BAB II

DESKRIPSI TEORITIS

2.1 Analisis Variansi Univariat pada Rancangan Faktorial dengan Rancangan Dasar Rancangan Acak Lengkap untuk Model Tetap.

Analisis variansi univariat pada rancangan faktorial dengan rancangan dasar rancangan acak lengkap untuk model tetap digunakan untuk mengetahui ada atau tidaknya pengaruh dua faktor yaitu faktor A dan faktor B serta menentukan apakah terdapat interaksi antara faktor A dan B terhadap satu respon.

Suatu percobaan yang terdiri dari dua faktor yaitu faktor A dan faktor B, faktor A dengan a buah taraf faktor dan faktor B dengan b buah taraf faktor yang masing-masing diulang sebanyak n. Tiap kombinasi perlakuan menentukan suatu sel dalam matriks. Sehingga terdapat sebanyak ab sel, masing-masing berisi n pengamatan. Pengamatan ke-k yang diambil pada taraf ke-i dari A dan taraf ke-j dari B dinotasikan y_{ijk}. Model linier untuk analisis variansi dua faktor untuk rancangan faktorial pada rancangan acak lengkap model tetap:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad (1)$$

$$i = 1,2,\ldots,a \; ; \; j = 1,2,\ldots,b \; ; \; k = 1,2,\ldots,n$$

dimana:

y_{ijk} = hasil pengamatan pada taraf ke-i faktor A, taraf ke-j faktor B pada ulangan ke-k.

μ = rata-rata umum

τ_i = penyimpangan hasil dari nilai μ yang disebabkan oleh pengaruh perlakuan faktor A taraf ke-i

β_j = penyimpangan hasil dari nilai μ yang disebabkan oleh pengaruh perlakuan faktor B taraf ke-j

γ_{ij} = penyimpangan hasil dari nilai μ yang disebabkan oleh pengaruh interaksi faktor A taraf ke-i dan faktor B taraf ke-j

ε_{ijk} = pengaruh acak yang masuk ke dalam percobaan.

Model tetap karena perlakuan diambil secara khusus oleh pelaku percobaan (Montgomery, D.C., 1990), artinya perlakuan ditentukan terlebih dahulu oleh pelaku percobaan. Asumsi yang diperlukan pada anova dua faktor untuk rancangan faktorial dengan model tetap adalah:

1. ε_{ijk} NID$(0, \sigma^2)$
2. $\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$
3. $\sum_{j=0}^{b} \beta_j = 0$
4. $\sum_{i=1}^{a} \gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{b} \gamma_{ij} = 0$

- Karena telah melalui pengacakan, asumsi ε_{ijk} independen dianggap telah memenuhi. Pemeriksaan normalitas dapat dilakukan dengan membuat plot probabilitas normal dari residual (ε_{ijk}).Langkah-langkah untuk membuat plot probabilitas normal adalah sebagai berikut:

  a. Menghitung nilai residual (e_{ijk}) dimana $e_{ijk} = y_{ijk} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{ij.}$

b. Residual dari masing-masing pengamatan disusun dengan urutan naik dari yang terkecil sampai yang terbesar.

c. Menghitung probabilitas kumulatif.

$$P_i = \frac{(i - 1/2)}{abn}, \quad i = 1,2, \ldots, abn$$

d. Membuat plot antara e_{ijk} dengan P_i

e. Jika titik-titik (e_{ijk}, P_i) mendekati garis lurus dan lebih banyak titik berada disekitar nol, berarti cukup beralasan untuk mengatakan bahwa asumsi ε_{ijk} berdistribusi normal dengan rata-rata nol dipenuhi.

- Pemeriksaan asumsi homogenitas varians dapat dilakukan dengan uji Bartlett.

Misalkan ada k buah populasi berdistribusi independen dan normal, masing-masing dengan variansi dan ukuran sampel adalah σ_1^2, σ_2^2, ..., σ_k^2 dan $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k$. Akan diuji hipotesis:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots\ldots = \sigma_k^2$ (variansi homogen)

H_1 : paling sedikit satu tanda sama dengan tidak berlaku (variansi tidak homogen)

Statistik hitung untuk uji Bartlett menggunakan statistik chi-kuadrat yaitu:

$$\chi^2 = 2{,}3026\left\{(\log s^2)\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\log s_i^{\,2}\right\}$$

dimana : $$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)s_i^{\,2}}{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)}$$

s_i^2 = variansi dari sampel ke-i

dengan taraf nyata α, kita tolak hipotesis H_0 jika $\chi^2 \geq \chi^2_{(1-\alpha)(k-1)}$, dimana $\chi^2_{(1-\alpha)(k-1)}$ didapat dari daftar distribusi chi-kuadrat dengan peluang (1-α) dan derajat bebas = k-1. Lay out data untuk Anova dua faktor pada rancangan faktorial dapat disusun pada tabel 1.

Tabel 1 Lay out data untuk Anova Dua Faktor untuk Rancangan Faktorial.

Faktor A	Faktor B			
	1	2	....	b
1	y_{111}	y_{121}	....	y_{1b1}
	y_{112}	y_{122}	....	y_{1b2}
	.	.		.
	.	.		.
	.	.		.
	y_{11n}	y_{12n}	....	y_{1bn}
2	y_{211}	y_{221}	....	y_{2b1}
	y_{212}	y_{222}	....	y_{2b2}
	.	.		.
	.	.		.
	.	.		.
	y_{21n}	y_{22n}	....	y_{2bn}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
a	y_{a11}	y_{a21}	....	y_{ab1}
	y_{a12}	y_{a22}	....	y_{ab2}
	.	.		.
	.	.		.
	.	.		.
	y_{a1n}	y_{a2n}	....	y_{abn}

Notasikan $y_{i..}$ menyatakan total pengamatan pada taraf ke-i faktor A, $\bar{y}_{i..}$ menyatakan rata-rata taraf ke-i, $y_{.j.}$ menyatakan total pengamatan pada taraf ke-j faktor B, $\bar{y}_{.j.}$ menyatakan rata-rata taraf ke-j, y_{ij} menyatakan total pengamatan pada taraf ke-i faktor A dan taraf ke-j faktor B, $\bar{y}_{ij.}$ Menyatakan rata-rata taraf ke-i faktor A dan taraf ke-j faktor B, $y_{...}$ menyatakan total keseluruhan semua pengamatan ke-ij, $y_{...}$ menyatakan total keseluruhan semua pengamatan dan $\bar{y}_{...}$ menyatakan rata-rata semua pengamatan. Dinyatakan secara matematika

$$y_{i..} = \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$$

$$y_{.j.} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$$

$$y_{ij.} = \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$$

$$y_{...} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$$

$$\bar{y}_{i..} = \frac{1}{bn} y_{i..} = \frac{1}{bn}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$$

$$\bar{y}_{.j.} = \frac{1}{an} y_{.j.} = \frac{1}{an}\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$$

$$\bar{y}_{ij.} = \frac{1}{n} y_{ij.} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$$

$$\bar{y}_{...} = \frac{1}{abn} y_{...} = \frac{1}{abn}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$$

