Bab II

MATERI PENUNJANG

2.1 Limbah Radioaktif

Limbah radioaktif dapat dikelompokkan diantaranya berdasarkan asal terjadinya[12] dan wujudnya (bentuk fisik)[7]. Limbah radioaktif berdasarkan wujudnya dapat dikategorikan dalam bentuk gas, cair, dan padat.

2.1.1 Jenis Limbah Radioaktif Berdasarkan Asal Terjadinya

Berdasarkan asal terjadinya limbah radioaktif dibedakan menjadi:

1. Radioaktivitas alam, yaitu bahan radioaktif yang memang sudah ada di alam seperti di tambang bijih uranium.
2. Hasil fisi, yaitu radionuklida yang terjadi akibat pembelahan U dan Pu karena reaksi nuklir yang terjadi dalam teras reaktor dari senjata nuklir. Limbah radioaktif hasil fisi ini didapat dari hasil buangan pabrik daur ulang dan merupakan limbah dengan aktivitas sangat tinggi.
3. Hasil aktivasi, diperoleh karena meradiasi bahan bukan elemen bakar nuklir di dalam teras reaktor, misalnya untuk keperluan riset, produksi isotop. Juga semua bahan yang ada di sekitar teras reaktor juga terkena penyinaran sehingga menjadi radioaktif seperti bahan struktur reaktor (seperti tangki, batang pengendali elektron), pendingin reaktor, dan lain sebagainya.
4. Hasil kontaminasi, terjadi karena adanya kontak langsung antara radionuklida dengan benda atau alat yang digunakan untuk menampung atau riset. Limbah

radioaktif ini sebagian besar dihasilkan dari laboratorium riset dan para pemakai isotop lainnya, seperti rumah sakit dan lain sebagainya.

2.1.2 Limbah Radioaktif Berbentuk Gas

Limbah radioaktif berbentuk gas terutama berasal dari pendingin reaktor, udara ventilasi, dan sebagai gas buangan dari pelarut. Umumnya limbah gas terdiri dari campuran Ar-41, H-3, C-14, S-35, I-129, I-131, Ru-106, Cs-137, Sr-90, dan Kr-85.

2.1.3 Limbah Radioaktif Berbentuk Cair

Bahan bakar bekas reaktor nuklir mengandung Uranium dan Plutonium yang tidak terbakar secara sempurna. Bahan bakar bekas sisa pembakaran ini disimpan dalam suatu kolam air untuk didinginkan selama beberapa bulan agar radionuklida yang memiliki masa paruh waktu pendek habis dan panas yang dihasilkan hilang. Pada akhirnya kolam air ini bisa terkontaminasi dan menjadi limbah radioaktif cair.

Unsur utama limbah ini berupa hasil fisi dari radionuklida yang memiliki masa paruh waktu bermacam-macam yaitu dari 1 (satu) detik hingga 10 juta tahun. Oleh karena itu limbah cair dikelompokkan ke dalam tiga kelompok yaitu limbah cair aktivitas rendah (aktivitas kurang dari 10^{-2} Ci m^{-3}), sedang (aktivitas antara 10^{-2} Ci m^{-3} dan 10^{4} Ci m^{-3}), dan tinggi (aktivitas lebih dari 10^{4} Ci m^{-3}). Limbah cair aktivitas rendah memiliki kuantitas sinar α (alpha), β (beta) dan γ (gamma) yang kecil, tidak menghasilkan panas dan waktu paruhnya kurang dari 30 tahun. Contohnya adalah Pu-241, Am-241 dan Np-237. Limbah tingkat ini biasanya timbul diantaranya karena pertukaran ion. Limbah cair aktivitas sedang mengandung radionuklida yang memancarkan sinar beta-gamma dan alpha dan hasil panasnya yang minimal. Limbah ini biasanya dihasilkan oleh proses evaporasi. Kelompok ketiga adalah limbah cair aktivitas tinggi yang ditimbulkan oleh proses daur ulang bahan bakar nuklir dan 99% merupakan hasil fisi yang memiliki waktu paruh menengah dan panjang. Limbah ini sangat sedikit jumlahnya, tetapi mengandung radioaktif tinggi dan sangat panas.

