BAB III

INTERPOLASI SPLINE KUBIK

3. 1. Interpolasi Spline Kubik

Interpolasi polinom melalui beberapa titik data mempunyai banyak aplikasi antara lain untuk menggambar dan komputer grafik. Dalam menggambar, pelukis biasanya menginginkan gambar dengan suatu kurva mulus (*smooth curve*) yang melalui titik-titik data. Dalam matematika permasalahan ini dapat diselesaikan dengan menggunakan interpolasi spline kubik $S(x)$. Untuk n+1 titik data (x_i, y_i) di mana i=0,1,…,n dengan $a = x_0 \langle x_1 \langle ... \langle x_n = b$ akan dibentuk sebuah polinom spline kubik $S(x)$ di setiap selang $[x_i, x_{i+1}]$ untuk menghampiri (*aproksimasi*) suatu fungsi f pada selang $[x_0, x_n]$.

Definisi 3.1. 1. Diberikan fungsi f terdefinisi pada selang [a,b] dan $n+1$ titik data yaitu $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ dengan $a = x_0 \langle x_1 \langle ... \langle x_n = b$. Polinom spline kubik $S(x)$ yang menghampiri fungsi f adalah suatu fungsi polinom yang memenuhi:

1. $S(x) = S_i(x) = S_{i,0} + S_{i,1}(x - x_i) + S_{i,2}(x - x_i)^2 + S_{i,3}(x - x_i)^3$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$ untuk i=0,1,… ,n-1. $S_i(x)$ merupakan polinom spline kubik dalam selang ke-i dan $S_{i,0}, S_{i,1}, S_{i,2}, S_{i,3}$ merupakan koefisien spline kubik dalam selang ke-i untuk sebarang titik x dalam selang tersebut.

2. $S(x_i) = y_i$ untuk i=0,1,... ,n.

   Polinom spline kubik melalui semua titik . $S(x_i)$ merupakan polinom spline kubik pada titik x_i.

3. $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$ untuk i=0,1,... ,n-2.

   Polinom spline kubik merupakan fungsi kontinu. $S_i(x_{i+1})$ merupakan polinom spline kubik dalam selang ke-i pada titik x_{i+1} dan $S_{i+1}(x_{i+1})$ merupakan polinom spline kubik dalam selang ke-i+1 pada titik x_{i+1}.

4. $S_i'(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$ untuk i=0,1,... ,n-2.

   Turunan pertama spline kubik kontinu. $S_i'(x_{i+1})$ merupakan turunan pertama polinom spline kubik dalam selang ke-i pada titik x_{i+1} dan $S'_{i+1}(x_{i+1})$ merupakan turunan pertama polinom spline kubik dalam selang ke-i+1 pada titik x_{i+1}.

5. $S_i''(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$ untuk i=0,1,... ,n-2.

   Turunan kedua spline kubik kontinu. $S_i''(x_{i+1})$ merupakan turunan kedua polinom spline kubik dalam selang ke-i pada titik x_{i+1} dan $S''_{i+1}(x_{i+1})$ merupakan turunan kedua polinom spline kubik dalam selang ke-i+1 pada titik x_{i+1}.

3.1. 1. Penurunan Rumus Polinom Spline Kubik

Masing-masing polinom kubik mempunyai empat bilangan yang belum diketahui. Karena itu terdapat $4n$ koefisien yang harus dicari. Dalam definisi 3.1.1 pada kondisi 2 terbentuk $n+1$ persamaan dan kondisi 3,4,5 masing-masing terbentuk $n-1$ persamaan.

Sehingga semua didapatkan *4n-2* persamaan. Karena hanya terdapat *4n* koefisien yang harus dicari maka dibutuhkan dua persamaan tambahan yang dinamakan "titik ujung" yaitu nilai $S'(x)$ dan $S''(x)$ pada titik x_0 dan x_n yang akan dicari diakhir pembahasan. Sekarang akan dijelaskan terlebih dulu mengenai bentuk dari spline kubik.

Langkah pertama penurunan didasarkan pada pengamatan bahwa karena tiap simpul dihubungkan oleh suatu polinom kubik :

$$S_i(x) = S_{i,0} + S_{i,1}(x - x_i) + S_{i,2}(x - x_i)^2 + S_{i,3}(x - x_i)^3 \qquad (3.1.\ 1)$$

maka turunan kedua di setiap selang akan berbentuk garis lurus. Persamaan (3.1.1) dapat didiferensialkan dua kali untuk memeriksa kebenaran pengamatan ini. Berdasarkan ini, turunan kedua dari polinom spline kubik merupakan spline linear:

$$S_i''(x) = S_i''(x_i)\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + S_i''(x_{i+1})\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad (3.1.\ 2)$$

Jadi persamaan ini berupa garis lurus yang menghubungkan turunan kedua pada simpul pertama $S_i''(x_i)$ dan turunan kedua pada simpul pertama $S_i''(x_{i+1})$. Persamaan (3.1.2) dapat ditulis dalam bentuk

$$S_i''(x) = \frac{m_i}{h_i}(x_{i+1} - x) + \frac{m_{i+1}}{h_i}(x - x_i) \qquad (3.1.\ 3)$$

dengan $m_i = S_i''(x_i), m_{i+1} = S_i''(x_{i+1})$ dan $h_i = x_{i+1} - x_i$. Selanjutnya persamaan (3.1.3) dapat diintegralkan dua kali untuk menghasilkan $S_i(x)$.

$$S_i'(x) = \int\left\{\frac{m_i}{h_i}(x_{i+1} - x)\right\}dx + \int\left\{\frac{m_{i+1}}{h_i}(x - x_i)\right\}dx$$

Misal $u=(x_{i+1}-x)$, $du=-dx$, $v=(x-x_i)$ dan $dv=dx$

$$S_i'(x) = -\frac{m_i}{h_i}\int u\,du + \frac{m_{i+1}}{h_i}\int v\,dv$$

$$= -\left(\frac{m_i}{2h_i}u^2 + p_i\right) + \left(\frac{m_{i+1}}{2h_i}v^2 + q_i\right)$$

$$= -\left(\frac{m_i}{2h_i}(x_{i+1})^2 + p_i\right) + \left(\frac{m_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + q_i\right)$$

$$S_i(x) = \int\left(\frac{m_i}{2h_i}u^2 + p_i\right)du + \int\left(\frac{m_{i+1}}{2h_i}v^2 + q_i\right)dv$$

$$= \left(\frac{m_i}{6h_i}u^3 + p_i u + r_i\right) + \left(\frac{m_{i+1}}{6h_i}v^3 + q_i v + s_i\right)$$

$$= \left(\frac{m_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + p_i(x_{i+1} - x) + r_i\right) + \left(\frac{m_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + q_i(x - x_i) + s_i\right)$$

$$= \frac{m_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + p_i(x_{i+1} - x) + \frac{m_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + q_i(x - x_i) + (r_i + s_i)$$

dengan satu penyelesaian khusus maka konstanta $r_i + s_i$ dianggap nol sehingga diperoleh :

$$S_i(x) = \frac{m_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + p_i(x_{i+1} - x) + \frac{m_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + q_i(x - x_i) \qquad (3.1.\ 4)$$