Untuk menguji ada atau tidaknya perbedaan nyata tentang pengaruh masing-masing faktor dan interaksi antara dua faktor dapat menggunakan hipotesis sebagai berikut:

1. Uji hipotesis untuk faktor A

   H_{0A} : $\mu_{1.} = \mu_{2.} = ... = \mu_{a.}$ (tidak ada pengaruh faktor A terhadap respon)

   H_{1A} : untuk sedikitnya dua $\mu_{i.}$ yang tidak sama (ada pengaruh faktor A terhadap respon) (2)

2. Uji hipotesis untuk faktor B

   H_{0B} : $\mu_{.1} = \mu_{.2} = ... = \mu_{.b}$ (tidak ada pengaruh faktor B terhadap respon)

   H_{1B} : untuk sedikitnya dua $\mu_{.j}$ yang tidak sama (ada pengaruh faktor terhadap respon) (3)

3. Uji hipotesis untuk interaksi A dan B

   H_{0AB} : $\mu_{11} = \mu_{12} = ... = \mu_{ab}$ (tidak ada pengaruh interaksi A dan B terhadap respon)

   H_{1AB} : untuk sedikitnya dua μ_{ij} yang tidak sama (ada pengaruh interaksi A dan B terhadap respon) (4)

Jumlah kuadrat total terkoreksi yang diukur dari total variabilitas dalam data dapat ditulis sebagai:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk} - \bar{y}_{...}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} + \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right) + \left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)\right\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}\right) + \left(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}\right) + \left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right) + \left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{j} + \bar{y}_{...}\right)\right\}^2$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk} - \bar{y}_{...}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(y_{ijk} - \bar{y}_{ij}\right)^2 + 2\left(y_{ijk} - \bar{y}_{ij}\right)\left(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}\right) + \left(\bar{y}_{i..} - \bar{y}\right)^2\right.$$

$$+ \left[\left(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}\right) + \left(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}\right)\right]\left[\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right)\right]$$

$$\left. + \left(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{...}\right)^2 + 2\left(\bar{y}_{j.} - \bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j}\bar{y}_{...}\right) + \left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)^2\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}[(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}) + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})][(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})]$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})$$

$$= bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + an\sum_{i=1}^{b}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 + n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}[(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}) + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})][(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})]$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}) \qquad (5)$$

Susunan produk silang pada persamaan (5) adalah nol karena:

$$2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) = 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} - \sum_{k=1}^{n}\bar{y}_{ij.}\right)(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})$$

$$= 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(n\bar{y}_{ij.} - n\bar{y}_{ij.})(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})$$

$$= 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}0(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})$$

$$= 0$$

$$2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}[(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}) + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})][(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})]$$

$$= 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left[\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}) + \sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})\right][(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})]$$

$$= 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} - \sum_{k=1}^{n}\bar{y}_{ij.}\right) + \sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})\right][(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})]$$

$$= 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left[\left(n\bar{y}_{ij} - n\bar{y}_{ij.}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}\right)\right]\left[\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)\right]$$

$$= 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left[0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}\right)\right]\left[\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)\right]$$

$$= 2\sum_{i=1}^{a}\left[\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}\right)\right]\left[\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)\right]$$

$$= 2\sum_{i=1}^{a}\left(bn\bar{y}_{i..} - bn\bar{y}_{...}\right)\left[\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)\right]$$

$$= 2\left(bn\sum_{i=1}^{a}\bar{y}_{i..} - abn\bar{y}_{...}\right)\left[\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)\right]$$

$$= 2\left(abn\bar{y}_{...} - abn\bar{y}_{...}\right)\left[\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)\right]$$

$$= 2.0\left[\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)\right]$$

$$= 0$$

$$2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\sum_{k=1}^{n}\bar{y}_{.j.} - \sum_{k=1}^{n}\bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(n\bar{y}_{.j.} - n\bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{a}\left(n\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{.j.} - bn\bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)$$

$$= 2\sum\left(n\frac{1}{an}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}y_{ijk} - bn\bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)$$

$$= 2\sum\left(nb\bar{y}_{...} - bn\bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right) = 0$$

Sehingga persamaan (5) menjadi

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk}-\bar{y}_{...}\right)^2 = bn\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}\right)^2 + an\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}\right)^2$$

$$+n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.}\right)^2 \qquad (6)$$

dinotasikan:

$$JKT = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk}-\bar{y}_{...}\right)^2$$

$$JKA = bn\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}\right)^2$$

$$JKB = an\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}\right)^2$$

$$JKAB = n\sum\sum\left(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...}\right)^2$$

$$JKE = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.}\right)^2$$

Dimana

JKT : Jumlah Kuadrat total

JKA : Jumlah Kuadrat Faktor A

JKB : Jumlah Kuadrat Faktor B

JKAB : Jumlah Kuadrat interaksi AB

JKE : Jumlah Kuadrat Error

Persamaan (6) secara simbolik dapat ditulis sebagai:

$$JKT = JKA + JKB + JKAB + JKE \qquad (7)$$

Statistik uji untuk hipotesis pada persamaan (2), (3), dan (4) adalah:

1. $$F_{0A} = \frac{JKA/(a-1)}{JKE/ab(n-1)} = \frac{KTA}{KTE} \tag{8}$$

2. $$F_{0B} = \frac{JKB/(b-1)}{JKE/ab(n-1)} = \frac{KTB}{KTE} \tag{9}$$

3. $$F_{0AB} = \frac{JKAB/(a-1)(b-1)}{JKE/ab(n-1)} = \frac{KTAB}{KTE} \tag{10}$$

dimana:

KTA : Kuadrat Tengah Faktor A

KTB : Kuadrat Tengah Faktor B

KTAB : Kuadrat Tengah Interaksi AB

KTE : Kuadrat Tengah Error

Statistik pada persamaan (8), (9) dan (10) masing-masing mengikuti distribusi $F_{a-1;\,ab(n-1)}$, $F_{b-1;\,ab(n-1)}$, $F_{(a-1)(b-1);\,ab(n-1)}$.