2.1.4 Limbah Radioaktif Berbentuk Padat

Limbah radioaktif berbentuk padat timbul dari berbagai fasilitas instalasi nuklir. Limbah tersebut dapat dibedakan menjadi

1. Limbah yang mudah terbakar

   Seperti penyaring, sarung tangan, jas, atau juga seluruh peralatan laboratorium yang berhubungan dengan bahan-bahan radioaktif. Pengelolaan limbah ini dilakukan dengan pembakaran di dalam insenerator hingga menjadi abu. Selanjutnya abu limbah diimmobilisasi ke dalam drum menggunakan semen.

2. Limbah yang tidak dapat terbakar

   Contohnya seperti penukar ion, sisa bahan bakar, pengering, dan lumpur pelarut yang mengandung partikel-partikel lembut logam yang tidak dapat terlarut.

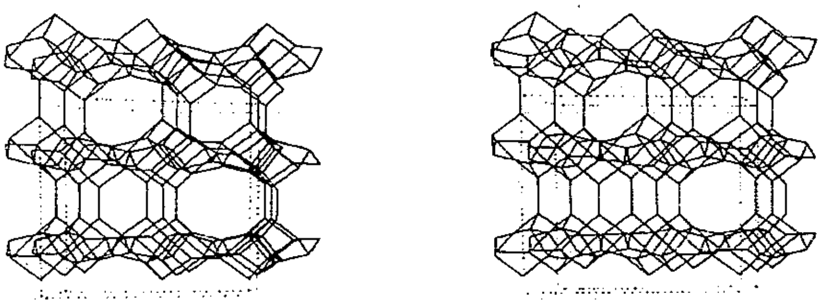
Limbah radiaoaktif padat tersebut juga dapat diklasifikasikan berdasarkan terminologi ke dalam tiga kategori tingkatan limbah yaitu aktivitas rendah, aktivitas sedang, dan aktivitas tinggi.

2.1.5 Pengelolaan Limbah Radioaktif

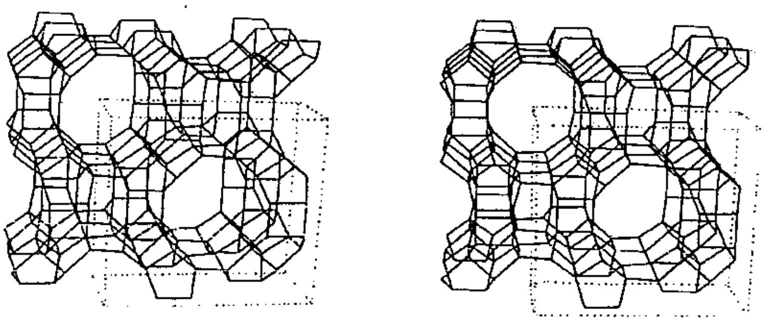
Pengelolaan limbah radioaktif adalah pengolahan, penyimpanan, dan pembuangan limbah radioaktif sehingga aman dan tidak membahayakan manusia dan lingkungannya, meliputi antara lain pengumpulan dan pengelompokan limbah, pengangkutan ke instalasi pengolahan, monitoring sebelum pengolahan, pengolahan, monitoring limbah yang sudah diolah sebelum dibuang, pembuangan atau penyimpanan akhir, dan monitoring lingkungan.

