BAB II

KONSEP DASAR

2.1. KONDISI FISIK WILAYAH STUDI

Propinsi Jawa Tengah terletak antara 108° 30' – 111° 30' BT dan 5° 15' – 8° 30' LS, dengan batas-batas wilayah administrasi sebagai berikut :

- sebelah utara : Laut Jawa.
- sebelah selatan : Samudra Indonesia, Propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta.
- sebelah barat : Propinsi Jawa Barat.
- sebelah timur : Propinsi Jawa Timur.

Ditinjau dari geografis tersebut, Propinsi Jawa Tengah merupakan daerah perlintasan arus lalu lintas antara bagian timur dan barat dari Pulau Jawa, (lihat gambar 1). Jawa Tengah terdiri dari 29 Kabupaten dan 6 Kota, meliputi wilayah seluas 32.544,12 km^2.

Berdasarkan distribusi luas wilayah per kabupaten/kota, Kabupaten Cilacap, Banyumas, Banjarnegara, Kebumen, Purworejo dan Brebes memiliki wilayah relatif luas, melebihi 1.000 km^2 (lihat tabel 2.1). Gambaran mengenai jarak antar kabupaten/kota di Jawa Tengah dapat diketahui pada tabel 2.2.

DINAS LALU LINTAS DAN ANGKUTAN JALAN PROPINSI JAWA TENGAH	STUDI PENYUSUNAN RENCANA UMUM JARINGAN TRANSPORTASI DI JAWA TENGAH GAMBAR 1 PETA ADMINISTRASI PROPINSI JAWA TENGAH	LEGENDA : .... bts. adm. Kab./Kod.	0 15 45 km SUMBER : BAPPEDA PROPINSI JAWA TENGAH

2.2. KEPENDUDUKAN

Dalam kajian transportasi, jumlah dan sebaran penduduk merupakan faktor yang menentukan besarnya permintaan jasa transportasi serta pola distribusinya. Pada tahun 1999, jumlah penduduk Propinsi Jawa Tengah mencapai 30.761.221. Kabupaten/kota yang memiliki jumlah penduduk melebihi 1 juta jiwa adalah Kabupaten Cilacap, Banyumas, Kebumen, Magelang, Klaten, Grobogan, Pati, Pemalang, Tegal, Brebes, dan Kota Semarang (lihat tabel 2.3).

2.3. PEREKONOMIAN

Propinsi Jawa Tengah memiliki sumber daya alam yang potensial, faktor fisik seperti kesuburan tanah dan potensi curah hujan memungkinkan berperan dalam menunjang kebutuhan hidup produksi beberapa komoditi pertanian masyarakat dan perekonomian Jawa Tengah.

Pertumbuhan ekonomi Jawa Tengah menjelang krisis ekonomi pada tahun 1997 mencapai 5,61% . (*Jawa Tengah dalam angka,2000*). Yang dimaksud dengan laju pertumbuhan ekonomi adalah proses kenaikan output per kapita dalam jangka panjang, yang besarnya dapat dihitung melalui komparasi antara PDRB riel dalam suatu tahun dengan PDRB tahun berikutnya. PDRB (Produk Domestik Regional Bruto) merupakan salah satu indikator untuk mengukur tingkat produksi atau ekonomi suatu wilayah. Dengan melihat PDRB dalam skala waktu tertentu dan distribusi prosentase masing-masing lapangan usaha, secara makro dapat diketahui laju pertumbuhan ekonomi dan struktur perekonomian suatu daerah.*(Robert,1984)*

PDRB terbagi atas dua macam, yaitu PDRB atas dasar harga berlaku dan

PDRB atas dasar harga konstan. PDRB atas dasar harga berlaku merupakan jumlah seluruh nilai barang dan jasa akhir yang dihasilkan oleh unit-unit produksi didalam suatu propinsi dalam suatu periode tertentu (disebut NTB), biasanya satu tahun, yang dinilai dengan harga tahun bersangkutan. PDRB atas dasar harga konstan, pengertiannya sama dengan atas dasar harga berlaku, tetapi penilaiannya dilakukan dengan harga suatu tahun dasar tertentu. NTB atas dasar konstan ini, hanya menggambarkan perubahan volume/kuantum produksi saja. Pengaruh perubahan harga (inflansi dan deflasi) telah dihilangkan dengan cara menilai harga suatu tahun dasar tertentu. Penghitungan atas dasar konstan berguna untuk melihat pertumbuhan ekonomi secara keseluruhan atau sektoral, juga untuk melihat perubahan struktur suatu propinsi/daerah dari tahun ke tahun. (*PDRB prop. Jateng, 1997*)

Gambaran tentang PDRB dan PDRB perkapita propinsi Jawa Tengah antara tahun 1993-1999 dan laju pertumbuhan ekonomi (menurut harga konstan tahun 1993), tampak pada tabel 2.4 dan tabel 2.5.

Berdasarkan harga konstan tahun 1993, pada tahun 1999 kabupaten atau kota di Jawa Tengah yang mempunyai PDRB perkapita dan rata-rata pertumbuhannya berada diatas rata-rata propinsi adalah: Kab. Cilacap, Kab. Semarang, Kab. Pekalongan, Kota Surakarta, Kota Semarang, dan Kota Tegal. Kabupaten yang lambat pertumbuhan PDRB-nya maupun rendah PDRB perkapitanya yaitu Kab. Grobogan, Kab. Blora, Kab. Rembang dan Kab. Temanggung.

Gambaran tentang PDRB menurut lapangan usaha tahun 1993-1999 menurut harga konstan tahun 1993 dapat dilihat pada tabel 2.6. Tiga sektor yang memberikan sumbangan terbesar terhadap pembentukan PDRB Jawa Tengah adalah sektor pertanian, industri dan perdagangan. Menurut PDRB tahun 1999 (berdasarkan harga konstan 1993), sektor pertanian memberikan kontribusi sebesar 20,49% terhadap PDRB Jawa Tengah, sementara industri menyumbang 30,98%.

Gambaran tentang PDRB pertanian dan PDRB industri propinsi Jawa Tengah antara tahun 1993-1999 menurut harga konstan tahun 1993, tampak pada tabel 2.8 dan tabel 2.8.