Konstanta-konstanta p_i dan q_i dapat dihitung dengan menerapkan definisi 3.1.1 kondisi (2) bahwa y_i sama dengan polinom spline kubik dalam titik x_i dan y_{i+1} sama dengan polinom spline kubik dalam titik x_{i+1}.

$$y_i = S_i(x_i)$$

$$= \frac{m_i}{6h_i}(x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{m_{i+1}}{6h_i}(x_i - x_i)^3 + p_i(x_{i+1} - x_i) + q_i(x_i - x_i)$$

$$= \frac{m_i}{6h_i}(x_{i+1} - x_i)^3 + p_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \frac{m_i}{6h_i} h_i^3 + p_i h_i$$

$$y_i = \frac{m_i}{6} h_i^2 + p_i h_i \qquad (3.1.\ 5)$$

$$y_{i+1} = S_i(x_{i+1})$$

$$= \frac{m_i}{6h_i}(x_{i+1} - x_{i+1})^3 + \frac{m_{i+1}}{6h_i}(x_{i+1} - x_i)^3 + p_i(x_{i+1} - x_{i+1}) + q_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \frac{m_{i+1}}{6h_i}(x_{i+1} - x_i)^3 + q_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \frac{m_{i+1}}{6h_i} h_i^3 + q_i h_i$$

$$y_{i+1} = \frac{m_{i+1}}{6} h_i^2 + q_i h_i \qquad (3.1.\ 6)$$

Dari persamaan (3.1.5) dan (3.1.6) diperoleh nilai p_i dan q_i sebagai berikut :

$$p_i = \frac{y_i}{h_i} - \frac{m_i h_i}{6}$$

$$q_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1}\, h_i}{6}$$

Dengan memasukkan nilai p_i dan q_i tersebut maka persamaan (3.1.4) menjadi

$$S_i(x) = \frac{m_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{m_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \left[\frac{y_i}{h_i} - \frac{m_i h_i}{6}\right](x_{i+1} - x)$$

$$+ \left[\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1}\, h_i}{6}\right](x - x_i) \qquad (3.1.\ 7)$$

$$S_i'(x) = -\frac{m_i}{2h_i}(x_{i+1}-x)^2 + \frac{m_{i+1}}{2h_i}(x-x_i)^2 - \left[\frac{y_i}{h_i} - \frac{m_i h_i}{6}\right] + \left[\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1}\,h_i}{6}\right] \qquad (3.1.\ 8)$$

Dalam persamaan (3.1.7) memuat dua koefisien yang tidak diketahui yaitu $m_i = S_i''(x_i)$ dan $m_{i+1} = S_i''(x_{i+1})$. Jika m_i dan m_{i+1} dapat ditentukan maka persamaan (3.1.7) dapat digunakan untuk menginterpolasi titik dalam selang $[x_i, x_{i+1}]$. Koefisien m_i dan m_{i+1} dapat dihitung dengan menerapkan definisi 3.1.1 kondisi (4) bahwa turunan pertama pada simpul harus kontinu :

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}) \text{ atau } S_i'(x_i) = S_{i-1}'(x_i) \qquad (3.1.\ 9)$$

Dengan $S_i'(x_i)$ merupakan turunan pertama polinom spline kubik pada selang ke-*i* untuk titik x_i dan $S_{i-1}'(x_i)$ merupakan turunan pertama polinom spline kubik pada selang ke-(*i-1*) untuk titik x_i. Dari persamaan (3.1.8) diperoleh persamaan untuk $S_i'(x_i)$ sebagai berikut :

$$S_i'(x_i) = -\frac{m_i}{2h_i}(x_{i+1}-x_i)^2 + \frac{m_{i+1}}{2h_i}(x_i-x_i)^2 - \left[\frac{y_i}{h_i} - \frac{m_i h_i}{6}\right] + \left[\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1}\,h_i}{6}\right]$$

$$= -\frac{m_i}{2h_i}(x_{i+1}-x_i)^2 - \frac{y_i}{h_i} + \frac{m_i h_i}{6} + \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1}h_i}{6}$$

$$= -\frac{2m_i h_i}{6} - \frac{m_{i+1}h_i}{6} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$$

$$S_i'(x_i) = -\frac{m_i h_i}{3} - \frac{m_{i+1}h_i}{6} + d_i \text{ dengan } d_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} \qquad (3.1.\ 10)$$

Turunan pertama dari polinom spline kubik pada selang ke-(i-1) di titik x_i adalah

$$S_{i-1}'(x_i)=-\frac{m_{i-1}}{2h_{i-1}}(x_i-x_i)^2+\frac{m_i}{2h_{i-1}}(x_i-x_{i-1})^2-\left[\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}}-\frac{m_{i-1}h_{i-1}}{6}\right]+\left[\frac{y_i}{h_{i-1}}-\frac{m_i\,h_{i-1}}{6}\right]$$

$$=\frac{m_i}{2h_{i-1}}(x_i-x_{i-1})^2-\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}}+\frac{m_{i-1}h_{i-1}}{6}+\frac{y_i}{h_{i-1}}-\frac{m_ih_{i-1}}{6}$$

$$=\frac{2m_ih_{i-1}}{6}+\frac{m_{i-1}h_{i-1}}{6}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

$$S_{i-1}'(x_i)=\frac{m_ih_{i-1}}{3}+\frac{m_{i-1}h_{i-1}}{6}+d_{i-1} \text{ dengan } d_{i-1}=\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \qquad (3.1.\ 11)$$

Hasil yang didapatkan dalam (3.1.10) dan (3.1.11) disubtitusikan dalam (3.1.9)

$$S_i'(x_i)=S_{i-1}'(x_i)$$

$$-\frac{m_ih_i}{3}-\frac{m_{i+1}h_i}{6}+d_i=\frac{m_ih_{i-1}}{3}+\frac{m_{i-1}h_{i-1}}{6}+d_{i-1}$$

$$m_{i-1}h_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)m_i+m_{i+1}h_i=6(d_i-d_{i-1})$$

$$m_{i-1}h_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)m_i+m_{i+1}h_i=u_i \text{ dengan } u_i=6(d_i-d_{i-1}) \qquad (3.1.\ 12)$$

Untuk $i=1,2,\ldots,n-1$ maka persamaan (3.1.12) menghasilkan sistem n-1 persamaan linier dengan n+1 bilangan yang belum diketahui (*unknown constanta*) yaitu $m_0, m_1, \ldots, m_n$.

$$\left.\begin{array}{l} h_0m_0+2(h_0+h_1)m_1+h_1m_2=u_1 \\ h_1m_1+2(h_1+h_2)m_2+h_2m_3=u_2 \\ \vdots \\ h_{n-2}m_{n-2}+2(h_{n-2}+h_{n-1})m_{n-1}+h_{n-1}m_n=u_{n-1} \end{array}\right\} \qquad (3.1.\ 13)$$

Sistem persamaan linear (3.1.13) dapat dinyatakan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.14)$$

atau dalam matriks $HM=U$ berikut :

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.15)$$

Algoritma 3.1.1 menjelaskan tentang penyusunan koefisien matriks (3.1.15) yang juga merupakan bentuk sistem linear (3.1.13) agar mudah dalam penyelesaiannya. Algoritma ini menggunakan `type larik2 = array[0..100] of real;`

```
procedure mencari_koefisienSPL( n:integer;x,y:larik2;
                                var a,b,c,d,h,u:larik2);
var i :integer;
begin
  h[0]:=x[1]-x[0];
  d[0]:=(y[1]-y[0])/h[0];
  for i←1 to n-1 do
  begin
   h[i]:=x[i+1]-x[i];
   b[i]:=2*(h[i-1]+h[i]);
   c[i]:=h[i];
```

```
    d[i]:=(y[i+1]-y[i])/h[i];
    u[i]:=6*(d[i]-d[i-1]);
   end;
   for i←0 to n-2 do
    a[i]:=h[i];
end;
```

Algoritma 3.1.1. Mencari koefisien sistem persaman linear.