Pengambilan keputusan untuk hipotesis pada persamaan (2), (3), dan (4) yaitu :

1. menolak H_{0A} : $\mu_{1.} = \mu_{2.} = \ldots = \mu_{a.}$, jika $F_{0A} = KTA / KTE > F_{\alpha;\,a-1;\,ab(n-1)}$
2. menolak H_{0B} : $\mu_{.1} = \mu_{.2} = \ldots = \mu_{.b}$, jika $F_{0B} = KTB / KTE > F_{\alpha;\,b-1;\,ab(n-1)}$
3. menolak H_{0AB} : $\mu_{11} = \mu_{12} = \ldots = \mu_{ab}$, jika $F_{0AB} = KTA / KTE > F_{\alpha;\,(a-1)(b-1);\,ab(n-1)}$

Tabel 2 Analisis Variansi Dua Faktor Rancangan Faktorial Rancangan Acak Lengkap Model Tetap.

Sumber variasi	JK	dk	KT	Fo	F_{tabel}
Faktor A	JKA	a-1	KTA	KTA/KTE	$F_{\alpha;\,a-1;\,ab(n-1)}$
Faktor B	JKB	b-1	KTB	KTB/KTE	$F_{\alpha;\,b-1;\,ab(n-1)}$
Interaksi AB	JKAB	(a-1)(b-1)	KTAB	KTAB/KTE	$F_{\alpha;\,(a-1)(b-1);\,ab(n-1)}$
Error	JKE	ab(n-1)	KTE		
Total	JKT	abn-1			

Penolakan terhadap hipotesis nol menunjukkan adanya perbedaan antara vektor rata-rata perlakuan sehingga diperlukan uji lanjut. Jika hipotesis untuk interaksi berbeda nyata maka hanya dilakukan uji lanjut untuk interaksinya saja. Tetapi jika hipotesis untuk pengaruh interaksi tidak berbeda nyata dilakukan uji lanjut untuk pengaruh faktor yang berbeda nyata.

Misalkan faktor A yang berpengaruh terhadap respon, maka uji rata-rata perlakuan secara individu dengan kontras ortogonal dapat diuraikan sebagai berikut: Kontras antar vektor rata-rata populasi uuntuk fator A didefinisikan sebagai :

$$\delta = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_{i.} = c_1 \mu_{1.} + c_2 \mu_{2.} + \ldots\ldots + c_a \mu_{a.} \tag{11}$$

dimana c_i konstanta yang merupakan koefisien kontras dan $\sum_{i=1}^{a} c_i = 0$.

Kontras δ diestimasi dengan kontras rata-rata sampel

$$\hat{\delta} = \sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.} = c_1 \bar{y}_{1.} + c_2 \bar{y}_{2.} + \ldots + c_a \bar{y}_{a.} \tag{12}$$

hipotesis untuk kontras adalah

$$H_0: \delta = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_{i.} = c_1 \mu_{1.} + c_2 \mu_{2.} + \ldots\ldots + c_a \mu_{a.} = 0$$

$$H_1: \delta = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_{i.} = c_1 \mu_{1.} + c_2 \mu_{2.} + \ldots\ldots + c_a \mu_{a.} \neq 0 \tag{13}$$

Hipotesis pada persamaan (13) dapat diuji dengan

$$t = \frac{\hat{\delta}}{S_{\hat{\delta}}} \tag{14}$$

dimana $S_{\hat{\delta}} = \frac{KTE}{n} \sum_{i=1}^{a} c_i^{2}$

yang mengikuti distribusi t dengan derajat bebas ab(n-1). Selain itu hipotesis pada persamaan (13) dapat diuji dengan bentuk kuadrat pada persamaan (14)

$$F = t^2 = \frac{\hat{\delta}^2}{S_{\hat{\delta}^2}} = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i.}\right)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{a} c_i^{\,2}}{KTE} \qquad (15)$$

yang mengikuti distribusi $F_{1;ab(n-1)}$. Pengambilan keputusan yaitu dengan menolak

H_0: $\delta = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_{i.} = c_1\mu_{1.} + c_2\mu_{2.} + \ldots\ldots + c_a\mu_{a.} = 0$ jika $F > F_{\alpha;1;ab(n-1)}$

(Hines, W.W, and Montgomery, D.C., 1990)

2.2. Matriks

Di bawah ini akan dijelaskan tentang kebergantungan linier antara vektor-vektor dan tentang rank suatu matriks yang akan dijelaskan pada definisi 2.2.1 dan definisi 2.2.2.

Definisi 2.2.1 :vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ……………., $\mathbf{a}_n$ dikatakan kebergantungan linier (tidak bebas linier) jika terdapat konstanta c_1, c_2, …………..,c_n (tidak semua nol) sehingga :

$$c_1\,\mathbf{a}_1 + c_2\,\mathbf{a}_2 + \ldots\ldots\ldots + c_n\,\mathbf{a}_n = 0 \qquad (16)$$

jika tidak demikian vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ……………., $\mathbf{a}_n$ adalah bebas linier. c_1, c_2, …………..,c_n bisa dicari dengan sistem persamaan linier.

Definisi 2.2.2 :Rank dari matriks **A** yang dinotasikan dengan R(**A**) didefinisikan sebagai jumlah maksimal baris atau kolom yang bebas linier.

Rank dari suatu matrik dapat ditentukan mulai dari menghitung setiap determinan berordo terbesar untuk memastikan apakah diantaranya ada yang tak nol. Karena suatu determinan tak nol menentukan baris atau kolom yang bebas linear, maka rank suatu matriks ditentukan oleh maksimum banyaknya baris atau kolom dalam matrik itu yang bebas linier.

Contoh 2.2.1. :

Misalkan A adalah matriks bujursangkar berukuran 4x4. Apakah vektor kolom dari matriks **A** bergantung linear dan berapakah rank **A** ?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ -6 & -9 & 3 & 5 \\ 8 & 12 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Pandang matriks **A** sebagai vektor-vektor kolom, substitusikan keempat vektor itu ke dalam persamaan 2.2.1 didapat :

$$c_1\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

jika diselesaikan dengan metode eliminasi, maka didapat hasil sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa himpunan vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ dan $\mathbf{a}_4$ memenuhi persamaan :

$$3\,\mathbf{a}_1 - 2\,\mathbf{a}_2 + (0)\,\mathbf{a}_3 + (0)\,\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$$

atau kelipatan skalanya. Jadi keempat vektor itu bergantung linier tetapi himpunan vektor $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ dan $\mathbf{a}_4$ adalah bebas linear, sebab persamaan

$c_2\,\mathbf{a}_2 + c_3\,\mathbf{a}_3 + c_4\,\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$

hanya benar jika c_2, c_3 dan c_4 semuanya nol. Kebenaran kesimpulan ini dapat ditera dengan memasukkan vektor $\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ dan $\mathbf{a}_4$ ke dalam persamaan (21) jika diselesaikan dengan metode eliminasi :

$$c_2\begin{bmatrix}3\\-9\\12\\-3\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}5\\3\\-2\\1\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}2\\5\\-1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$3c_2 + 5c_3 + 2c_4 = 0$ (17)