Daerah-daerah dengan PDRB sektor pertanian terbesar adalah Kab. Brebes, Kab.Purworejo, Kab.Wonogiri, Kab. Blora dan Kab. Pati. Sedangkan Kab. Cilacap,Kab. Karanganyar,Kab. Kudus, Kab. Kendal, Kab. Batang dan Kab. Semarang merupakan daerah dengan PDRB sektor industri terbesar.

2.4. POLA DISTRIBUSI ARUS PERGERAKAN PENDUDUK

Dalam kajian transportasi, pemahaman hubungan antara arus pergerakan penduduk dengan faktor-faktor yang mengakibatkan timbulnya pergerakan merupakan suatu hal yang mendasar. Beberapa faktor yang diidentifikasi sebagai penyebab timbulnya pergerakan adalah tingkat sosial ekonomi penduduk, fungsi ekonomi daerah asal pergerakan, fungsi ekonomi daerah tujuan pergerakan, dan karakteristik moda angkutan. Selain itu, arus pergerakan penduduk juga mencerminkan keterkaitan fungsi ekonomi antara dua wilayah atau daerah yang berbeda, yang timbul karena adanya perbedaan kebutuhan dan produk dari masing-masing wilayah daerah tersebut *(Robert, 1984)*.

Gambaran tentang data survei asal dan tujuan arus pergerakan penduduk dengan moda angkutan jalan raya di kabupaten/kota Jawa Tengah 1996 yang diperoleh dari Departemen Perhubungan, selengkapnya dapat dilihat pada tabel 2.9.

Dari data asal dan tujuan arus pergerakan penduduk dapat diketahui bahwa 5 daerah terbesar penghasil arus pergerakan penduduk di Jawa Tengah adalah Kota Semarang, Kab. Semarang, Kota Surakarta, Kab. Brebes, dan Kota Tegal. Dari data diatas, terlihat bahwa jumlah bangkitan pergerakan terbesar berasal dari kota-kota yang merupakan pusat pertumbuhan di Jawa Tengah.

2.5. MATRIK

Definisi 1: Matrik A dikatakan simetris jika transpose dari matrik A sama dengan matrik A atau A simetris jika A=A'.

Definisi 2 : Bentuk kuadrat dari variabel $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ dapat ditulis sebagai berikut ;

$$F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots +$$

$$a_{n1}x_nx_1 + \ldots + a_{nn}x_nx_n$$

Jika $x = [x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n]$, $A=\|aij\|$, bentuk kuadrat dapat dinyatakan secara matrik sebagai berikut :

$$F = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i(Ax)_i = X^1AX$$

Definisi 3 : Apabila A adalah matrik simetris berorde nxn yang bersifat X'AX >0 untuk setiap vektor X berorde nx1 yang bukan vektor nol, maka A disebut matrik definit positif. Sedang apabila A memenuhi X'AX ≥ 0, maka A disebut matrik semi definit positif.

Contoh definisi 3:

1. $F=3x_1^2+5x_2^2$ adalah bentuk definit positif
2. $F=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2$ adalah bentuk definit positif
3. $F=x_1^2$ adalah bentuk definit positif
4. $F=4x_1^2+x_2^2-4x_1x_2+3x_3^2=(2x_1-x_2)^2+3x_3^2$ adalah bentuk semi definit positif

2.6. REGRESI LINIER BERGANDA

2.6.1. Model Regresi Linier Berganda

Prosedur regresi linier berganda digunakan untuk menguji hubungan antara sebuah variabel dependen (respon) dengan satu atau lebih variabel independen (variabel bebas). Jika variabel dependen dihubungkan dengan sebuah variabel independen saja maka persamaan regresi yang dihasilkan adalah regresi linier sederhana, dan jika variabel independennya lebih dari satu maka yang dihasilkan adalah persamaan regresi linier berganda.

Pada umumnya variabel respon Y dapat dihubungkan pada k variabel bebas yaitu $X_1,X_2,\ldots,X_k$ sehingga diperoleh model sebagai berikut:

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{i1}+\beta_2X_{i2}+\ldots+\beta_kX_{ik}+\varepsilon_i \qquad \ldots \qquad (2.1)$$

dengan penduga: $$\hat{Y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X_{i1}+\hat{\beta}_2X_{i2}+\ldots+\hat{\beta}_kX_{ik} \qquad \ldots \qquad (2.2)$$

Parameter-parameter β_j (j=0,1,2,…,k) merupakan koefisien regresi parsial. Sedangkan $\hat{\beta}_i$ merupakan harga taksiran untuk koefisien regresi. Variabel $X_1,X_2,\ldots,X_k$ disebut sebagai variabel regresor atau variabel pembawa, sedangkan variabel β_0 adalah intersep regresi dan ε_i adalah unsur kesalahan galat yang merupakan random variabel dengan $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$

2.6.2. Asumsi-asumsi yang harus dipenuhi dalam regresi linier berganda

2.6.2.1. Linieritas dan kesamaan varians.

Metode yang digunakan untuk memeriksa asumsi ini adalah dengan membuat plot residual terhadap harga-harga prediksi. Jika asumsi ini dipenuhi, maka residual-residual akan didistribusikan secara random dan terkumpul disekitar garis lurus yang melalui titik nol. Dengan plot ini juga dapat diperiksa pelanggaran asumsi kesamaan varians. Jika penyebaran residual-residual tidak membentuk pola tertentu (meningkat atau menurun) terhadap harga prediksi, maka asumsi kesamaan varians terpenuhi.

2.6.2.2. Independensi Error

Model regresi yang dikembangkan sebelumnya mempunyai asumsi bahwa error (ε_i) adalah variabel-variabel random yang tidak berkorelasi (independen), artinya tidak terdapat ketergantungan antara error yang ada. Salah satu cara untuk mengetahui apakah error berkorelasi atau tidak adalah dengan pengujian statistik Durbin Watson.