2.2 Zeolit Sebagai Penukar Ion

Zeolit telah dikenal semenjak tahun 1756 saat Cronstedt menemukan mineral stilbit seperti batuan mendidih (zeolit = boiling stone) bila dipanaskan karena dehidrasi molekul air yang dikandungnya. Dengan demikian zeolit adalah sejenis mineral dengan struktur kristal alumino silikat yang berbentuk *framework* (sangkar tiga dimensi), dan mempunyai rongga serta saluran, yang ditempati oleh kation logam alkali dan alkali tanah (misal Na, K, Mg, Ca) serta molekul air. Ion logam dan molekul air dapat diganti oleh ion atau molekul lain secara *reversible* (dapat balik) tanpa merusak struktur zeolit (Gambar 2.1 dan 2.2).



Gambar 2.1. Sruktur stereotip zeolit klinoptilolit



Gambar 2.2. Struktur stereotip zeolit mordernit

Sementara itu, reaksi pertukaran ion ada dua macam yaitu :

- pertukaran kation

$$2\,NaR + CaCl_2 \Leftrightarrow CaR_2 + 2\,NaCl$$

$$2\,HR + {}^{90}Sr(NO_3)_2 \Leftrightarrow {}^{90}SrR_2 + 2HNO_3$$

- pertukaran anion

$$2\,RCl + Na_2SO_{4(aq)} \Leftrightarrow R_2SO_4 + 2NaCl$$

$$RCl + Na^{131}I_{(aq)} \Leftrightarrow R^{131}I + NaCl$$

Setiap reaksi kimia akan terjadi kesetimbangan dimana kesetimbangan terdiri dari 2 jenis yaitu kesetimbangan homogen dan kesetimbangan heterogen. Kesetimbangan homogen adalah kesetimbangan dimana seluruh pereaksi dan hasil reaksi berada dalam fase yang sama. Misalnya kesetimbangan bentuk gas, seluruh gas pereaksi bercampur secara bebas satu dengan yang lainnya dan hasilnya pun berbentuk gas. Contohnya adalah

$$CO_{(g)} + 2H_{2(g)} \Leftrightarrow CH_3OH_{(g)}$$

Dimana

CO : gas karbon monoksida

H : gas hidrogen

CH_3OH : etanol

Selain gas, kesetimbangan homogen bisa terjadi pula pada kesetimbangan dalam bentuk cair.

Kesetimbangan heterogen terjadi karena reaksi melibatkan lebih dari satu fase. Contoh pada reaksi pertukaran ion karena pereaksi berada pada fase padat yaitu zeolit dan dalam fase cair yaitu limbah cair. Kesetimbangan heterogen akan dibahas pada bab selanjutnya. Bila kesetimbangan tercapai, konsentrasi kation A dan B dalam fase cair atau padat sudah tidak berubah terhadap waktu.

Struktur zeolit sangat cocok sebagai penukar ion untuk limbah radioaktif karena memiliki sifat sebagai berikut[7] :

1. Stabil dalam temperatur yang tinggi (bisa lebih besar dari 300^0C) dan tahan terhadap radiasi.
2. Stabil dalam keadaan teroksidasi atau tereduksi.
3. Tidak dapat *swelling*.
4. Baik yang sintetis atau alami mempunyai sifat yang murni karena sudah tidak ada bahan campuran lainnya.
5. Tinggi tingkat pori-porinya dan cocok digunakan dalam kolom
6. Tinggi kapasitas pertukaran ionnya.
7. Mampu menyerap logam berat.

Karena sifat-sifatnya itu, zeolit sebagai penukar ion dapat lebih mudah untuk diprediksi[7]. Tetapi kemampuan zeolit tergantung dari :

1. Jenis kation, ukuran kation baik dalam unhydrous (tidak dalam larutan) dan hydrated (dalam larutan) dan nilai kation termasuk golongan I atau golongan II dalam tabel periodik.

2. Konsentrasi jenis kation dalam larutan.
3. Jenis anion yang tergabung dalam kation masukan (dalam bentuk limbah radioaktif cair).
4. Pelarut bisa berupa air atau chloroform atau juga alkohol, tetapi dalam penelitian ini pelarut berupa air.
5. Temperatur.
6. Karakteristik struktur dari zeolit.