Sistem persamaan linier dalam (3.1.13) mengandung n-1 persamaan dengan n+1 bilangan yang belum diketahui yaitu $m_0, m_1, ..., m_n$. Sistem persamaan (3.1.13) akan mempunyai penyelesaian tunggal bila paling sedikit mempunyai jumlah persamaan sama dengan jumlah bilangan yang belum diketahui. Agar mempunyai penyelesaian tunggal maka sistem persamaan (3.1.13) masing membutuhkan dua persamaan tambahan.

3.1.2. Penyusunan Polinom Spline Kubik

Dua persamaan tambahan yang diperlukan oleh sistem persamaan linier (3.1.13) disebut bentuk titik ujung. Berdasarkan bentuk titik ujung tersebut maka spline kubik dibedakan menjadi lima macam yaitu spline kubik terapit *(clamped cubic spline)*, spline kubik alamiah *(natural cubic spline)* , spline kubik *runout*, spline kubik parabolik dan spline kubik periodik. Syarat kelima bentuk titik ujung spline kubik dari polinom spline kubik dijelaskan dalam tabel 3.1.1.

Tabel 3.1.1. Syarat titik ujung untuk kelima bentuk spline kubik

Macam–macam spline kubik	Syarat titik ujung (m_0 dan m_n)
(i). Spline kubik terapit	$m_0 = \frac{3}{h_0}\left[d_0 - S'(x_0)\right] - \frac{m_1}{2}$ $m_n = \frac{3}{h_{n-1}}\left[S'(x_n) - d_{n-1}\right] - \frac{m_{n-1}}{2}$
(ii). Spline kubik alamiah	$m_0 = 0$ $m_n = 0$
(iii). Spline kubik runout	$m_0 = m_1 - \frac{h_0(m_2 - m_1)}{h_1}$ $m_n = m_{n-1} - \frac{h_{n-1}(m_{n-1} - m_{n-2})}{h_{n-2}}$
(iv). Spline kubik parabolik	$m_0 = m_1$ $m_n = m_{n-1}$
(v). Spline kubik periodik	$m_0 = S''(x_{n-1})$ $m_n = S''(x_1)$

Bagaimanapun bentuk spline kubik yang dipilih akan merubah sistem persamaan linear (3.1.13) menjadi sistem tridiagonal (hal ini dijelaskan dalam *lemma* 3.1.1-3.1.5. diakhir subbab 3.1). Matriks tridiagonal yang dihasilkan oleh masing-masing bentuk spline kubik ini dapat dinyatakan dalam bentuk matrik *HM=U* sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (3.1.16)$$

Sistem linier tridiagonal dalam (3.1.16) dapat diselesaikan dengan algoritma 2.1.1. yang sudah dijelaskan dalam bab (2.3) sehingga koefisien m_i dapat dihitung. Langkah selanjutnya adalah menentukan koefisien spline kubik pada masing-masing selang ke-i, $S_{i,j}$ di mana j=0,1,2,3 menggunakan rumus pada teorema 3.1.1.

Langkah terakhir dalam penyusunan polinom spline kubik adalah menyusun polinom spline kubik tiap selang ke-i yaitu

$$S(x) = S_i(x) = S_{i,0} + S_{i,1}(x - x_i) + S_{i,2}(x - x_i)^2 + S_{i,3}(x - x_i)^3 \text{ untuk } i=0,1,2,\dots,n-1.$$

Teorema 3.1.1. Andaikan diketahui n+1 titik data yaitu $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ dengan $h = x_{i+1} - x_i$ untuk i=0,1,2,...,n. Polinom spline kubik dalam tiap selang ke-i $S_i(x) = S_{i,0} + S_{i,1}(x - x_i) + S_{i,2}(x - x_i)^2 + S_{i,3}(x - x_i)^3$ menginterpolasikan sebarang titik x untuk $x_i \le x \le x_{i+1}$ mempunyai koefisien spline kubik sebagai berikut :

$$S_{i,0} = y_i$$

$$S_{i,1} = d_i - \frac{(2m_i + m_{i+1})h_i}{6}$$

$$S_{i,2} = \frac{1}{2} m_i$$

$$S_{i,3} = \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i} . \blacklozenge$$

Bukti:

1. Bentuk polinom spline kubik dalam selang ke-*i* untuk $x_i \le x \le x_{i+1}$ adalah :

$$S_i(x) = S_{i,0} + S_{i,1}(x - x_i) + S_{i,2}(x - x_i)^2 + S_{i,3}(x - x_i)^3 \qquad (3.1.17)$$

2. Polinom spline kubik akan melalui semua titik.

$$S_i(x_i) = S_{i,0} + S_{i,1}(x_i - x_i) + S_{i,2}(x_i - x_i)^2 + S_{i,3}(x_i - x_i)^3$$

$$S_i(x_i) = S_{i,0} = y_i \qquad (3.1.18)$$

3. Polinom spline kubik disetiap simpul harus kontinu.

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \qquad (3.1.19)$$

Dari bentuk (3.1.17) didapatkan bentuk polinom spline kubik sebagai berikut :

- untuk subselang ke-*i* di titik x_{i+1}

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i,0} + S_{i,1}(x_{i+1} - x_i) + S_{i,2}(x_{i+1} - x_i)^2 + S_{i,3}(x_{i+1} - x_i)^3 \qquad (3.1.20)$$

- untuk subselang ke-*i+1* di titik x_{i+1}

$$S_{i+1}(x) = S_{i+1,0} + S_{i+1,1}(x - x_{i+1}) + S_{i+1,2}(x - x_{i+1})^2 + S_{i+1,3}(x - x_{i+1})^3$$

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = S_{i+1,0} + S_{i+1,1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + S_{i+1,2}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 + S_{i+1,3}(x_{i+1} - x_{i+1})^3$$

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = S_{i+1,0} \qquad (3.1.21)$$

Persamaan (3.1.20) dan (3.1.21) disubstitusikan dalam (3.1.19) sehingga diperoleh :

$$S_{i,0} + S_{i,1}(x_{i+1} - x_i) + S_{i,2}(x_{i+1} - x_i)^2 + S_{i,3}(x_{i+1} - x_i)^3 = y_{i+1} \qquad (3.1.22)$$

4. Turunan pertama polinom spline kubik ditiap simpul harus kontinu.

$$S_i'(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}). \qquad (3.1.23)$$

Dengan menurunkan polinom spline kubik (3.1.17) diperoleh $S'(x)$ sebagai berikut:

- untuk subselang ke-i di titik x_{i+1}

$$S'_i(x) = S_{i,1} + 2S_{i,2}(x - x_i) + 3S_{i,3}(x - x_i)^2$$

$$S'_i(x_{i+1}) = S_{i,1} + 2S_{i,2}(x_{i+1} - x_i) + 3S_{i,3}(x_{i+1} - x_i)^2 \tag{3.1.24}$$

- untuk subselang ke-$i+1$ di titik x_{i+1}

$$S'_{i+1}(x) = S_{i+1,1} + 2S_{i+1,2}(x - x_{i+1}) + 3S_{i+1,3}(x - x_{i+1})^2$$

$$S'_{i+1}(x_{i+1}) = S_{i+1,1} + 2S_{i+1,2}(x_{i+1} - x_{i+1}) + 3S_{i+1,3}(x_{i+1} - x_{i+1})^2$$

$$S'_{i+1}(x_{i+1}) = S_{i+1,1} \tag{3.1.25}$$

Persamaan (3.1.24) dan (3.1.25) disubstitusikan dalam (3.1.23) sehingga diperoleh :

$$S_{i,1} + 2S_{i,2}(x_{i+1} - x_i) + 3S_{i,3}(x_{i+1} - x_i)^2 = S_{i+1,1} \tag{3.1.26}$$

5. Turunan kedua polinomi spline kubik disebarang titik harus kontinu.

$$S_i''(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}) \tag{3.1.27}$$

Dengan menurunkan polinom spline kubik (3.1.17) sebanyak dua kali maka diperoleh $S'(x)$ sebagai berikut :

- untuk subselang ke-i di titik x_i

$$S_i''(x) = 2S_{i,2} + 6S_{i,3}(x - x_i).$$

$$S_i''(x_i) = 2S_{i,2} + 6S_{i,3}(x_i - x_i).$$

$$S_i''(x_i) = 2S_{i,2} \tag{3.1.28}$$

- untuk subselang ke-$i+1$ di titik x_{i+1}

$$S''_{i+1}(x) = 2S_{i,2} + 6S_{i,3}(x - x_{i+1})$$

$$S''_{i+1}(x_{i+1}) = 2S_{i+1,2} + 6S_{i+1,3}(x_{i+1} - x_{i+1})$$

$$S''_{i+1}(x_{i+1}) = 2S_{i+1,2} \qquad (3.1.29)$$

Persamaan (3.1.28) dan (3.1.29) disubstitusikan dalam (3.1.27) sehingga diperoleh :

$$2S_{i,2} + 6S_{i,3}(x_{i+1} - x_i) = 2S_{i+1,2} \qquad (3.1.30)$$

Perlu diingat bahwa $m_i = S_i''(x_i)$ dan $m_{i+1} = S''_{i+1}(x_{i+1})$ sehingga persamaan (3.1.28) dan (3.1.29) dapat ditulis :

$$\left.\begin{aligned} m_i &= 2S_{i,2} \\ m_{i+1} &= 2S_{i+1,2} \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.31)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.1.31) ke (3.1.30) maka didapatkan :

$$m_i + 6S_{i,3}(x_{i+1} - x_i) = m_{i+1}$$

$$S_{i,3} = \frac{m_{i+1} - m_i}{6(x_{i-1} - x_i)} = \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i} \qquad (3.1.32)$$

Selanjutnya mensubtitusi nilai $S_{i,0}, S_{i,2}, S_{i,3}$ dalam persamaan (3.1.18), (3.1.31) dan (3.1.32) disubstitusi dalam persamaan (3.1.22) untuk memperoleh nilai $S_{i,1}$.

$$y_i + S_{i,1}h_i + \frac{1}{2}m_i h_i^2 + \frac{1}{6}(m_{i+1} - m_i)h_i^2 = y_{i+1}$$

$$S_{i,1}h_i = (y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{2}m_i h_i^2 - \frac{1}{6}m_{i+1}h_i^2 - \frac{1}{6}m_i h_i^2$$

$$S_{i,1} = \frac{(y_{i+1} + y_i)}{h_i} - \frac{(2m_i + m_{i+1})h_i}{6} = d_i - \frac{(2m_i + m_{i+1})h_i}{6} . \square$$

Algoritma 3.1.2. berikut ini digunakan untuk menghitung nilai koefisien dari spline kubik seperti dalam teorema 3.1.1 dengan `type larik1= array[0..50,0..50] of real` dan `larik2 = array[0..100] of real;`

```
procedure koefisien_spline_kubik(n:integer;y,d,h,m:larik2;
                                  var s:larik1);
var i:integer;
begin
for i←0 to n-1 do
 begin
  s[i,0]:=y[i];
  s[i,1]:=d[i]-h[i]*(2*m[i]+m[i+1])/6;
  s[i,2]:=m[i]/2;
  s[i,3]:=(m[i+1]-m[i])/(6*h[i]);
 end;
end;
```

Algoritma 3.1.2. Koefisien spline kubik

Lemma 3.1.1. (Spline kubik terapit) Terdapat sebuah spline kubik yang tunggal dengan turunan pertama pembatasnya yaitu $S'(a) = k_0$ dan $S'(b) = k_1$.

Bukti:

Dari tabel 3.1.1 diketahui bahwa syarat titik ujung untuk spline kubik terapit adalah :

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= \frac{3}{h_0}\left[d_0 - S'(x_0)\right] - \frac{m_1}{2} \\ m_n &= \frac{3}{h_{n-1}}\left[S'(x_0) - d_{n-1}\right] - \frac{m_{n-1}}{2} \end{aligned}\right\} \qquad 3.1.33$$

Dua persamaan dalam (3.1.33) disubstitusikan dalam sistem linier (3.1.13). Untuk persamaan pertama atau i=1 dan persamaan terakhir atau i=n-1.

- Untuk i=1

$$h_0 m_0 + 2(h_0 + h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1$$

$$h_0\left[\frac{3}{h_0}[d_0 - S'(x_0)] - \frac{m_1}{2}\right] + 2(h_0 + h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1$$

$$3[d_0 - S'(x_0)] - \frac{1}{2}h_0 m_1 + 2(h_0 + h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1$$

$$(\frac{3}{2}h_0 + 2h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1 - 3[d_0 - S'(x_0)] \qquad (3.1.34)$$

- Untuk i=n-1

$$h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})m_{n-1} + h_{n-1}m_n = u_{n-1}$$

$$h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})m_{n-1} + h_{n-1}\left[\frac{3}{h_{n-1}}[S'(x_n) - d_{n-1}] - \frac{m_{n-1}}{2}\right] = u_{n-1}$$

$$h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})m_{n-1} + 3[S'(x_n) - d_{n-1}] - \frac{1}{2}h_{n-1}m_{n-1} = u_{n-1}$$

$$h_{n-2}m_{n-2} + (2h_{n-2} + \frac{3}{2}h_{n-1})m_{n-1} = u_{n-1} - 3[S'(x_n) - d_{n-1}] \qquad (3.1.35)$$