Data cross-sectional adalah data-data yang berhubungan dengan anggota populasi pada saat tertentu, dimana anggota populasi tersebut biasanya mempunyai ukuran yang berbeda-beda. Contohnya: data PDRB/kapita, PDRB industri, PDRB pertanian dan sebagainya. Data-data tersebut mempunyai ukuran yang berbeda-beda. Ukuran tersebut misalnya seperti luas daerah yang berbeda-beda pada setiap kabupaten/kota. *(Gujarati, 1990)*

Pada data-data yang bersifat cross-sectional , autokorelasi positif sering terjadi. Hal ini karena data-data tersebut disusun sedemikian sehingga data tadi berada dalam kelompok seperti: selatan, barat daya, utara dan seterusnya. Sehingga residual yang ditaksir dari regresi menunjukkan pola sistematis yang sesuai dengan perbedaan daerah. *(Gujarati,1990)*

Gambaran mengenai prosedur tes autokorelasi dapat dilihat pada gambar 2 dibawah ini.

- Perumusan Hipotesisnya:

  H_0 : tidak ada autokorelasi positif

  H_1 : ada autokorelasi positif

Atau

  H_0*: tidak ada autokorelasi negatif

  H_1*: ada autokorelasi negatif

- Statistik Uji Durbin Watson (*d*) : $d_{hit} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(e_i - e_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}$

Keterangan :

  e_i = Kesalahan pada waktu tertentu ke-i

  e_{i-1} = Kesalahan sebelum waktu tertentu (i-1)

- Statistik Tabel : Tabel Durbin Watson

- Kriteria Penolakan :

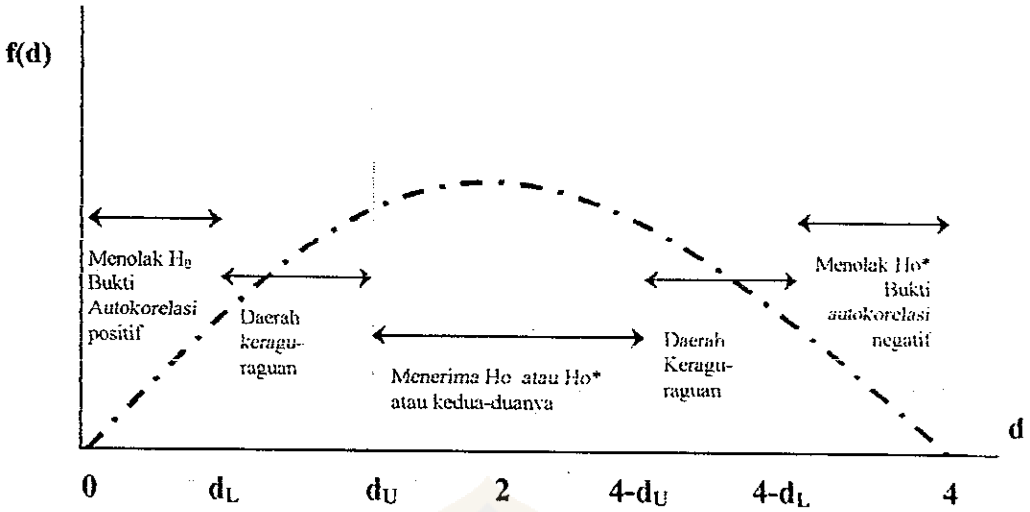
  Menolak H_0 (terjadi autokorelasi positif) : $0 < d_{hit} < d_L$

  Daerah keragu-raguan : $d_L < d_{hit} < d_U$

  Menerima H_0 atau H_0* (tidak terjadi autokorelasi) : $d_U < 2 < 4-d_U$

  Daerah keragu-raguan : $4-d_U < d_{hit} < 4-d_L$

  Menolak H_0* (terjadi autokorelasi negatif) : $4-d_L < d_{hit} < 4$



Keterangan:

Ho : Tidak ada autokorelasi positif

Ho* : Tidak ada autokorelasi negatif

Gambar 2. Statistik *d* Durbin-Watson

Menurut Gujarati (1990), untuk model yang memiliki lebih dari satu variabel penjelas/bebas (model regresi berganda), dengan variabel-variabel independent-nya bersifat cross-sectional maka autokorelasi bukanlah menjadi masalah, karena autokorelasi adalah sifat dari errornya (e_i) .

2.6.2.3.Asumsi Kenormalan

Regresi linier klasik mengasumsikan bahwa tiap residual didistribusikan secara normal yang secara ringkas dinyatakan sebagai $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Untuk mengetahui bahwa residual berdistribusi normal dapat dilihat dari plot regression standardized residual . Bila residual berada disekitar kurva normal maka dapat disimpulkan bahwa residual berdistribusi normal.

2.6.3. Estimasi Parameter Regresi.

Salah satu metode yang digunakan dalam mengestimasi parameter adalah metode kuadrat terkecil. Metode ini adalah metode yang paling luas digunakan. Dengan memenuhi asumsi yang harus dipenuhi pada model regresi linier berganda, metode kuadrat terkecil mempunyai beberapa sifat statistik yang sangat menarik yang membuatnya menjadi suatu metode analisis regresi yang paling populer.

Data untuk regresi linier berganda dapat ditampilkan sebagai berikut:

Y	X_1	X_2	...	X_k
Y_1	X_{11}	X_{12}		X_{1k}
Y_2	X_{21}	X_{22}		X_{2k}
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
Y_n	Xn_1	X_{n2}	...	X_{nk}

Model regresi linier berganda :

$$Y_i = \beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_k X_{ik}+\varepsilon_i \qquad \ldots \qquad (2.1)$$

Model persamaan (2.1) dapat diubah dalam persamaan (2.3) sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij} + \varepsilon_i \qquad , \ i=1,2,\ldots,n \qquad \ldots \qquad (2.3)$$

Fungsi kuadrat terkecil adalah:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \sum_{j=1}^{k} \hat{\beta}_j X_{ij})^2 \qquad \ldots \qquad (2.4)$$

Fungsi L tersebut diminimumkan terhadap $\beta_0,\beta_1,\ldots\beta_k$. Estimator kuadrat terkecil $\beta_0,\beta_1,\ldots\beta_k$ harus memenuhi:

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\beta}_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \sum_{j=1}^{k} \hat{\beta}_j X_{ij}) = 0 \qquad \dots \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\beta}_j} = -2X_{ij} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \sum_{j=1}^{k} \hat{\beta}_j X_{ij}) X_{ij} = 0 \qquad \dots \qquad (2.6)$$