   Semakin sedikit kandungan silikon dibandingkan dengan aluminium dalam zeolit maka semakin besar pula kemampuan pertukaran ion.

2.3 Pencocokan Kurva

Untuk memecahkan mekanisme pertukaran ion dari dua fase padat dan cair dengan berbagai konstanta termodinamika digunakan persamaan yang telah didapatkan oleh Guggenheim dan Glueckauf diantaranya dengan menghitung konstanta Kielland (K_c) suatu reaksi pertukaran ion. Nilai K_c sebagai fungsi A_c yang ditentukan dari data percobaan laboratorium perlu dievaluasi dengan pencocokan kurva bentuk polinomial sehingga kurva $Ln(K_c)$ sebagai fungsi A_c merupakan dasar penentuan konstanta kesetimbangan (K_a). Ada dua pendekatan umum untuk mencocokkan kurva yang dibedakan antara satu dengan lainnya berdasarkan pada jumlah kesalahan sehubungan dengan data tersebut[3], yaitu

1. Interpolasi

   Data telah diketahui dengan teliti, pendekatan dasar adalah mencocokkan sebuah kurva atau sederetan kurva yang melalui setiap titik secara langsung. Data demikian biasanya berasal dari tabel. Contohnya adalah harga kerapatan air atau kapasitas panas gas sebagai fungsi suhu. Taksiran harga-harga diantara titik-titik diskrit yang telah dikenal dinamakan interpolasi.

2. Aproksimasi

   Data menunjukkan suatu tingkat kesalahan yang berarti atau noise. Kesalahan yang ditimbulkan bisa dari bermacam-macam sebab, diantaranya yaitu

- Ralat alat ukur
- Ralat pembacaan

   Strategi untuk mengatasinya adalah dengan menurunkan sebuah kurva tunggal yang menyatakan kecenderungan umum dari data. Karena mungkin sembarang titik data tidak tepat, maka metode ini tidak melakukan upaya apa-apa dalam menyambungkan setiap titik. Kurva didesain agar mengikuti pola titik-titik yang diambil sebagai suatu grup.

Dalam pertukaran ion menggunakan cara aproksimasi karena data yang didapat adalah hasil percobaan di laboratorium yang dimungkinkan terjadi suatu kesalahan. Aproksimasi yang digunakan adalah metode kuadrat terkecil dalam bentuk matrik.

2.4 Matrik

Definisi 2.4.1. Matrik[6]

Matrik adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun atau disejajarkan dalam bentuk empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom). Skalar-skalar itu disebut elemen matrik. Untuk batasnya dapat berupa

$$\left(\quad\right) \text{ atau } \left[\quad\right]$$

Contoh matrik riil

$$
A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \\ 7 & \sqrt{2} & 10 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \rightarrow \text{ baris } 1 \\ \rightarrow \text{ baris } 2 \\ \rightarrow \text{ baris } 3 \end{matrix}
$$

$$
\begin{array}{lcccc} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{kolom} & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}
$$

Matrik diberi nama dengan huruf besar, misalnya A,B,P,C, dan lain-lain. Secara lengkap ditulis matrik $A = (a_{ij})$ artinya suatu matrik A yang elemen-elemennya a_{ij} dimana indeks i menyatakan baris ke-i dan indeks j menyatakan kolom ke-j dari elemen tersebut

Pandang sebuah matrik $A = (a_{ij})$, $i=1,2,3,..,m$ dan $j=1,2,3,..,n$ yang berarti bahwa banyaknya baris = m, serta banyaknya kolom = n

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

(mxn) disebut ukuran (ordo) dari matrik. Pada contoh matrik riil A, ukuran A adalah (3x4) sedangkan elemen-elemennya $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = 1$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{24} = -3$, $a_{31} = 7$, $a_{32} = \sqrt{2}$ $a_{33} = 10$, $a_{34} = 1$ (semuanya ada 12 elemen).