Dengan persamaan (3.1.33) dan (3.1.34) maka persamaan linier (3.1.13) menjadi sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}h_0 + 2h_1\right)m_1 + h_1 m_2 = u_1 - 3[d_0 - S'(x_0)] \\ h_1 m_1 + 2(h_1 + h_2)m_2 + h_2 m_3 = u_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-3} + h_{n-2})m_{n-2} + h_{n-2}m_{n-1} = u_{n-2} \\ h_{n-2}m_{n-2} + \left(2h_{n-2} + \frac{3}{2}h_{n-1}\right)m_{n-1} = u_{n-1} - 3[S'(x_0) - d_{n-1}] \end{array}\right\} \qquad (3.1.36)$$

Sistem persamaan linier (3.1.35) dapat disajikan dalam bentuk matrik $HM=U$ dengan $H_{(n-1)x(n-1)}$, $M_{(n-1)x1}$ dan $U_{(n-1)x1}$ sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}h_0+2h_1 & h_1 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & \left(2h_{n-2}+\frac{3}{2}h_{n-1}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1-3(d_0-S'(x_0)) \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1}-3(S'(x_n)-d_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Dari matriks tridiagonal $HM=U$ diatas terlihat bahwa sistem persamaan (3.1.36) mempunyai n-1 persamaan dan n-1 bilangan yang belum diketahui. Jumlah persamaan sama dengan jumlah bilangan yang belum diketahui sehingga persamaan (3.1.13) mempunyai penyelesaian tunggal. □

Lemma 3.1.2. (Spline Kubik Alamiah) Terdapat spline kubik yang tunggal dengan syarat batas bebas $S''(a)$=0 dan $S''(b)$=0.

Bukti :

Dari tabel 3.1.1 diketahui bahwa syarat titik ujung untuk spline kubik alamiah adalah

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= 0 \\ m_n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.1.37}$$

Dua persamaan dalam (3.1.37) disubstitusikan dalam sistem linier (3.1.13) untuk persamaan pertama (i=1) dan persamaan terakhir atau (i=n-1).

- untuk i=1.

$$2(h_0+h_1)m_1+h_1m_2=u_1 \tag{3.1.38}$$

➢ untuk $i=n$-1.

$$h_{n-2}m_{m-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})m_{n-1} = u_{n-1} \qquad (3.1.39)$$

Dengan persamaan (3.1.38) dan (3.1.39) maka sistem linier (3.1.13) menjadi :

$$\left.\begin{aligned} &2(h_0 + h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1 \\ &h_1 m_1 + 2(h_1 + h_2)m_2 + h_2 m_3 = u_2 \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-3} + h_{n-2})m_{n-2} + h_{n-2}m_{n-1} = u_{n-2} \\ &h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})m_{n-1} = u_{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.40)$$

Sistem persamaan linier (3.1.40) dapat disajikan dalam bentuk matriks *HM=U* dengan $H_{(n-1)x(n-1)}$, $M_{(n-1)x1}$ dan $U_{(n-1)x1}$ sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dari matriks tridiagonal *HM=U* diatas terlihat bahwa sistem persamaan (3.1.40) mempunyai n-1 persamaan dan n-1 bilangan yang belum diketahui. Jumlah persamaan sama dengan jumlah bilangan yang belum diketahui sehingga persamaan (3.1.13) mempunyai penyelesaian tunggal. □

Lemma 3.1.3. (Spline Kubik *Runout*) Terdapat sebuah spline kubik yang unik dengan memperhitungkan titik pada x_1 dan x_2 untuk menghitung $S''(a)$ dan memperhitungkan titik pada x_{n-1} dan x_{n-2} untuk menghitung $S''(b)$.

Bukti :

Dari tabel 3.1.1 diketahui bahwa syarat titik ujung untuk spline kubik *runout* adalah

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= m_1 - \frac{h_0(m_2 - m_1)}{h_1} \\ m_n &= m_{n-1} + \frac{h_{n-1}(m_{n-1} - m_{n-2})}{h_{n-2}} \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.41)$$

Dua persamaan dalam (3.1.41) disubstitusikan dalam sistem linier (3.1.13) untuk persamaan pertama (i=1) dan persamaan terakhir (i=n-1).

- Untuk i=1

$$h_0 m_0 + 2(h_0 + h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1$$

$$h_0\left(m_1 - \frac{h_0(m_2 - m_1)}{h_1}\right) + 2(h_0 + h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1$$

$$h_0 m_1 - \frac{h_0^{\,2}}{h_1} m_2 + \frac{h_0^{\,2}}{h_1} m_1 + 2(h_0 + h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1$$

$$\left(3h_0 + 2h_1 + \frac{h_0^{\,2}}{h_1}\right)m_1 + \left(h_1 - \frac{h_0^{\,2}}{h_1}\right)m_2 = u_1 \qquad (3.1.42)$$

- Untuk i=n-1

$$h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})m_{n-1} + h_{n-1}m_n = u_{n-1}$$

$$h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})m_{n-1} + h_{n-1}\left(m_{n-1} + \frac{h_{n-1}(m_{n-1} - m_{n-2})}{h_{n-2}}\right) = u_{n-1}$$

$$h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})m_{n-1} + h_{n-1}m_{n-1} + \frac{h_{n-1}^{\,2}}{h_{n-2}} m_{n-1} - \frac{h_{n-1}^{\,2}}{h_{n-2}} m_{n-2} = u_{n-1}$$

$$\left(h_{n-2} - \frac{h_{n-1}^{\,2}}{h_{n-2}}\right)m_{n-2} + \left(2h_{n-2} + 3h_{n-1} + \frac{h_{n-1}^{\,2}}{h_{n-2}}\right)m_{n-1} = u_{n-1} \qquad (3.1.43)$$

Dengan persamaan (3.1.42) dan (3.1.43) maka sistem linier (3.1.13) menjadi :

$$\left.\begin{aligned}
&\left(3h_0 + 2h_1 + \frac{h_0^2}{h_1}\right)m_1 + \left(h_1 - \frac{h_0^2}{h_1}\right)m_2 = u_1 \\
&h_1 m_1 + 2(h_1 + h_2)m_2 + h_2 m_3 = u_2 \\
&\qquad\vdots \\
&h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-3} + h_{n-2})m_{n-2} + h_{n-2}m_{n-1} = u_{n-2} \\
&\left(h_{n-2} - \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}\right)m_{n-2} + \left(2h_{n-2} + 3h_{n-1} + \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}\right)m_{n-1} = u_{n-1}
\end{aligned}\right\} \quad (3.1.44)$$

Sistem persamaan linier (3.1.44) dapat disajikan dalam bentuk matriks $HM=U$ dengan $H_{(n-1)x(n-1)}$, $M_{(n-1)x1}$ dan $U_{(n-1)x1}$ sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix}
\left(3h_0+2h_1+\frac{h_0^2}{h_1}\right) & h_1 & \cdots & 0 & 0 \\
h_1 & 2(h_1+h_2) & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\
0 & 0 & \cdots & \left(h_{n-2}-\frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}\right) & \left(2h_{n-2}+3h_{n-1}+\frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}}\right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dari matriks tridiagonal $HM=U$ diatas terlihat bahwa sistem persamaan (3.1.43) mempunyai n-1 persamaan dan n-1 bilangan yang belum diketahui. Jumlah persamaan sama dengan jumlah bilangan yang belum diketahui sehingga persamaan (3.1.13) mempunyai penyelesaian tunggal.