Dari persamaan – persamaan diatas diperoleh persamaan-persamaan :

$$n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_{i2} + \dots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} X_{ik} = \sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad \dots \qquad (2.7)$$

$$\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} X_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_{i1}^{\ 2} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_{i1} X_{i2} + \dots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} X_{i1} X_{ik} = \sum_{i=1}^{n} X_{i1} Y_i \qquad (2.8)$$

$$\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} X_{ik} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_{ik} X_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_{ik} X_{i2} + \dots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} X_{ik}^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n} X_{ik} Y_i \qquad (2.9)$$

Persamaan – persamaan tersebut lebih sederhana bila diselesaikan dengan menggunakan cara matriks sebagai berikut :

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad \dots \qquad (2.10)$$

Dengan penduga: $\hat{Y} = X\hat{\beta}$ $\qquad \dots \qquad$ (2.11)

Dengan :

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ 1 & X_{31} & X_{32} & \cdots & X_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{3n} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Keterangan :

Y = vektor (n x 1) dari observasi

X = matriks (n x p) dari variabel-variabel bebas, dimana p = k+1

β = vektor (p x1) dari koefisien regresi

ε = vektor (n x 1) dari galat random, dengan p = k+1.

Jika X' = matriks transpose X, Y' = matriks transpose Y, $\hat{\beta}$ adalah penaksir bagi β

dan e adalah penaksir bagi ε dengan : $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$ dan $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$

maka persamaan hasil eliminasi dapat ditulis : $Y = X\hat{\beta} + e$ atau $e = Y - X\hat{\beta}$ sehingga fungsi kuadrat terkecil L menjadi :

$$L = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e' e \qquad \text{... (2.12)}$$

$$= (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = (Y' - \hat{\beta}'X')(Y - X\hat{\beta})$$

$$L = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y - Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \qquad \text{... (2.13)}$$

Karena $\hat{\beta}'X'Y$ adalah skalar (1 x 1) maka matriks transposenya adalah: $(\hat{\beta}X'Y')' = Y'X\hat{\beta}$

Sehingga: $$L = e'e = Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \qquad \text{... (2.14)}$$

Estimasi kuadrat terkecil harus memenuhi:

1. $\dfrac{\partial L}{\partial \beta} = 0$

Dengan menyamakan turunan pertama sama dengan nol maka diperoleh taksiran β yang meminimumkan fungsi L adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} \qquad \ldots \qquad (2.15)$$

$$\Rightarrow \ -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \ X'X\hat{\beta} = X'Y$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\beta} = [X'X]^{-1}[X'Y] \qquad \text{, dengan : } [X'X]^{-1} \text{ ada} \qquad \ldots \qquad (2.16)$$

2. $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \hat{\beta}^2} > 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial \hat{\beta}^2} = 2X'X \qquad \ldots \qquad (2.17)$$

Matrik X'X adalah sebagai berikut :

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{n1} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{1k} & X_{2k} & X_{3k} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ 1 & X_{31} & X_{32} & \cdots & X_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{3n} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} X_{ik} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{i2}X_{i1} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} X_{ik}X_{i1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ik} & \sum X_{i1}X_{ik} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2}X_{ik} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} X_{ik}^2 \end{bmatrix} \qquad \ldots \qquad (2.18)$$

Matrik X'X adalah matrik simetris. berdasarkan *definisi 3* maka matrik X'X adalah matrik definit positif dan $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \hat{\beta}^2} > 0$

Adapun statistik yang digunakan adalah :

$$\text{JKT} = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \overline{Y}^2 = Y'Y - n\overline{Y}^2 \qquad \ldots \qquad (2.19)$$

$$\text{JKR} = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 = \hat{\beta}^1(X^1Y) - nY^2 \qquad \ldots \qquad (2.20)$$

$$\text{JKS} = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = Y^1Y - \hat{\beta}^1(X^1Y) \qquad \ldots \qquad (2.21)$$

Keterangan : JKT= Jumlah Kuadrat Total

JKR=Jumlah Kuadrat Regresi

JKS=Jumlah Kuadrat Sesatan

2.6.4. Pengujian Hipotesis dalam Regresi Linier Berganda

Pengujian hipotesis secara statistik berfungsi untuk menjawab apakah suatu pengamatan atau penemuan cocok dengan suatu hipotesis yang telah dinyatakan. Kata cocok mempunyai arti cukup dekat dengan nilai yang telah dihipotesiskan untuk membawa kita menerima hipotesis yang telah dinyatakan. Hipotesis yang telah dinyatakan dikenal sebagai hipotesis nol (H_0) yang kemudian diuji dengan hipotesis alternatif (H_1). Pengujian hipotesis berkenaan dengan pengembangan aturan atau prosedur untuk menerima atau manolak hipotesa. Keputusan menerima atau menolak hipotesis nol didasarkan pada pengujian statistik yang dihitung dari data dalam sebuah sampel random.

2.6.4.1. Pengujian Serempak Untuk Koefisien Regresi

Merupakan suatu pengujian untuk menentukan apakah ada hubungan antara variabel tak bebas Y dengan variabel bebas X_j (j=1,2,...,k).

- Perumusan hipotesanya:

H_0: $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0$ (variabel bebas tidak berpengaruh terhadap variabel respon)

H_0: $\beta_j \neq 0$, untuk sedikitnya satu j, j=1,2,...,k (variabel bebas mempunyai pengaruh terhadap variabel respon)

- statistik uji: $F_{hitung} = \dfrac{JKR/k}{JKS/n-k-1}$ ... (2.22)

- statistik tabel : $F_{tabel} = F_{(\alpha,k,n-k-1)}$ dengan α =5%

- Kriteria pengujian:

  * H_0 ditolak jika $F_{hit} > F_{tabel}$

  * H_0 ditolak jika signifikansi < α

Keterangan : n = banyaknya observasi

k= banyaknya variabel bebas

2.6.4.2. Pengujian Koefisien Regresi secara Individu

Pengujian ini digunakan untuk menguji ada tidaknya pengaruh masing-masing variabel bebas terhadap model regresi linier.