$-9c_2 + 3c_3 + 5c_4 = 0$ (18)

$12c_2 - 2c_3 - c_4 = 0$ (19)

$-3c_2 + c_3 + 4c_4 = 0$ (20)

dari persamaan (17) dan (18) diperoleh :

$18c_3 + 11c_4 = 0$ (21)

dari persamaan (18) dan (19) diperoleh :

$-6c_3 + 15c_4 = 0$ (22)

dari persamaan (21) dan (22) diperoleh : $c_4 = 0$

dari persamaan (21) diperoleh : $c_3 = 0$

dari persamaan (22) diperoleh : $c_2 = 0$

Dari metode eliminasi di atas diperoleh :$c_2 = c_3 = c_4 = 0$

jadi himpunan vektor $\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ dan $\mathbf{a}_4$ adalah himpunan yang bebas linear dan R(A) = 3 karena jumlah vektor yang bebas linear adalah tiga.

Definisi 2.2.3.:misalkan **A** adalah matriks bujursangkar berukuran pxp. Trace dari matrik A ditulis tr(A) adalah jumlahan dari elemen-elemen diagonalnya, sehingga

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{p} a_{ii} \qquad (23)$$

Sifat-sifat dari trace adalah sebagai berikut, misalkan **A** dan **B** matriks bujurangkar berukuran pxp dan **x** vektor berukuran p x 1, maka :

1. $tr(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) \pm tr(\mathbf{B})$ (24)

2. $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$ (25)

3. untuk **A** dan **B** matriks simetris,

$$tr(\mathbf{AB}) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{ij} \qquad (26)$$

4. $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = tr(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}) = tr(\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}')$ (27)

Berikut ini akan dijelaskan tentang determinan beserta sifat-sifatnya :

Definisi 2.2.4.:misalkan **A** matrik bujursangkar berukuran p x p

1. $\mathbf{M}_{ij}$ adalah submatrik dari matrik **A** berukuran (p-1) x (p-1) yang diperoleh dengan menghapus baris ke-i dan kolom ke-j dari matrik **A**

2. Determinan matrik **A** dinotasikan dengan $|\mathbf{A}|$ adalah skalar yang didefinisikan sebagai:

$$|\mathbf{A}| = a_{11} \qquad \text{jika } p=1 \qquad (28)$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad \text{jika } p=2 \qquad (29)$$

$$|\mathbf{A}| \sum_{j=1}^{p} a_{ij} |\mathbf{M}_{ij}| (-1)^{i+j} \qquad \text{jika } p>2 \qquad (30)$$

Sifat-sifat determinan adalah sebagai berikut, misalkan **A** matrik berukuran pxp

1. Untuk matrik definit positip **A**

$$|\mathbf{A}|>0 \qquad (31)$$

2. Untuk matrik bujursangkar **A** dan **B** berukuran pxp

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \tag{32}$$

3. Untuk matrik nonsingular**A**

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \tag{33}$$

4. Untuk c skalar

$$[c\ \mathbf{A}] = c^{p}|\mathbf{A}| \tag{34}$$

Matriks ortogonal dalam laporan tugas akhir ini digunakan dalam pengujian rata-rata perlakuan secara individu pada kasus multivariat. Berikut ini definisi matriks ortogonal beserta contohnya.

Definisi 2.2.5.:Matrik bujursangkar **P** dikatakan ortogonal jika $\mathbf{P'P} = \mathbf{PP'} = \mathbf{I}$

Contoh 2.3.3.

Misalkan **P** adalah matrik bujursangkar berukuran 2x2. Akan ditunjukkan bahwa **P** adalah ortogonal.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{PP'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P'P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setiap persamaan kuadrat dapat kita hubungkan dengan suatu fungsi vektor f(x) = $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$. Fungsi vektor yang demikian dinamakan bentuk kuadrat. Bentuk kuadrat yang lebih besar dari nol disebut definite positip. Definisi 2.2.6 dijelaskan tentang definisi definit positip.

Definisi 2.2.6. : **x** suatu matrik kolom berukuran px1 dan **A** matrik bujursangkar berukuran pxp. Jika **x'Ax > 0** untuk semua harga **x** kecuali **x = 0** maka **x'Ax** disebut definit positip.

<u>Contoh 2.2.3</u>

Diketahui : $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ adalah definit positip.

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 7 > 0$$

karena $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{0}$ maka $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ definit psitip

Differensial tingkat satu digunakan untuk menentukan estimator maksimum Likelihood untuk parameter dari sebuah fungsi distribusi. Differensial pada vektor dan matriks dijelaskan pada definisi 2.2.7 berikut dengan sifat-sifat dan contoh untuk menunjukkan bahwa sifat-sifatnya itu benar.

Definisi 2.2.7:

1. u = f(x) = f(x_1,x_2,….., x_p) adalah fungsi skalar dari variabel x_1,x_2,….., x_p.

   Differensial parsial tingkat satu u terhadap vektor **x** didefinisikan sebagai:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial u}{\partial x_p} \end{bmatrix} \tag{35}$$

2. u = f(A) = f(a_{11},........, a_{pp}) dimana **A** matrik simetris. Differensial tingkat satu u terhadap matrik **A** didefinisikan sebagai :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial a_{11}} & \frac{\partial u}{\partial a_{12}} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial a_{1p}} \\ \frac{\partial u}{\partial a_{21}} & \frac{\partial u}{\partial a_{22}} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial a_{2p}} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \frac{\partial u}{\partial a_{p1}} & \frac{\partial u}{\partial a_{p2}} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial a_{pp}} \end{bmatrix} \tag{36}$$

Sifat-sifat derifatif parsial tingkat satu pada vektor dan matriks adalah sebagai berikut, misalkan **x, a** vektor berukuran px1 dan **A** dan **B** matrik simetris berukuran pxp

1. u = **xa' = ax'**

$$\frac{\partial \mathbf{xa'}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{ax'}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a} \tag{37}$$

2. **u = x'Ax**

$$\frac{\partial \mathbf{x'Ax}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{Ax} \tag{38}$$

3. $$\frac{\partial \mathbf{tr(AB)}}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{B} - \mathrm{diag}(\mathbf{B}) \tag{39}$$

4. $$\frac{\partial \ln|\mathbf{A}|}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{A}^{-1} - \mathrm{diag}(\mathbf{A}^{-1}),\ \mathbf{A} \text{ non singular} \tag{40}$$

Contoh 2.2.4

Misalkan $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{a}$ vektor berukuran 2x1, $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ matrik simetris berukuran 2x2.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

