13}, -1-\frac{5}{13}\} | \mathbf{u \geq 0}\}$

$= \text{maks}\{-\frac{10}{13} + \min\{0, -\frac{72}{26}, -\frac{612}{221}. -\frac{18}{13}\}\}$

$= \text{maks}\{-\frac{10}{13} + \min\{0, -\frac{36}{13}, -\frac{36}{13}, -\frac{18}{13}\}\}$

$= \text{maks}\{-\frac{10}{13} - \frac{36}{13}\} = -\frac{46}{13} = -3\frac{7}{13}$

ekivalen dengan menggunakan $x_1 = 4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$, $x_2 = 0$ diperoleh

$L(\frac{5}{13}) = \{-2.\ \frac{5}{13} + \min\{\frac{9}{2}(\frac{5}{13}-1) - 0(1+\frac{5}{13})\}$

$= \{-\frac{10}{13} + \min\{\frac{9}{2}.(-\frac{8}{13}) - 0\}$

$= -\frac{10}{13} - \frac{36}{13} = -\frac{46}{13} = -3\frac{7}{13}$

Nilai solusi optimal dualnya adalah $u = \frac{5}{13}$ dengan $x_1 = 4\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$ dan $L(u) = -\frac{46}{13} = -3\frac{7}{13}$