- Perumusan hipotesisnya :

  H_0:β_j = 0 (variabel β_j tidak berpengaruh terhadap model)

  H_1:$\beta_j \neq 0$ (variabel β_j berpengaruh terhadap model) , j=1,2,...,k

- Statistik uji: $t_{hit} = \dfrac{\hat{\beta}_j}{s(\hat{\beta}_j)}$ ... (2.23)

  Dengan : $s(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\operatorname{var}(\hat{\beta}_j)}$

- Statistik tabel: $t_{tabel} = t_{1-\alpha/2,n-k-1}$ dengan α =5%

- Kriteria penolakan :

* H_0 ditolak jika $|t_{hitung}| > t_{tabel}$.

* H_0 ditolak jika signifikasi $< \alpha$

2.6.4.3. Selang Kepercayaan

Selang kepercayaan (SK) berfungsi untuk:

1. Menilai ketelitian dari penduga ($\hat{\beta}_j$,j=1,2,...,k). Semakin lebar SK, semakin tak teliti penduga parameter yang diteliti.
2. Mengetahui nilai-nilai parameter H_0 yang masih tercakup dalam daerah penerimaan . Nilai-nilai parameter yang tercakup dalam selang kepercayaan tadi akan berada dalam daerah penerimaan.

Selang Kepercayaan 100(1-α)% untuk koefisien regresi β_j, j=1,1,...,k adalah :

$$\hat{\beta}_j - t_{(1-\alpha/2;n-k-1)} s(\hat{\beta}_j) \leq \beta_j \leq \hat{\beta}_j + t_{(1-\alpha/2;n-k-1)} s(\hat{\beta}_j) \qquad \ldots \qquad (2.24)$$

2.6.4.4. Koefisien Determinasi Berganda (R^2)

Koefisien determinasi berganda merupakan suatu nilai / ukuran yang dapat digunakan untuk mengetahui besarnya sumbangan variabel bebas X terhadap variabel tak bebas Y. R^2 didefinisikan sebagai :

$$R^2 = \frac{JKR}{JKT} = 1 - \frac{JKS}{JKT} \qquad \ldots \qquad (2.25)$$

Sifat-sifat R^2 :

a) Nilai R^2 selalu positif

b) Besar nilai R^2 berkisar dari 0 sampai 1 ($0 \leq R^2 \leq 1$)

* $R^2 = 0$, artinya model regresi tidak dapat meramalkan Y.

* R^2=1, artinya model regresi yang terbentuk dapat meramalkan Y secara sempurna.

2.6.4.5. Koefisien Korelasi (r)

Merupakan suatu nilai yang berguna untuk menelaah hubungan linier antara variabel tak bebas Y dengan variabel bebas X. Koefisien Korelasi merupakan akar dari koefisien determinasi, r didefinisikan sebagai berikut:

$$r = \sqrt{1 - \frac{JKS}{JKT}} \qquad \dots \qquad (2.26)$$

Sifat-sifatnya :

a. Nilainya berkisar pada interval ($-1 \le r \le 1$)

* r = 0 artinya antara X dan Y tak terdapat hubungan
* r = 1 artinya hubungan antara X dan Y sangat kuat dan positif
* r = -1 artinya hubungan antara X dan Y sangat kuat tetapi hubungan negatif

b. Koefisien korelasi hanya menunjukkan keeratan hubungan linier, bukan hubungan tak linier.

2.6.5.Penyimpangan Asumsi Klasik:

2.6.5.1. Multikolinieritas

Multikolinieritas merupakan situasi dimana terdapat hubungan yang kuat diantara variabel-variabel independen. Multikolinieritas mempunyai pengaruh yang penting pada perkiraan koefisien regresi dan pada penggunaan umum perkiraan model.

Ada beberapa cara untuk mendeteksi adanya multikolinieritas yaitu:

1. *Eigenvalue* atau sifat akar matrik korelasi memberikan sebuah ukuran multikolinieritas. Satu atau lebih eigenvalue yang mendekati nol menyatakan bahwa ada multikolinieritas .
2. *VIF* (faktor varian inflasi) lebih dari 10 maka terjadi multikolinieritas. *(Montgomery, 1990)*

2.6.5.2.Heterokedastisitas

Heterokedastisitas digunakan untuk menguji apakah dalam sebuah model regresi terjadi ketidaksamaan varians diantara residual-residualnya dari suatu pengamatan ke pengamatan yang lain. Jika variansnya tetap disebut homokedastisitas dan jika variansnya berbeda disebut heterokedastisitas. Model regresi yang baik adalah yang tidak terjadi heterokedastisitas.

Cara untuk mendeteksi adanya heterokedastisitas adalah dengan melihat ada tidaknya pola tertentu pada plot (grafik), dimana sumbu Y adalah Y yang telah diprediksi dan sumbu X adalah Residual Studentized (Y prediksi – Y sesungguhnya). Jika ada pola tertentu yang teratur (bergelombang, melebar kemudian menyempit) maka telah terjadi heterkedastisitas. Jika tidak ada pola yang jelas, artinya titik-titik menyebar di atas dan di bawah angka 0 pada sumbu Y maka tidak terjadi heterokedastisitas.

2.6.6. Pemilihan Variabel Terbaik dengan Metode backward

Dalam regresi berganda, biasanya ingin diketahui variabel-variabel independen mana saja yang relatif penting dibanding lainnya. Salah satu metode yang biasa digunakan untuk memilih variabel terbaik ini adalah metode Backward.

Metode Backward mencoba memeriksa hanya regresi terbaik yang mengandung sejumlah tertentu peubah peramal. Langkah-langkah dalam metode ini adalah *(Draper & Smith, 1992)* :

1. Menghitung persamaan regresi yang mengandung semua peubah peramal.
2. Menghitung nilai-F parsial untuk setiap peubah peramal, seolah-olah persamaan itu merupakan peubah terakhir yang dimasukkan kedalam persamaan regresi.
3. Membandingkan nilai F parsial terendah (F_L) dengan nilai F_{tabel}
   a. Jika $F_L < F_{tabel}$, keluarkan peubah bebas yang menghasilkan F_L dari persamaan regresi dan kemudian hitung kembali persamaan regresi tanpa menyertakan peubah tersebut, kembali ke langkah 2.
   b. Jika $F_L > F_{tabel}$, ambil persamaan regresi.

Catatan:

Nilai F parsial adalah uji F yang berkaitan dengan uji H_0: $\beta=0$ lawan H_1: $\beta\neq0$ untuk semabarang koefisien regresi.