Lemma 3.1.4. (Spline Parabolik) Terdapat sebuah spline kubik yang tunggal dengan $S''(a) \equiv 0$ pada interval $[x_0, x_1]$ dan $S''(b) \equiv 0$ pada interval $[x_{n-1}, x_n]$.

Bukti :

Dari tabel 3.1.1diketahui bahwa syarat titik ujung untuk spline kubik parabolik adalah

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= m_1 \\ m_n &= m_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (3.1.45)$$

Dua persamaan dalam (3.1.45) disubstitusikan dalam sistem linier (3.1.13) untuk persamaan pertama (i=1) dan persamaan terakhir (i=n-1).

- Untuk i=1

$$h_0 m_0 + 2(h_0 + h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1$$

$$h_0 m_1 + 2(h_0 + h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1$$

$$(3h_0 + 2h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1 \quad (3.1.46)$$

- Untuk i=n-1

$$h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})m_{n-1} + h_{n-1}m_n = u_{n-1}$$

$$h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})m_{n-1} + h_{n-1}m_{n-1} = u_{n-1}$$

$$h_{n-2}m_{n-2} + (2h_{n-2} + 3h_{n-1})m_{n-1} = u_{n-1} \quad (3.1.47)$$

Dengan persamaan (3.1.46) dan (3.1.47) maka sistem linier (3.1.13) menjadi :

$$\left.\begin{aligned} &(3h_0 + 2h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1 \\ &h_1 m_1 + 2(h_1 + h_2)m_2 + h_2 m_3 = u_2 \\ &\qquad\vdots \\ &h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-3} + h_{n-2})m_{n-2} + h_{n-2}m_{n-1} = u_{n-2} \\ &h_{n-2}m_{n-2} + (2h_{n-2} + 3h_{n-1})m_{n-1} = u_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (3.1.48)$$

Sistem persamaan linier (3.1.48) dapat disajikan dalam bentuk matriks $HM=U$ dengan $H_{(n-1)x(n-1)}$, $M_{(n-1)x1}$ dan $U_{(n-1)x1}$ sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 3h_0+2h_1 & h_1 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2h_{n-2}+3h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dari matriks tridiagonal $HM=U$ diatas terlihat bahwa sistem persamaan (3.1.47) mempunyai n-1 persamaan dan n-1 bilangan yang belum diketahui. Jumlah persamaan sama dengan jumlah bilangan yang belum diketahui sehingga persamaan (3.1.13) mempunyai penyelesaian tunggal.

Lemma 3.1.5. (Spline Periodik) Terdapat sebuah spline kubik yang tunggal dengan turunan kedua dititik x_1 dan x_{n-1} yaitu nilai $S''(x_1)$ dan $S''(x_{n-1})$ diketahui .

Bukti :

Dari tabel 3.1.1 diketahui bahwa syarat titik ujung untuk spline kubik periodik adalah

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= S''(x_{n-1}) \\ m_n &= S''(x_1) \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.49)$$

Dua persamaan dalam (3.1.49) disubstitusikan dalam persamaan linier (3.1.13) untuk persamaan pertama atau i=1 dan persamaan terrakhir atau i=n-1

- Untuk i=1

$$h_0m_0 + 2(h_0+h_1)m_1 + h_1m_2 = u_1$$

$$h_0S''(x_{n-1}) + 2(h_0+h_1)m_1 + h_1m_2 = u_1$$

$$2(h_0+h_1)m_1 + h_1m_2 = u_1 - h_0S''(x_{n-1}) \qquad (3.1.50)$$

- Untuk i=n-1

$$h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-2}+h_{n-1})m_{n-1} + h_{n-1}m_n = u_{n-1}$$

$$h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})m_{n-1} + h_{n-1}S''(x_1) = u_{n-1}$$

$$h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})m_{n-1} = u_{n-1} - h_{n-1}S''(x_1) \tag{3.1.51}$$

Dengan persamaan (3.1.50) dan (3.1.51) maka sistem linier (3.1.13) menjadi :

$$\left.\begin{aligned}
&2(h_0 + h_1)m_1 + h_1m_2 = u_1 - h_0S''(x_{n-1})\\
&h_1m_1 + 2(h_1 + h_2)m_2 + h_2m_3 = u_2\\
&\qquad\vdots\\
&h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-3} + h_{n-2})m_{n-2} + h_{n-2}m_{n-1} = u_{n-2}\\
&h_{n-2}m_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})m_{n-1} = u_{n-1} - h_{n-1}S''(x_1)
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.52}$$

Sistem persamaan linier (3.1.52) dapat disajikan dalam bentuk matriks *HM=U* dengan $H_{(n-1)x(n-1)}$, $M_{(n-1)x1}$ dan $U_{(n-1)x1}$ sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - h_0S''(x_{n-1}) \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} - h_{n-1}S''(x_1) \end{bmatrix}$$

Dari matriks tridiagonal *HM=U* diatas terlihat bahwa sistem persamaan (3.1.52) mempunyai n-1 persamaan dan n-1 bilangan yang belum diketahui. Jumlah persamaan sama dengan jumlah bilangan yang belum diketahui sehingga persamaan (3.1.13) mempunyai penyelesaian tunggal.

Contoh 3.1.1. Interpolasikan fungsi f(x) pada pasangan data (*x,y*) berikut : (-1,-7), (1,7), (2,-4), (3,-1), (5,35), (6,30) dengan spline kubik alamiah *S(x)* yang memenuhi syarat $S'(-1)=S'(6)=0$ dan $S''(1)=-21$, $S''(5)=-31$. Gunakan hasilnya untuk menaksir nilai pada x=4!.

Penyelesaian:

1. Menentukan nilai $h(i) = x_{i+1} - x_i$, $d_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$ dan $u(i) = 6(d_i - d_{i-1})$

i	x_i	y_i	h_i	$y_{i+1} - y_i$	d_i	$d_i - d_{i-1}$	u_i
0	-1	-7	2	14	7		
1	1	7	1	-11	-11	-18	-108
2	2	-4	1	3	3	14	84
3	3	-1	2	36	18	15	90
4	5	35	1	-5	-5	-23	-138
5	6	30					

2. Membentuk sistem persamaan linier dalam (3.1.13)

$$\left.\begin{aligned} 2m_0 + 6m_1 + m_2 &= -108 \\ m_1 + 4m_2 + m_3 &= 84 \\ m_2 + 6m_3 + 2m_4 &= 90 \\ 2m_3 + 6m_4 + m_5 &= -138 \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.53)$$

3. Menambah dua persamaan untuk menyelesaikan sistem persamaan (3.1.53), $m_0 = 0$

dan $m_n = 0$ (spline kubik alamiah) sehingga sistem persamaan menjadi :

$$\left.\begin{aligned} 6m_1 + m_2 &= -108 \\ m_1 + 4m_2 + m_3 &= 84 \\ m_2 + 6m_3 + 2m_4 &= 90 \\ 2m_3 + 6m_4 &= -138 \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.54)$$

Atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -108 \\ 84 \\ 90 \\ -138 \end{bmatrix} \qquad (3.1.55)$$

4. Menyelesaikan sistem persamaan linier tridiagonal (3.1.55) dengan algoritma 2.1.1 (dijelaskan dalam subbab (2.3)) sehingga didapatkan

   m_1=-21.50, m_2=21.00, m_3=21.56, m_4=-30.20.