- Akan ditunjukkan bahwa $\dfrac{\partial \mathbf{x}\mathbf{a}'}{\partial \mathbf{x}} = \dfrac{\partial \mathbf{a}\mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}$

$$\mathbf{x}\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 a_1 \\ x_2 a_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}\mathbf{a}'}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x_1 \\ a_2 x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}\mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{a}$$

- Akan ditunjukkan bahwa $\dfrac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1^2 a_{11} + 2\, x_1 x_2 a_{12} + x_2^2 a_{22}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_1} = 2\, x_1\, a_{11} + 2\, x_2\, a_{12}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_2} = 2\, x_1\, a_{12} + 2\, x_2\, a_{22}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 a_{11} + 2x_2 a_{12} \\ 2x_1 a_{12} + 2x_2 a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x'Ax}}{\partial \mathbf{x}} = 2\ \mathbf{A}\ \mathbf{x}$$

- Akan ditunjukkan bahwa $\frac{\partial \mathbf{tr(AB)}}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{B} - \text{diag}(\mathbf{B})$

Sesuai dengan persamaan (25)

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{ij}$$
$$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

$$\frac{\partial \mathbf{tr(AB)}}{\partial \mathbf{A}} = \begin{bmatrix} b_{11} & 2b_{12} \\ 2b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$2\mathbf{B} - \text{diag}(\mathbf{B}) = 2\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} b_{11} & 2b_{12} \\ 2b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Jadi dapat ditunjukkan bahwa $\frac{\partial \mathbf{tr(AB)}}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{B} - \text{diag}(\mathbf{B})$.

- Akan ditunjukkan bahwa $\frac{\partial \ln|\mathbf{A}|}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{A}^{-1} - \text{diag}(\mathbf{A}^{-1})$, $\mathbf{A}$ non singular

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\ln|\mathbf{A}| = \ln(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$\frac{\partial \ln|\mathbf{A}|}{\partial \mathbf{A}} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{22} & -2a_{12} \\ -2a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$2\mathbf{A}^{-1} - \text{diag}(\mathbf{A}^{-1}) = 2\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{22} & -2a_{12} \\ -2a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Jadi dapat ditunjukkan bahwa $\frac{\partial \ln|A|}{\partial A} = 2A^{-1} - \text{diag}(A^{-1})$, A non singular

(J. Leon, Steven,2001)

2.3. Distribusi Normal Multivariat

Kebanyakan prosedur inferensi normal multivariat didasarkan pada distribusi normal univariat. Meskipun kebanyakan data yang sebenarnya tidak pernah tepat normal multivariat, distribusi normal multivariat sering digunakan untuk aproksimasi distribusi yang sebenarnya.

Fungsi probabilitas dari distribusi normal p variat dengan vektor rata-rata μ dan matriks kovarian Σ dijelaskan pada definisi 2.3.1

Definisi 2.3.1. :Suatu vektor random $y' = [y_1 \quad y_2 \quad \dots\dots\dots \quad y_p]$ berukuran px1, dikatakan berdistribusi normal p-variat dengan vektor rata-rata μ dan matrik kovarian Σ yang dinotasikan dengan $N_p(\mu,\Sigma)$, jika mempunyai fungsi probabilitas sebagai berikut:

$$f(y) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^p} |\Sigma|^{\frac{-1}{2}} \exp\left[-(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu)/2\right] \quad (41)$$

dengan $-\infty < y < \infty$, i = 1, 2, ...,p dan matriks kovarian Σ definit positip.

Pada theorema 2.4.1 akan dibuktikan bahwa, Jika **y** berdistribusi $N_p(\mu,\Sigma)$, fungsi pembangkit momen dari **y** adalah :$M_y(t) = e^{t'\mu + t'\Sigma t/2}$

<u>Theorema 2.4.1</u>

Jika **y** berdistribusi $N_p(\mu,\Sigma)$, fungsi pembangkit momen dari **y** adalah :

$$M_y(t) = e^{t'\mu + t'\Sigma t/2} \quad (42)$$

Bukti :

Fungsi pembangkit momen dari y adalah : $M_y(t) = E(e^{t'Y})$

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots\ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{t'y} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^p} |\Sigma|^{\frac{-1}{2}} \exp\left[-(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu)/2\right] dy$$

Dimana $dy = dy_1 \times dy_2 \times \ldots\ldots\ldots \times dy_p$

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots\ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^p} |\Sigma|^{\frac{-1}{2}} \exp\left[t'y-(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu)/2\right] dy$$

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots\ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^p} |\Sigma|^{\frac{-1}{2}} e^{t'\mu + t'\Sigma t/2}\, e^{-(y-\mu-\Sigma t)'\Sigma^{-1}(y-\mu-\Sigma t)/2}\, dy$$

$$M_Y(t) = e^{t'\mu + t'\Sigma t/2} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots\ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^p} |\Sigma|^{\frac{-1}{2}} e^{-(y-\mu-\Sigma t)'\Sigma^{-1}(y-\mu-\Sigma t)/2}\, dy$$

$$M_Y(t) = e^{t'\mu + t'\Sigma t/2}$$

Pada distribusi normal multivariat ada dua parameter yang nilainya tidak diketahui yaitu vector rata-rata μ dan matriks kovarian Σ untuk itu nilai dari parameter harus diestimasi. Metode yang sering digunakan untuk menentukan estimator dari parameter adalah metode maksimum Likelihood. Densitas bersama dari $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, …………, $\mathbf{y}_n$ disebut fungsi Likelihood. Estimator maksimum Likelihood adalah nilai parameter yang memaksimalkan fungsi Likelihood. Berikut ini akan ditentukan estimator Likelihood dari μ dan Σ untuk suatu sampel random dari distribusi normal multivariat.

Theorema 2.3.2.

Jika $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, …………, $\mathbf{y}_n$ vektor random yang independen berdistribusi $N_p(\mu,\Sigma)$, maka estimator maksimum Likelihood dari μ dan Σ adalah

$$\hat{\mu} = \bar{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}})' = \frac{1}{n}\mathrm{W} \qquad (43)$$

di mana W = $(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}})'$adalah vektor berukuran pxp

bukti :

fungsi Likelihood (densitas bersama) dari $\mathbf{y}_i$ adalah hasil kali densitas dari masing-masing $\mathbf{y}_i$

$$L(\mu,\Sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{p}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{-(y_i-\mu)'\Sigma^{-1}(y_i-\mu)/2}$$

$$L(\mu,\Sigma) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{np}} |\Sigma|^{\frac{-n}{2}} \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} (y_i-\mu)'\Sigma^{-1}(y_i-\mu)/2\right] \qquad (44)$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai dari μ dan Σ yang memaksimalkan persamaan (44). Berdasarkan persamaan (18) dan (21) :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)' \Sigma^{-1}(y_i - \mu) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}\,(y_i-\mu)'\Sigma^{-1}(y_i - \mu)$$