Definisi 2.4.2. Matrik Bujur sangkar[6,9]

Suatu matrik dengan banyak baris = banyak kolom = n disebut matrik bujur sangkar berordo n. Barisan elemen a_{11}, a_{22}, a_{33}, …, a_{nn} disebut diagonal utama matrik bujur sangkar.

Definisi 2.4.3. Matrik Diagonal[6,9]

Matrik diagonal adalah matrik bujur sangkar yang semua elemen di luar diagonal utama adalah nol.

Definisi 2.4.4. Matrik Identitas[6,9]

Matrik identitas adalah matrik diagonal yang elemen-elemen diagonal utamanya semuanya adalah 1, dengan perkataan lain (a_{ij}) adalah matrik identitas bila $a_{ij} = 1$ untuk $i=j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$. Matrik identitas sering ditulis dengan I atau I_n dimana n menunjukkan ukuran matrik bujur sangkar tersebut.

Definisi 2.4.5. Perkalian Matrik[6,9]

Pandang $A = (a_{ij})$ berukuran (pxq) dan $B=(b_{ij})$ berukuran (qxr). Maka perkalian AB adalah suatu matrik $C=(c_{ij})$ berukuran (pxr) dimana

$$c_{ij}= a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + a_{i3}\, b_{3j} +..+ a_{iq}\, b_{qj}$$

Untuk setiap i=1,2,3,..,p dan j=1,2,3,..,r

Syarat perkalian matrik:

Banyaknya kolom matrik pertama = banyaknya baris matrik kedua.

Definisi 2.4.6. Matrik Transpose[6,9]

Pandang $A = (a_{ij})$ berukuran (mxn) maka transpose dari matrik A adalah matrik A^T berukuran (nxm) yang didapatkan dari A dengan menuliskan baris ke-i dari A, i=1,2,3,..,m sebagai kolom ke-i dari A^T. Dengan perkataan lain : $A^T = (a_{ji})$.

Definisi 2.4.7. Matrik Invers[6,9]

Sebuah matrik bujur sangkar A berordo n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut mempunyai invers bila ada suatu matrik B, sehingga $AB = BA = I_n$. Matrik B disebut invers matrik A, ditulis A^{-1}, dimana A^{-1} juga berordo n.

Matrik yang mempunyai invers adalah matrik yang non singular (atau determinannya $\neq 0$). Invers, bila ada, bernilai tunggal dan mempunyai sifat

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Definisi 2.4.8. Operasi Elementer pada Baris dan Kolom suatu Matrik[6]

Operasi elementer pada baris/kolom matrik A adalah

1a) Penukaran tempat baris ke-i dan baris ke-j (baris ke-i dijadikan baris ke-j dan baris ke-j dijadikan baris ke-i), ditulis: $H_{ij}(A)$.

1b) Penukaran tempat kolom ke-i dan kolom ke-j (kolom ke-i dijadikan kolom ke-j dan kolom ke-j dijadikan kolom ke-i) , ditulis: $K_{ij}(A)$.

2a) Mengalikan baris ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis: $H_i^{(\lambda)}(A)$.

2b) Mengalikan kolom ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis: $K_i^{(\lambda)}(A)$.

3a) Menambah baris ke-i dengan λ kali baris ke-j, ditulis: $H_{ij}^{(\lambda)}(A)$.

3b) Menambah kolom ke-i dengan λ kali kolom ke-j, ditulis: $K_{ij}^{(\lambda)}(A)$.