2.7. METODE KUADRAT TERKECIL TERTIMBANG/TERBOBOTI

Untuk menggambarkan metode ini, digunakan model dua variabel:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i \qquad \dots \qquad (2.27)$$

Metode kuadrat terkecil meminimumkan :

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 \qquad \dots \qquad (2.28)$$

untuk mendapatkan taksiran, sedangkan metode kuadrat terkecil tertimbang, meminimumkan jumlah kuadrat residual tertimbang (weight residual sum of square):

$$\sum w_i e_i^2 = \sum w_i (Y_i - \beta_0^* - \beta_1^* X_i)^2 \qquad \dots \qquad (2.29)$$

dengan β_0^* dan β_1^* adalah penaksir kuadrat terkecil tertimbang dengan w_i sebagai penimbangnya (bobotnya) sedemikian sehingga : $w_i = \dfrac{1}{\sigma_i^2}$ ... (2.30)

wi adalah penimbang (bobot) yang proporsional secara kebalikan (inversely proportional) terhadap varians dari u_i dan Y_i yang bersyarat atas X_i tertentu.

Dengan var $(u_i|X_i)$ = var $(Y_i|X_i) = \sigma_i^2$.

Dengan mendeferensialkan (2.29) terhadap β_0^* dan β_1^*, kita mendapatkan:

$$\frac{\partial \sum w_i e_i^2}{\partial \beta_0^*} = 2\sum w_i(Y_i - \beta_0^* - \beta_1^* X_i)(-1) \quad \text{...} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \sum w_i e_i^2}{\partial \beta_1^*} = 2\sum w_i(Y_i - \beta_0^* - \beta_1^* X_i)(-X_i) \quad \text{...} \quad (2.32)$$

Dengan menetapkan persamaan normal sama dengan nol, diperoleh dua persamaan normal berikut ;

$$\sum w_i Y_i = \beta_0^* \sum w_i + \beta_1^* \sum w_i X_i \quad \text{....} \quad (2.33)$$

$$\sum w_i X_i Y_i = \beta_0^* \sum w_i X_i + \beta_1^* \sum w_i X_i^2 \quad \text{....} \quad (2.34)$$

Persamaan normal pada persamaan (2.33) dan (2.34) adalah identik dengan persamaan normal pada metode kuadrat terkecil.

Dengan memisalkan :

$$\overline{X}^* = \frac{\sum w_i X_i}{\sum w_i} \quad \text{....} \quad (2.35)$$

$$\overline{Y}^* = \frac{\sum w_i Y_i}{\sum w_i} \quad \text{....} \quad (2.36)$$

dan $x_i^* = X_i - \overline{X}^*$ .... (2.37) $y_i^* = Y_i - \overline{Y}^*$ .... (2.38)

Dengan menyelesaikan persamaan (2.33) dan (2.34) secara simultan maka diperoleh

$$\beta_0^* = \overline{Y}^* - \beta_1^* \overline{X}^* \qquad ..... \qquad (2.39)$$

$$\beta_1^* = \frac{\sum w_i x_i^* y_i^*}{\sum w_i x_i^{*}} \qquad ..... \qquad (2.40)$$

Jika $w_1 = w_2 = w_3 = \ldots = w_N = w$, penaksir kuadrat terkecil tertimbang identik dengan metode kuadrat terkecil.

2.8. METODE PERAMALAN

2.8.1. Pola Data Runtun Waktu

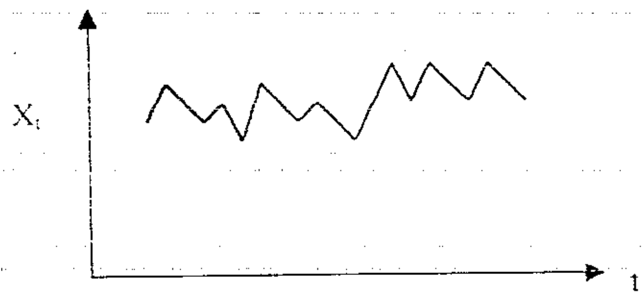
Deret berkala (data runtun waktu) adalah kumpulan data dalam interval waktu yang sama dalam jangka waktu yang relatif panjang. Untuk memilih suatu metode yang tepat untuk peramalan, harus mempertimbangkan jenis pola data. Pola data dapat dibedakan menjadi empat macam, yaitu;

1. Pola Stasioner

   Terjadi bilamana pola data berfluktuasi di sekitar nilai rata-rata yang konstan.

   Contoh : Produksi makanan anak-anak 'Chiki Snack' tidak meningkat dan menurun selama waktu tertentu.

   Pola stasioner dapat ditunjukkan pada gambar 3.a berikut:



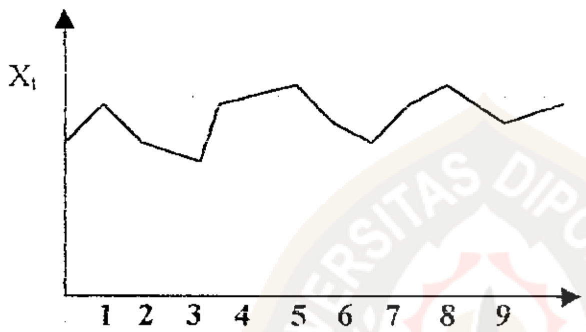
Gambar 3.a Pola Stasioner

2. Pola Musiman

Terjadi bilamana pola data dipengaruhi oleh faktor musiman, misalnya kuartal tahun tertentu, bulanan atau hari-hari pada minggu tertentu.

Contoh : Penjualan produk es krim, minuman ringan dan sebagainya

Pola musiman dapat ditunjukkan pada gambar 3.b berikut:



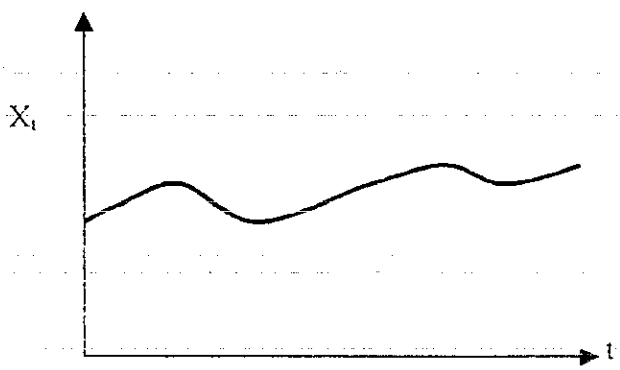
Gambar 3.b Pola Musiman

3. Pola Siklis

Terjadi bilamana pola data dipengaruhi oleh fluktuasi ekonomi jangka panjang seperti yang berhubungan dengan siklus bisnis.