$$= \mathrm{tr}\,[\Sigma^{-1}\sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)(y_i-\mu)'] \qquad (45)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)(y_i-\mu)' = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y} + \bar{y} - \mu)(y_i-\bar{y}+\bar{y}-\mu)'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(y_i-\bar{y})' + \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(\bar{y}-\mu)'$$

$$+\sum_{i=1}^{n} (\bar{y}-\mu)(y_i-\bar{y})' + \sum_{i=1}^{n} (\bar{y}-\mu)(\bar{y}-\mu)'$$

karena $\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(\bar{y}-\mu)' = (\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{y})(\bar{y}-\mu)' = (n\bar{y} - n\bar{y})(\bar{y}-\mu)' = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)(y_i - \mu)' = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})' + n\,(\bar{y} - \mu)(\bar{y} - \mu)'$$

$$= W + n\,(\bar{y} - \mu)(\bar{y} - \mu)' \qquad (46)$$

substitusi persamaan (46) ke dalam persamaan (45) kemudian substitusikan ke dalam persamaan (44), sehingga diperoleh :

$$L(\mu,\Sigma) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{np}} \;|\Sigma|^{\frac{-n}{2}} \exp[-\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}\,(W + n\,(\bar{y} - \mu)(\bar{y} - \mu)'/2] \qquad (47)$$

Karena log natural adalah fungsi naik, maka ln L akan terjadi pada titik yang sama dengan maksimal L. Pengoperasian dengan ln L untuk mempermudah dalam pendiferensialan. Dengan pengoperasian ln pada L diperoleh :

$$\ln L(\mu,\Sigma) = -np\ln(\sqrt{2\pi}\,) - \frac{n}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}(W + n(\bar{y} - \mu)(\bar{y} - \mu)') \qquad (48)$$

berdasarkan persamaan (44) dan (47) diperoleh

$$\ln L(\mu,\Sigma) = -np\ln(\sqrt{2\pi} - \frac{n}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\Sigma^{-1} + W) - (\bar{y} - \mu)'\Sigma^{-1}(\bar{y} - \mu)$$

$$\ln L(\mu,\Sigma) = np\ln(\sqrt{2\pi} - \frac{n}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\Sigma^{-1}W) -$$

$$\frac{n}{2}\left(\bar{y}'\Sigma^{-1}\bar{y} - \mu'\Sigma^{-1}\bar{y} - \bar{y}'\Sigma^{-1}\mu + \mu'\Sigma^{-1}\mu\right)$$

karena Σ^{-1} simetris maka $(\Sigma^{-1})' = \Sigma^{-1}$, sehingga

$$\ln L(\mu,\Sigma) = np\ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - \frac{n}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\Sigma^{-1}W) - \left(\bar{y}'\Sigma^{-1}\bar{y} - \mu'(\Sigma^{-1}\bar{y}) - (\Sigma^{-1}\bar{y})'\mu + \mu'\Sigma^{-1}\mu\right)$$

(49)

Untuk menentukan estimator maksimum Likelihood untuk μ, ln L(μ,Σ) didiferensialkan ke μ dan menyamakannya dengan nol. Berdasarkan persamaan (35) dan (37) diperoleh

$$\frac{\partial \ln \mathbf{L}(\mu,\Sigma)}{\partial \mu} = 0$$

$$0 + 0 + 0 - \frac{n}{2}(0 - \Sigma^{-1}\overline{\mathbf{y}} - \Sigma^{-1}\overline{\mathbf{y}} + 2\Sigma^{-1}\hat{\mu}) = 0$$

$$(\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{y}} - \Sigma^{-1}\hat{\mu}) = 0$$

$$\Sigma^{-1}\hat{\mu} = \Sigma^{-1}\overline{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mu} = \overline{\mathbf{y}} \qquad (50)$$

sebelum pendifrensialan ln L(μ,Σ) untuk mendapatkan $\hat{\Sigma}$, substitusikan persamaan (50) ke dalam persamaan (48) dan berdasarkan persamaan (30) $\left|\Sigma^{-1}\right| = \frac{1}{|\Sigma|}$ dengan pengoperasian ln pada kedua ruas diperoleh $\ln\left|\Sigma^{-1}\right| = -\ln|\Sigma|$, sehingga persamaan (2.3.9) dapat ditulis :

$$\ln L(\hat{\mu},\Sigma) = -np\ln(\sqrt{2\pi}) + \frac{n}{2}\ln\left|\Sigma^{-1}\right| - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\Sigma^{-1}\mathbf{W}) \qquad (51)$$

persamaan (51) didiferensialkan terhadap Σ^{-1} dan menyamakannya dengan nol, berdasarkan persamaan (34) dan (35) diperoleh

$$\frac{\partial \ln \mathbf{L}(\mu,\Sigma)}{\partial \Sigma^{-1}} = 0$$

$$0 + n\hat{\Sigma} - \frac{n}{2}\mathrm{diag}\,(\hat{\Sigma}) - \mathbf{W} + \frac{1}{2}\mathrm{diag}\,(\mathbf{W}) = 0$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{2}\mathrm{diag}\,(\hat{\Sigma}) = \frac{1}{n}\mathrm{diag}\,(\mathbf{W} - \frac{1}{2}\mathrm{diag}\,(\mathbf{W})) \qquad (52)$$

dinotasikan :

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \hat{\sigma}_{12} & \cdots & \hat{\sigma}_{1p} \\ \hat{\sigma}_{21} & \hat{\sigma}_{22} & \cdots & \hat{\sigma}_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\sigma}_{p1} & \hat{\sigma}_{p2} & \cdots & \hat{\sigma}_{pp} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1p} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{p1} & w_{p2} & \cdots & w_{pp} \end{bmatrix}$$

$$\text{Diag}(\hat{\Sigma}) = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\sigma}_{pp} \end{bmatrix} \qquad \text{Diag}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_{pp} \end{bmatrix}$$

Perhatikan untuk selain elemen diagonal diperoleh

$$\hat{\sigma}_{jk} = \frac{1}{n} W_{jk}, \; j \neq k \tag{53}$$

perhatikan untuk elemen diagonal

$$\hat{\sigma}_{jj} - \frac{\hat{\sigma}_{jj}}{2} = \frac{w_{jj}}{n} - \frac{w_{jj}}{2n}$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{jj}}{2} = \frac{w_{jj}}{2n}$$

$$\hat{\sigma}_{jj} = \frac{w_{jj}}{n} \tag{54}$$

dari persamaan (53) dan (54) dapat disimpulkan bahwa

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\mathbf{W} \tag{55}$$

sehingga estimator maksimum Likelihood untuk Σ adalah $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\mathbf{W}$