2.5 Metode Kuadrat Terkecil dari Polinomial

Model regresi polinomial biasanya digunakan untuk menggambarkan hubungan antara 2 variabel yang secara matematik dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2 + b_3 x_i^3 + \ldots + b_n x_i^n + \varepsilon_i \qquad (2.1)$$

dengan

$i = 1,2,3, \ldots ,n$

y_i = variabel tak bebas ke i

x_i = variabel bebas ke i

ε_i = variabel gangguan ke i (deviasi)

b_0 = konstanta

$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ = koefisien polinomial

Jika dinyatakan dalam bentuk matrik maka persamaan (2.1) dapat ditulis sebagai berikut

$$Y = \beta X + \varepsilon \qquad (2.2)$$

dengan

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

Y matrik variabel tak bebas berukuran nx1

X matrik variabel bebas berukuran n x (n+1)

β adalah matrik koefisien regresi berukuran (n+1) x 1

ε adalah matrik error berukuran nx1

Diberikan suatu ε_i karena data yang diperoleh berupa hasil eksperimen, sehingga ada kemungkinan suatu data mempunyai kesalahan bawaan. Salah satu strategi untuk memperkecil deviasi adalah dengan meminimalkan jumlah kuadrat residual, S_r :

$$\begin{aligned} S_r &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2 - \cdots - b_n x_i^n\right)^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Karena ada n+1 anu, yaitu $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$, maka S_r akan minimum bila turunan parsiil pertama terhadap $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ nol.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_r}{\partial b_0} &= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2 - \cdots - b_n x_i^n)(-1) = 0 \\ \frac{\partial S_r}{\partial b_1} &= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2 - \cdots - b_n x_i^n)(-x_i) = 0 \\ \frac{\partial S_r}{\partial b_2} &= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2 - \cdots - b_n x_i^n)(-x_i^2) = 0 \\ \vdots \quad & \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial S_r}{\partial b_n} &= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2 - \cdots - b_n x_i^n)(-x_i^n) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sehingga diperoleh persamaan-persamaan normal kuadrat terkecil sebagai berikut:

$$nb_0 + (\sum_{i=1}^{n} x_i)\, b_1 + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)\, b_2 + (\sum_{i=1}^{n} x_i^3)\, b_3 + \cdots + (\sum_{i=1}^{n} x_i^n)\, b_n = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\begin{aligned}
&(\sum_{i=1}^{n} x_i)\, b_0 + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)\, b_1 + (\sum_{i=1}^{n} x_i^3)\, b_2 + \cdots + (\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1})\, b_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
&(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)\, b_0 + (\sum_{i=1}^{n} x_i^3)\, b_1 + (\sum_{i=1}^{n} x_i^4)\, b_2 + \cdots + (\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2})\, b_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \qquad (2.6) \\
&\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&(\sum_{i=1}^{n} x_i^n)\, b_0 + (\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1})\, b_1 + (\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2})\, b_2 + \cdots + (\sum_{i=1}^{n} x_i^{2n})\, b_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^n y_i
\end{aligned}$$

Selanjutnya persamaan 2.6 dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Gauss Jordan, karena sekaligus dapat menghitung nilai inversnya. Bila nilai inversnya ada, berarti sistem persamaan liniernya dapat diselesaikan.

2.6 Metode Gauss Jordan

Misalkan ada n persamaan

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n = b_2$

$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\ldots+a_{3n}x_n = b_3$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\ldots+a_{nn}x_n = b_n$

Akan dicari nilai x dengan menggunakan metode Gauss-Jordan, yaitu:

1. Membentuk persamaan-persamaan tersebut ke dalam sebuah matrik dengan menambah elemen identitas pada ruas kanan.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c|ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

2. Menjadikan elemen a_{11} sebagai elemen pivot dan membagi seluruh elemen baris pertama dengan elemen a_{11}.
3. Kecuali elemen pivot, jadikan nol elemen yang sekolom dengan elemen pivot menggunakan operasi baris elementer. Hasil dari langkah 2 dan 3 adalah

$$\left[\begin{array}{ccccc|c|ccccc} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 & c_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 & c_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} & b'_3 & c_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \cdots & a'_{nn} & b'_n & c_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