Contoh : Penjualan produk mobil, baja dan sebagainya

Pola siklis dapat ditunjukkan pada gambar 3.c berikut:



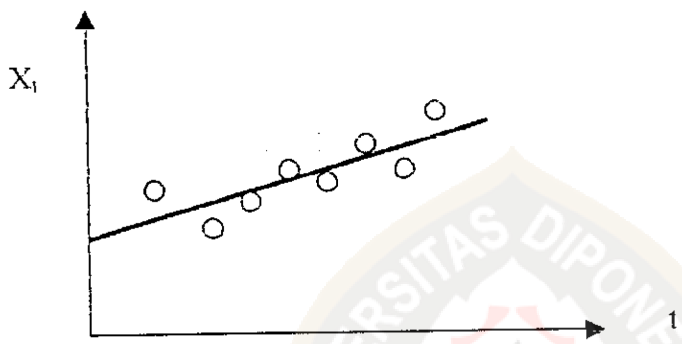
Gambar 3.c Pola Siklik

4. Pola Trend

Terjadi bilamana pola data terdapat kenaikan atau penurunan sekuler jangka panjang dalam data.

Contoh : PBRB, jumlah penduduk dan sebagainya

Pola trend dapat ditunjukkan pada gambar 3.d berikut:



Gambar 3.d Pola Trend

2.8.2. Metode Pemulusan Eksponensial Orde Pertama (Single Smoothing)

Metode ini dipergunakan secara luas didalam peramalan data yang bersifat trend karena sederhana, efisien didalam perhitungan, perubahan ramalan mudah disesuaikan dengan perubahan data dan ketelitian metode ini cukup besar.

Eksponensial Smoothing Untuk Proses Konstan

Apabila perubahan permintaan besarnya tidak berubah didalam kurun waktu tertentu, atau jika perubahannya kecil saja, maka dalam hal ini digunakan model konstan, sebagai berikut:

$$X_T = b + \varepsilon_T \qquad \ldots \qquad (2.41)$$

dengan: X_t = permintaan aktual pada periode ke-T

b = permintaan rata-rata

ε_T = random error dengan asumsi $E(\varepsilon_T) = 0$ dan $Var(\varepsilon_T) = \sigma_\varepsilon^2$

Nilai b pada akhir periode T-1 adalah $\hat{b}(T-1)$ dan permintaan aktual adalah X_T. Akan dicari $\hat{b}(T)$ yaitu penaksir bagi b. Nilai $\hat{b}(T)$ adalah sama dengan penaksir lama $\hat{b}(T-1)$ ditambah dengan nilai kecil tertentu dari kesalahan ramalan. Kesalahan ramalan pada periode T adalah $e(T)$ sebagai berikut:

$$e(T) = X_T - \hat{b}(T-1) \qquad \ldots\ldots \qquad (2.42)$$

Jika α adalah nilai kecil tertentu yang dimaksud diatas maka taksiran permintaan yang baru adalah:

$$\hat{b}(T) = \hat{b}(T-1) + \alpha\left\{X_T - \hat{b}(T-1)\right\} \qquad \ldots\ldots \qquad (2.43)$$

Jika $\hat{b}(T) \equiv S_T$, maka :

$$S_T = S_{T-1} + \alpha(X_T - S_{T-1})$$
$$S_T = \alpha X_T + (1-\alpha) S_{T-1} \qquad \ldots\ldots \qquad (2.44)$$

S_T disebut smoothing konstan. Model (2.44) adalah model pemulusan eksponensial tunggal atau single smoothing.

S_T adalah rata-rata tertimbang dari semua pengamatan yang lampau. Hal ini dapat diperlihatkan sebagai berikut:

$$S_T = \alpha X_T + (1-\alpha) S_{T-1}$$
$$S_T = \alpha X_T + (1-\alpha)\{\alpha X_{T-1} + (1-\alpha) S_{T-2}\}$$
$$S_T = \alpha X_T + \alpha (1-\alpha) X_{T-1} + (1-\alpha)^2 S_{T-2}$$

Jika subsitusi S_{T-k}, untuk k=2,3,…,T dilanjutkan maka diperoleh:

$$S_T = \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k X_{T-k} + (1-\alpha)^T S_0 \qquad \ldots\ldots \qquad (2.45)$$

Dengan S_0 adalah penaksir awal dari b, yang dipakai pada awal proses. Jumlahan bobot adalah satu, karena :

$$\alpha\sum_{k=0}^{T-1}(1-\alpha)^k = \alpha\left\{\frac{1-(1-\alpha)^T}{1-(1-\alpha)}\right\} = 1-(1-\alpha)^T, \text{ untuk T cukup besar } (1-\alpha)^T \approx 0$$

$$\alpha\sum_{k=0}^{T-1}(1-\alpha)^k = 1 - 0 = 1 \quad \ldots\ldots \quad (2.46)$$

Jika nilai T cukup besar, akibatnya $(1\text{-}\alpha)^T\ S_0$ mendekati nol. Model (2.44) menghasilkan nilai b yang tak bias karena:

$$E(S_T) = E\left\{\alpha\sum_{k=0}^{T-1}(1-\alpha)^k X_{T-k}\right\} = \alpha\sum_{k=0}^{T-1}(1-\alpha)^k\ E(X_{T-k})$$

$$E(S_T) = b\,\alpha\sum_{k=0}^{T-1}(1-\alpha)^k = b \quad \ldots\ldots \quad (2.47)$$