5. Menentukan koefisien spline kubik $S_{i,j}$ dengan mengeliminasi nilai m_i yang diperoleh dalam teorema (3.1.1).

$S_{0,0}$=-7	$S_{0,1}$=14.17	$S_{0,2}$=0	$S_{0,3}$=-1.79
$S_{1,0}$=7	$S_{1,1}$=-7.33	$S_{1,2}$=-10.79	$S_{1,3}$=7.08
$S_{2,0}$=-4	$S_{2,1}$=7.59	$S_{2,2}$=10.5	$S_{2,3}$=0.09
$S_{3,0}$=-1	$S_{3,1}$=13.69	$S_{3,2}$=10.78	$S_{3,3}$=-4.31
$S_{4,0}$=35	$S_{4,1}$=5.07	$S_{4,2}$=-15.10	$S_{4,3}$=5.03

6. Menentukan polinom spline kubik di setiap selang ke-*i*.

$$S_0(x)=-7+14.17(x+1)-1.79(x+1)^3, \qquad -1 \le x \le 1$$

$$S_1(x)=7-7.33(x-1)-10.79(x-1)^2+7.08(x-1)^3, \qquad 1 \le x \le 2$$

$$S_2(x)=-4+7.59(x-2)+10.50(x-2)^2+0.09(x-2)^3, \qquad 2 \le x \le 3$$

$$S_3(x)=-1+13.69(x-3)+10.78(x-3)^2-4.31(x-3)^3, \qquad 3 \le x \le 5$$

$$S_4(x)=35+5.07(x-5)-15.10(x-5)^2+5.03(x-5)^3, \qquad 5 \le x \le 6$$

7. Menentukan nilai *y(x)* dengan menggunakan polinom spline kubik yang intervalnya mengandung nilai *x* sehingga didapatkan :*y(4)*= $S_3(4)$=19.16

3.1.3. Kecocokan Polinom Spline Kubik

Keistimewaan dari spline kubik adalah meminimumkan jalannya isolasi pada masing-masing kurva. Fungsi *f(x)* merupakan fungsi kontinu yang terdiferensial dua kali pada interval $[a,b]$ dan menginterpolasi titik data $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ sehingga polinom spline kubik menghasilkan suatu kurva mulus dengan lekukan sudut yang tidak tajam. Sifat minimum yang dimiliki spline kubik dijelaskan dalam teorema 3.1.2.

Teorema 3.1.2. Andaikan fungsi $f \in C^2[a,b]$ terdiferensial dua kali dalam interval $[a,b]$ dan *S(x)* adalah polinom spline kubik yang menginterpolasi *f(x)* melalui $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ dan memenuhi kondisi titik ujung $S'(a) = f'(a)$ dan $S'(b) = f'(b)$. Maka $\int_a^b \left[S''(x)\right]^2 dx \le \int_a^b \left[f''(x)\right]^2 dx$. ♦

Bukti:

$$\int_a^b \left[f''(x)\right]^2 dx - \int_a^b \left[S''(x)\right]^2 dx = \int_a^b \left[f''(x) - S''(x)\right]^2 dx + 2\int_a^b S''(x)\left[f''(x) - S''(x)\right] dx \quad (3.1.56)$$

Pandang integral terahir dalam (3.1.56) yaitu $\int_a^b S''(x)\left[f''(x) - S''(x)\right] dx$. Dengan rumus pengintegralan parsial integral tertentu yaitu $\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$ didapatkan :

$$\int_a^b S''(x)\left[f''(x) - S''(x)\right] dx = \int_a^b S''\left[f''(x) - S''(x)\right] dx = \int_a^b S''\,d\left[f'(x) - S'(x)\right]$$

$$= \left[S''(x)\left[f'(x) - S'(x)\right]\right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b S'''(x)\left[f'(x) - S'(x)\right] dx$$

$$\int_a^b S''(x)\left[f''(x) - S''(x)\right] dx = \int_a^b S'''(x)\left[f'(x) - S'(x)\right] dx \quad (3.1.57)$$

Dengan rumus pengintegralan parsial integral tertentu dan dari definisi 3.1.1 bahwa $S'''(x) = 6S_{i,3}(x)$ untuk selang $[x_i, x_{i+1}]$ maka persamaan (3.1.57) dapat ditulis :

$$\int_a^b S'''(x)\left[f'(x) - S'(x)\right]dx = \int_a^b S'''(x)d\left[f(x) - S(x)\right]$$

$$= \left[S'''(x)\left[f(x) - S(x)\right]\right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} S^{1v}(x)\left[f'(x) - S'(x)\right]dx$$

$$= 6S_{1,3}(x)\left[f(x) - S(x)\right]\Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} = 0$$

Integral (3.1.57) bernilai nol atau $\int_a^b S''(x)\left[f''(x) - S''(x)\right]dx = 0$, sehingga didapatkan

$\int_a^b S''(x) f''(x) dx = \int_a^b \left[S''(x)\right]^2 dx$. Akibatnya

$$\int_a^b \left[f''(x) - S''(x)\right]^2 dx = \int_a^b \left[f''(x)\right]^2 dx - 2\int_a^b f''(x)S''(x)dx + \int_a^b \left[S''(x)\right]^2 dx$$

$$= \int_a^b \left[f''(x)\right]^2 dx - \int_a^b \left[S''(x)\right]^2 dx$$

Integran ruas kiri tidak negatif begitu juga dengan integralnya sehingga menghasilkan :

$$\int_a^b \left[S''(x)\right]^2 dx \le \int_a^b \left[f''(x)\right]^2 dx . \quad \square \qquad (3.1.58)$$

Dari teorema 3.1.2 dapat dikatakan bahwa misalkan *f(x)* kontinu dan mempunyai turunan pertama dan kedua yang kontinu pada selang $a \le x \le b$. Jika selang $[a,b]$ disekat menjadi $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b$ dan *S(x)* adalah polinom spline kubik dalam subselang tersebut yang memenuhi $S(x_i) = f(x_i)$ untuk $0 \le i \le n$ dan $S'(a) = f'(a)$ serta $S'(b) = f'(b)$ maka *f(x)* dan *S(x)* memenuhi ketidaksamaan (3.1.58) sedangkan kesamaannya dipenuhi jika dan hanya jika *f(x)* adalah spline kubik *S(x)*.