Sifat-sifat fungsi pembangkit momen distribusi normal multivariat adalah sebagai berikut, misalkan y_i independen berdistribusi $Np(\mu,\Sigma)$ dan b vektor konstanta dan a konstanta :

1. $M_{y+b}(t) = M_y(t)\, e^{t'b}$ (56)

2. $M_{\sum_{i=1}^{n} y_i}(t) = e^{t' n \mu + t' n \Sigma t/2}$ (57)

3. $M_{ay}(t) = M_y(at)$ (58)

4. $M_{\bar{y}} = e^{t'\mu + t' \frac{1}{n} \Sigma t/2}$ (59)

Dimana $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ adalah vektor rata-rata dari n pengamatan

Theorema 2.3.3.
Jika $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_n$ konstanta dan $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n$ independen berdistribusi $N_p(\mu,\Sigma)$ maka $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i$ berdistribusi $N_p(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\Sigma)$

Bukti

Berdasarkan persamaan (58)

$$M_{a_i y_i}(t) = \exp\left\{a_i t'\mu + a_i^2 t'\Sigma t/2\right\}$$

$$M_{\sum_{i=1}^{n} a_i y_i}(t) = \exp\left\{ t'\sum_{i=1}^{n} a_i\mu + t'\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Sigma t/2 \right\} \quad (60)$$

Persamaan (60) merupakan fungsi pembangkit momen untuk $N_p\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\Sigma\right)$

(Johnson, R.A., and Wichern, D.W, 1982)

2.4. Disrtribusi Wishart

Distribusi Wishart memegang peranan penting dalam prosedur inferensial multivariat. Distribusi Wishart dapat diturunkan dari distribusi normal multivariat. Akan ditunjukkan fungsi densitas dari distribusi Wishart.

Definisi 2.4.1 :Jika matrik $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{z}_i\ \mathbf{z}_i'$ dengan $\mathbf{z}_i$ independen berdistribusi $N_p(\mathbf{0},\Sigma)$, maka **A** dikatakan berdistribusi Wishart dengan derajat bebas n dan matrik kovarian Σ, dinotasikan dengan $W_p(\mathbf{n},\Sigma)$. Subskrip p menunjukkan ukuran matrik **A** untuk $n \geq p$, **A** mempunyai fungsi densitas :

$$\mathbf{W}(\mathbf{A}|\mathbf{n},\Sigma) = \begin{cases} \dfrac{|\mathbf{A}|^{1/2(n-p-1)} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Sigma^{-1}\mathbf{A}\right)}{2^{\frac{1}{2}np}\pi^{p(p-1)/4}|\Sigma|^{\frac{1}{2}n}\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{1}{2}(\mathbf{n}+1)-\mathbf{i}\right)} & \text{, A definit positip} \\ 0, & \end{cases} \quad (61)$$

Akan ditunjukkan bahwa matrik W seperti pada persamaan (43) berdistribusi $W_p(n\text{-}1, \Sigma\ )$

<u>Theorema 2.4.1</u>

Misalkan vektor random $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, ………, $\mathbf{y}_n$ independen berdistribusi $N_p(\mu,\Sigma)$ dan didefinisikan vektor random $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, ………, $\mathbf{z}_n$ dengan:

$$\mathbf{z}_1 = \sum_{j=1}^{n} p_{1j}\ \mathbf{y}_j \qquad \mathbf{z}_2 = \sum_{j=1}^{n} p_{2j}\ \mathbf{y}_j \qquad \mathbf{z}_n = \sum_{j=1}^{n} p_{nj}\ \mathbf{y}_j$$

diambil matrik ortogonal $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ berukuran nxn di mana baris pertama matrik **P** adalah $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\ \ \frac{1}{\sqrt{n}}\ \ \ldots\ldots\ \ \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, didefinisikan $\mathbf{Z} = \sum_{i=2}^{n} \mathbf{z}_i\mathbf{z}_i'$, maka

1. $\mathbf{Z}_i$ berdistribusi $N_p(\mathbf{0},\Sigma)$ untuk i = 2, 3, ……, n

1. $\mathbf{Z}_i$ berdistribusi $N_p(0,\Sigma)$ untuk i = 2, 3, ……., n

2. $\mathbf{Z} = \mathbf{W}$ berdistribusi $W_p(n\text{-}1, \Sigma)$ dimana

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})'$$

Bukti

Karena **P** matrik ortogonal $\mathbf{P'P} = \mathbf{PP'} = \mathbf{I}$, pandang p_{ij} elemen dari matrik **P** dengan baris pertama dari **P** adalah $\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ didapat

1. $\sum_{j=1}^{n} p_{rj} p_{sj} = \rho_{rs}$ (62)

   dimana $\rho_{rs} = 0$ untuk $r \neq s$ dan $\rho_{rs} = 1$ untuk r = s

2. berdasarkan persamaan ( ) dengan mengambil r = 1 didapat $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 0$ untuk

   i =2, 3, ……, n. (63)

3. Karena $\mathbf{P'P} = \mathbf{I}$

$$\sum_{r=2}^{n} p_{rj} p_{ri} = \sum_{r=1}^{n} p_{rj} p_{ri} - p_{1j} p_{1i} = \rho_{ij} - \frac{1}{n} \quad (64)$$

Bukti bagian 1

z_i berdistibusi normal karena distribusi bersama dari y_1, y_2,……..,y_n adalah normal dan z_i merupakan fungsi linier dari y_1, y_2,…….,y_n. z_1, z_2, ………, z_n berdistribusi normal bersama sehingga untuk menentukan independensi cukup ditunjukkan $\mathrm{cov}(z_r,z_s) = \mathbf{0}$ untuk semua $r \neq s$

$$\operatorname{cov}(\mathbf{z}_r,\mathbf{z}_s) = E\left[\,(\mathbf{z}_r - E(\mathbf{z}_r))\,(\mathbf{z}_s - E(\mathbf{z}_s))'\,\right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} p_{rj}\,\mathbf{y}_j - E\left(\sum_{j=1}^{n} p_{rj}\,\mathbf{y}_j\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_{si}\,\mathbf{y}_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} p_{si}\,\mathbf{y}_i\right)\right)'\,\right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} p_{rj}\,\mathbf{y}_j - \mu\sum_{j=1}^{n} p_{rj}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_{si}\,\mathbf{y}_i - \mu\sum_{i=1}^{n} p_{si}\right)'\,\right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} p_{rj}\,(\mathbf{y}_j - \mu)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_{si}\,(\mathbf{y}_i - \mu)\right)'\,\right]$$

$$= E\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{rj}p_{si}\,(\mathbf{y}_j - \mu)(\mathbf{y}_i - \mu)'\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{rj}p_{si}\,E\left((\mathbf{y}_j - \mu)(\mathbf{y}_i - \mu)'\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{rj}p_{si}\,\rho_{ij}\,\Sigma$$

di mana $\rho_{ij} = 1$, jika $i = j$ dan $\rho_{ij} = 0$, jika $i \neq j$

diperoleh $E\left((\mathbf{y}_j - \mu)(\mathbf{y}_i - \mu)'\right) = \rho_{ij}\ \Sigma$, karena $\mathbf{y}_i$ dan $\mathbf{y}_j$ independen $i \neq j$,

selanjutnya didapat:

$$\operatorname{cov}(\mathbf{z}_r,\mathbf{z}_s) = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{rj}p_{si}\,\rho_{ij}\right)\Sigma = \left(\sum_{j=1}^{n} p_{rj}p_{sj}\right)\Sigma = \rho_{rs}\,\Sigma \tag{65}$$