4. Mengulangi langkah 2 dan 3 untuk baris selanjutnya sampai baris ke-n dengan elemen pivotnya adalah elemen diagonal utama sehingga terbentuk matrik identitas dan penyelesaian persamaan linier.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^*_1 & c^*_{11} & c^*_{12} & c^*_{13} & \cdots & c^*_{11} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b^*_2 & c^*_{21} & c^*_{22} & c^*_{23} & \cdots & c^*_{11} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b^*_3 & c^*_{31} & c^*_{32} & c^*_{33} & \cdots & c^*_{11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b^*_n & c^*_{n1} & c^*_{n2} & c^*_{n3} & \cdots & c^*_{nn} \end{array}\right]$$

Contoh :

$13x_1+7,312x_2+5,3717x_3 = 15,9739$

$7,312x_1+5,3717x_2+4,3187x_3 = 10,1380$

$5,3717x_1+4,3187x_2+3,6543x_3 = 6,9677$

Penyelesaian dengan Gauss-Jordan adalah:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 13 & 7,312 & 5,3717 & 15,9739 & 1 & 0 & 0 \\ 7,312 & 5,3717 & 4,3187 & 10,1380 & 0 & 1 & 0 \\ 5,3717 & 4,3187 & 3,6543 & 6,9677 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{H_1^{(1/13)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0,5624615385 & 0,4132076923 & 1,228761538 & 1/13 & 0 & 0 \\ 7,312 & 5,3717 & 4,3187 & 10,1380 & 0 & 1 & 0 \\ 5,3717 & 4,3187 & 3,6543 & 6,9677 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} H_{21}^{(-7,312)} \\ \sim \\ H_{31}^{(-5,3717)} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0,5624615385 & 0,4132076923 & 1,228761538 & 1/13 & 0 & 0 \\ 0 & 1,258981230 & 1,297325354 & 1,153295634 & -0,5624615385 & 1 & 0 \\ 0 & 1,297325354 & 1,434672239 & 0,367161646 & -0,4132076923 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{H_2^{(1/1,258981230)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0,5624615385 & 0,4132076923 & 1,228761538 & 1/13 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1,030456470 & 0,9160546691 & -0,4467592726 & 0,7942930174 & 0 \\ 0 & 1,297325354 & 1,434672239 & 0,367161646 & -0,4132076923 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} H_{12}^{(-0,5624615385)} \\ \sim \\ H_{32}^{(-1,297325354)} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & -0,1663844392 & 0,7135160195 & 0,3282079847 & -0,4467592726 & 0 \\ 0 & 1 & 1,030456470 & 0,9160546691 & -0,4467592726 & 0,7942930174 & 0 \\ 0 & 0 & 0,097834934 & -0,821259302 & 0,1663844392 & -1,030456470 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{H_3^{(1/0,097834934)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & -0{,}1663844392 & 0{,}7135160195 & 0{,}3282079847 & -0{,}4467592726 & 0 \\ 0 & 1 & 1{,}030456470 & 0{,}9160546691 & -0{,}4467592726 & 0{,}7942930174 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8{,}394335938 & 1{,}700664911 & -10{,}53260250 & 10{,}22129785 \end{array}\right] \begin{array}{c} H_{23}^{(-1{,}030456470)} \\ \sim \\ H_{13}^{(0{,}1663844392)} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & -0{,}6831708565 & 0{,}6111721628 & -2{,}199220431 & 1{,}700664909 \\ 0 & 1 & 0 & 9{,}566052439 & -2{,}199220432 & 11{,}64768140 & -10{,}53260249 \\ 0 & 0 & 1 & -8{,}394335938 & 1{,}700664911 & -10{,}53260250 & 10{,}22129785 \end{array}\right]$$

Sehingga hasil akhirnya adalah untuk x_1 = -0,6831708565, x_2 = 9,566052439, x_3 = -8,394335938.