3.2. Analisa Algoritma pada Interpolasi Spline Kubik

Algoritma yang digunakan dalam penyelesaian interpolasi spline kubik adalah algoritma mencari koefisien sistem persamaan linear, algoritma eliminasi untuk sistem tridiagonal dan algoritma koefisien spline kubik. Untuk memperjelas dalam menganalisanya maka suatu algoritma disajikan dalam satu bahasa pemrograman. Secara garis besar ketiga algoritma yang telah dijelaskan pada pembahasan sebelumnya dapat disajikan dalam bahasa pemrograman Turbo Pascal 7.0 dengan `type larik1=array[0..50,0..50] of real` dan `larik2=array[0..100] of real;`

- procedure mencari_koefisienSPL(n:integer;x,y:larik2; var a,b,c,d,h,u:larik2);

```
var i :integer;
begin
 h[0]:=x[1]-x[0];
 d[0]:=(y[1]-y[0])/h[0];
 for i:=1 to n-1 do
  begin
   h[i]:=x[i+1]-x[i];
   d[i]:=(y[i+1]-y[i])/h[i];
   b[i]:=2*(h[i-1]+h[i]);
   c[i]:=h[i];
   u[i]:=6*(d[i]-d[i-1]);
  end;
 for i:=0 to n-2 do
  a[i]:=h[i];
end;
```

➤ procedure eliminasi_untuk_sistem_tridiagonal(n:integer;

```
procedure eliminasi_untuk_sistem_tridiagonal(n:integer;
                              a,c:larik2; var b,u,m:larik2);
  var i:integer;t:real;
  begin
   for i:=2 to n-1 do
    begin
     t:=a[i-1]/b[i-1];
     b[i]:=b[i]-t*c[i-1];
     u[i]:=u[i]-t*u[i-1];
    end;
   m[n-1]:=u[n-1]/b[n-1];
   for i:=n-2 downto 1 do
    begin
     m[i]:=(u[i]-c[i]*m[i+1])/b[i];
   end;
  end;
```

➤ procedure koefisien_spline_kubik(n:integer;

```
procedure koefisien_spline_kubik(n:integer;
                              y,d,h,m:larik2;var s:larik1);
  var i:integer;
  begin
    for i:=0 to n-1 do
     begin
      s[i,0]:=y[i];
      s[i,1]:=d[i]-h[i]*(2*m[i]+m[i+1])/6;
      s[i,2]:=m[i]/2;
      s[i,3]:=(m[i+1]-m[i])/(6*h[i]);
     end;
  end;
```

3.2.1. *Running Time* Algoritma Mencari Koefisien Sistem Persamaan Linear

Tabel 3.2.1. Nilai *cost* dan *time* pada prosedur mencari koefisienSPL

Langkah	cost	times
1. var i:integer;	0	0
2. begin	0	0
3. h[0]:=x[1]-x[0];	c_1	1
4. d[0]:=(y[1]-y[0])/h[0];	c_2	1
5. for i:= to n-1 do	c_3	n
6. begin	0	0
7. h[i]:=x[i+1]-x[i];	c_4	n-1
8. b[i]:=2*(h[i-1]+h[i]);	c_5	n-1
9. c[i]:=h[i];	c_6	n-1
10. d[i]:=(y[i+1]-y[i])/h[i];	c_7	n-1
11. u[i]:=6*(d[i]-d[i-1]);	c_8	n-1
12. end;	0	1
13. for i:=0 to n-2 do	c_9	n
14. a[i]:=h[i];	c_{10}	n-1
15. end;	0	1

Perlu di perhatikan bahwa *time* pada baris ke-5 dan ke-13 sebesar n bukan n-1 karena sebelum *loop for* diakhiri, i mempunyai penambahan n-1. Dengan kombinasi *cost* dan *time* maka *running time* untuk algoritma mencari koefisien sistem persamaan linear adalah

$$T(n)=c_1+c_2+c_3n+c_4(n-1)+c_5(n-1)+c_6(n-1)+c_7(n-1)+c_8(n-1)+c_9n+c_{10}(n-1)$$

$$=(c_3+c_4+c_5+c_6+c_7+c_8+c_9+c_{10})n+(c_1+c_2-c_4-c_5-c_6-c_7-c_8-c_{10})$$

atau $T(n)=an+b$ dengan a dan b. Keadaan terbaik untuk kompleksitas waktu dari algoritma mencari koefisien sistem persamaan linear sama dengan keadaan terburuknya merupakan fungsi linear untuk n atau sebesar $O(n)$.

3.2.2. *Running time* Algoritma Eliminasi untuk Sistem Tridiagonal

Tabel 3.2.2. Nilai *cost* dan *time* pada prosedur eliminasi untuk sistem tridiagonal

Langkah	cost	times
`1. var i:integer;t:real;`	0	0
`2.begin`	0	0
`3. for i:=2 to n-1 do`	c_1	n-1
`4.begin`	0	0
`5. t:=a[i-1]/b[i-1]`	c_2	n-2
`6.b[i]:=b[i]-t*c[i-1]);`	c_3	n-2
`7.u[i]:=u[i]-t*u[i-1]);`	c_4	n-2
`8.end;`	0	1
`9.m[n-1]:=u[n-1]/b[n-1]);`	c_5	1
`10. for i:=n-2 downto 1 do`	c_6	n-1
`11. m[i]:=(u[i]-c[i]*m[i+1])/b[i];`	c_7	n-2
`12. end;`	0	1

Pada tabel 3.2.2 diberikan nilai untuk langkah tiap eksekusi (*cost*) dan *time* dari masing-masing statement pada prosedur eliminasi untuk sistem tridiagonal. *Time* pada baris ke-3 sebesar n-1 bukan n-2 karena sebelum *loop for* diakhiri, i mempunyai penambahan n-1. Begitu juga pada baris ke-10 sebelum *loop for* diakhiri, i mempunyai penambahan n-1. *Running time* untuk total langkah yang telah dieksekusi sebesar :

$$T(n) = c_1(n-1) + c_2(n-2) + c_3(n-2)n + c_4(n-2) + c_5 + c_6(n-1) + c_7(n-2)$$

$$= (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_6 + c_7)n + (c_5 - c_1 - 2c_2 - 2c_3 - 2c_4 - c_6 - 2c_7)$$

atau $T(n)=an+b$ dengan a dan b adalah konstanta yang tergantung pada nilai *cost* statemen c_i. Untuk kondisi *best case*, *average case* dan *worst case* mempunyai jumlah waktu tempuh yang sama untuk menyelesaikan sistem tridiagonal yaitu sebesar *T(n)=O(n)*.

3.2.3. *Running time* Algoritma Koefisien Spline Kubik

Tabel 3.2.3. Nilai *cost* dan *time* pada prosedur koefisien spline kubik

Langkah	cost	times
1. var i:integer;	0	0
2. begin	0	0
3. for i:=0 to n-1 do	c_1	n+1
4. begin	0	0
5. s[i,0]:=y[i];	c_2	n
6. s[i,1]:=d[i]-h[i]*(2*m[i]+m[i+1])/6;	c_3	n
7. s[i,2]:=m[i]/2;	c_4	n
8. s[i,3]:=(m[i+1]-m[i])/(6*h[i]);	c_5	n
9. end;	0	1
10. end;	0	1

Dari tabel 3.2.3 diketahui bahwa *time* pada baris ke-3 sebesar n+1 bukan n karena sebelum *loop for* diakhiri, i mempunyai penambahan n+1. Sehingga total nilai *cost* dan *time* dari algoritma mencari koefisien spline kubik adalah :

$$T(n) = c_1(n+1) + c_2 n + c_3 n + c_4 n + c_5 n$$

$$= (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5)n + c_1$$

Running time ini dapat ditulis dengan $T(n)=an+b$ dengan a dan b adalah konstanta yang tergantung pada nilai *cost* (c_i). Sehingga algoritma mencari koefisien spline kubik akan menyelesaikan suatu permasalahan dengan kompleksitas waktu yang sama untuk keadaan terbaik dan terburuk yaitu sebesar $T(n)=O(n)$.