Sehingga berdasarkan persamaan (62) $\operatorname{cov}(\mathbf{z}_r,\mathbf{z}_s) = 0$ untuk $r \neq s$, yang menunjukkan bahwa $\mathbf{z}_r$, $\mathbf{z}_s$ independen, sehingga $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots\ldots\ldots, \mathbf{z}_n$ independen.

Sekarang akan ditentukan rata-rata dan kovarian dari $\mathbf{z}_r$

Untuk $r = 1$

$$E(\mathbf{z}_1) = E\left(\sum_{j=1}^{n} p_{1j}\ \mathbf{y}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} p_{1j}\ E(\mathbf{y}_j) = \mu\sum_{j=1}^{n} p_{1j}$$

$$= \mu\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}\,\mu$$

untuk r = 2, 3, …., n

$$E(\mathbf{z}_r) = E\left(\sum_{j=1}^{n} p_{rj}\ \mathbf{y}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} p_{rj}\ E(\mathbf{y}_j) = \mu\sum_{j=1}^{n} p_{rj} = \mathbf{0}$$

Karena berdasarkan persamaan (65) cov($\mathbf{z}_r$) = Σ, sehingga $\mathbf{z}_i$ berdistribusi $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$, untuk r = 2, 3, ….., n.

Bukti bagian 2

$$\mathbf{Z} = \sum_{r=2}^{n} \mathbf{z}_r\mathbf{z}_r' = \sum_{r=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{rj}\,\mathbf{y}_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ri}\,\mathbf{y}_i\right)'$$

$$= \sum_{r=2}^{n} (p_{r1}\,\mathbf{y}_1 + p_{r2}\,\mathbf{y}_2 + \ldots\ldots + p_{rn}\,\mathbf{y}_n)(p_{r1}\,\mathbf{y}_1 + p_{r2}\,\mathbf{y}_2 + \ldots\ldots + p_{rn}\,\mathbf{y}_n)'$$

$$= \sum_{r=2}^{n} (p_{r1}\,p_{r1}\,\mathbf{y}_1\,\mathbf{y}_1' + p_{r2}\,p_{r2}\,\mathbf{y}_2\,\mathbf{y}_2' + \ldots\ldots + p_{rn}\,p_{rn}\,\mathbf{y}_n\,\mathbf{y}_n'\,\mathbf{y}_n')$$

$$= \sum_{r=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{rj}p_{ri}\,\mathbf{y}_j\,\mathbf{y}_i'\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=2}^{n} p_{rj}p_{ri}\right)\mathbf{y}_j\,\mathbf{y}_i'$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\rho_{ij} - \frac{1}{n}\right)\mathbf{y}_j\,\mathbf{y}_i'$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\rho_{ij}\ \mathbf{y}_j\,\mathbf{y}_i' - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\ \mathbf{y}_j\,\mathbf{y}_i'$$

karena $\rho_{ij} = 1$, untuk i = j, sehingga didapat:

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i\,\mathbf{y}_i' - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{y}_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i\right)'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i\,\mathbf{y}_i' - n\,\overline{\mathbf{y}}\,\overline{\mathbf{y}}'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i\,\mathbf{y}_i' - n\,\overline{\mathbf{y}}\,\overline{\mathbf{y}}' - n\,\overline{\mathbf{y}}\,\overline{\mathbf{y}}' + n\,\overline{\mathbf{y}}\,\overline{\mathbf{y}}'$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i - \overline{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \overline{\mathbf{y}})'$$

$$= \mathbf{W}$$

karena z_i berdistribusi $N_p(0,\Sigma)$, sehingga berdasarkan definisi 2.4.1 $\mathbf{Z} = \sum_{i=2}^{n} \mathbf{z}_i\mathbf{z}_i'$ berdistribusi $W_p(n\text{-}1,\Sigma)$ dan oleh karena $\mathbf{Z} = \mathbf{W}$, sehingga $\mathbf{W}$ berdistribusi $W_p(n\text{-}1,\Sigma)$.

<u>Theorema 2.4.2.</u>

Jika A_1 berdistribusi $W_p(n_1,\Sigma)$ dan A_2 berdistribusi $W_p(n_2,\Sigma)$, maka $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ berdistribusi $W_p(n_1+ n_2,\Sigma)$.

Bukti:

$\mathbf{A}_1$ dan $\mathbf{A}_2$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathbf{A}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{z}_i\mathbf{z}_i'$$

$$\mathbf{A}_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \mathbf{z}_i\mathbf{z}_i'$$

Di mana $\mathbf{z}_i$ independen berdistribusi $N_p(0,\Sigma)$ sehingga :

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{z}_i\mathbf{z}_i' + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \mathbf{z}_i\mathbf{z}_i' = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \mathbf{z}_i\mathbf{z}_i'$$

karena $\mathbf{Z}_i$ independen berdistribusi $N_p(0,\Sigma)$, sehingga $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ berdistribusi $W_p(n_1+ n_2,\Sigma)$.

2.5. Statistik Hotelling's T^2

Statistik hotelling's T^2 mempunyai peranan penting dalam pengambilan inferensi pada kasus multivariate. Statistik hotelling's dapat digunakan untuk menguji hipotesis vector rata-rata dalam kasus multivariat. Definisi dari T^2 adalah:

Definisi 2.5.1 :Misalkan **z** vektor berukuran px1 berdistribusi $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ dan **A** matriks berukuran pxp berdisrtibusi $W_p(n, \Sigma)$, dengan **z** dan **A** independen variable random T^2 dengan ukuran p dan derajat bebas n, didefinisikan:

$$T^2 = \mathbf{z}' \left(\frac{1}{n} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{z} \qquad (66)$$

Distribusi Hotelling's T^2 dapat diturunkan dari definisi 2.6.1.