Oleh karena itu S_T dipakai sebagai penaksir tak bias parameter b yang tidak diketahui pada periode ke-T. Nilai ramalan untuk *m* periode kedepan adalah :

$$\ddot{X}_{T+m}(T) = S_T \quad \ldots\ldots \quad (2.48)$$

2.8.3. Metode Eksponensial Pemulusan Berganda Dari Holt

Metode eksponensial pemulusan berganda dari Holt pada prinsipnya sama dengan metode pemulusan eksponensial tunggal (Single Smoothing). Namun bedanya Holt tidak menggunakan rumus pemulusan secara langsung, sebagai gantinya Holt memuluskan nilai trend dengan parameter berbeda dari deret yang asli. Sehingga metode ini menggunakan dua parameter pemulusan yaitu α dan γ yang masing-masing nilainya terletak antara 0 sampai dengan 1. *(Makridakis & Wheelwright, 1996)*

Data yang menunjukkan sifat trend dapat dinyatakan dengan model sebagai berikut :

$$X_T = a + b\,T + \varepsilon_T \quad \ldots \quad (2.49)$$

$$\hat{X}_T = \hat{a} + \hat{b}\,T \quad \ldots \quad (2.50)$$

ε_T = random error dengan asumsi $E(\varepsilon_T) = 0$ dan $Var(\varepsilon_T) = \sigma_\varepsilon^2$

Ramalan dari pemulusan eksponensial berganda dari Holt untuk periode *m* didepan adalah:

$$\hat{X}_{T+m}(T) = F_{T+m} = \hat{a} + \hat{b}\,(T+m) = \hat{a} + \hat{b}\,(T) + \hat{b}\,(m)$$

$$= X_T + \hat{b}\,m$$

$$= S_T + b_T\,m \quad \ldots \quad (2.51)$$

Keterangan :

$$E(X_T) = \hat{X}_T = S_T \text{ dengan } S_T = \alpha X_T + (1-\alpha)(S_{T-1} + b_{T-1}) \quad \ldots \quad (2.52)$$

$$E(b) = \hat{b} = b_T \text{ dengan } b_T = \gamma(S_T - S_{T-1}) + (1-\gamma)\,b_{T-1} \quad \ldots \quad (2.53)$$

Keterangan :

X_T = permintaan aktual pada periode ke T

$\hat{X}_T$ = taksiran permintaan pada periode ke T

a = intersep

b = slope

S_T = nilai pemulusan eksponensial pada periode ke T

b_T = nilai trend pada periode ke T

S_{T-1} = nilai pemulusan eksponensial pada periode ke T-1

b_{T-1} = nilai trend pada periode ke T -1

α, γ = parameter pemulusan $(0 < \alpha < 1, 0 < \gamma < 1)$

m = jumlah periode didepan

$\hat{X}_{T+m}(T) = F_{T+m}$ = ramalan pada periode ke T+m didepan

2.8.4. Estimasi Parameter Metode Pemulusan Eksponensial Ganda Dari Holt

2.8.4.1. Estimasi Parameter S_T

Data bersifat trend dinyatakan sebagai berikut:

$$X_T = a + b\,T + \varepsilon_T \qquad \ldots \qquad (2.49)$$

Pemulusan eksponensial tunggal pada akhir periode T adalah :

$$S_T = \alpha\, X_T + (1-\alpha)\, S_{T-1} \qquad \ldots \qquad (2.44)$$

Untuk T yang cukup besar, maka :

$$S_T = \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k X_{T-k} \qquad \ldots \qquad (2.54)$$

$$E(S_T) = E\left\{\alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k X_{T-k}\right\} = \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k \; E(X_{T-k})$$

$$E(S_T) = \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k \left[a + b\,(T-k)\right]$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k \left[a + b\,(T)\right] - b\alpha \sum_{k=0}^{T-1} k(1-\alpha)^k$$

$$= (a + b\,T) - \frac{1-\alpha}{\alpha}\; b$$

$$= E(X_T) - \frac{1-\alpha}{\alpha}\; b \qquad \ldots\ldots \; (2.55)$$

Nilai: $\alpha \sum_{k=0}^{T-1} k(1-\alpha)^k = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ ..... (2.56)

Penaksir S_T pada persamaan (2.44) akan menghasilkan taksiran yang terlalu rendah dengan perbedaan sebesar $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ b, seperti yang ditunjukkan pada persamaan (2.55).

Untuk menghilangkan keterlambatan dan menempatkan S_T pada taksiran nilai yang aktual saat ini. Holt menyarankan perlu diadakan penyesuaian S_T secara langsung untuk trend periode sebelumnya, yaitu b_{T-1} dengan menambahkan nilai pemulusan terakhir, yaitu S_{T-1}. *(Makridakis & Wheelwright,1996)*

Sehingga persamaan S_T menjadi :

$$S_T = \alpha X_T + (1-\alpha)(S_{T-1} + b_{T-1}) \qquad .... \qquad (2.52)$$

S_T adalah rata-rata tertimbang dari semua pengamatan yang lampau. Hal ini dapat diperlihatkan sebagai berikut:

$$S_T = \alpha X_T + (1-\alpha)(S_{T-1} + b_{T-1})$$

$$S_T = \alpha X_T + (1-\alpha) S_{T-1} + (1-\alpha) b_{T-1}$$

$$S_T = \alpha X_T + (1-\alpha)\{[\alpha X_{T-1} + (1-\alpha)(S_{T-2} + b_{T-2})] + b_{T-1}\}$$

$$S_T = \alpha X_T + \alpha\ (1-\alpha) X_{T-1} + (1-\alpha)^2 (S_{T-2} + b_{T-2}) + (1-\alpha) b_{T-1}$$

$$S_T = \alpha X_T + \alpha\ (1-\alpha) X_{T-1} + (1-\alpha)^2 (S_{T-2}) + (1-\alpha)^2 (b_{T-2}) + (1-\alpha) b_{T-1}$$

$$S_T = \alpha X_T + \alpha\ (1-\alpha) X_{T-1} + (1-\alpha)^2 (\alpha X_{T-2} + (1-\alpha)(S_{T-3} + b_{T-3})) + (1-\alpha)^2 b_{T-2} + (1-\alpha) b_{T-1}$$

$$S_T = \alpha X_T + \alpha\ (1-\alpha) X_{T-1} + \alpha (1-\alpha)^2 X_{T-2} + (1-\alpha)^3 (S_{T-3} + b_{T-3}) + (1-\alpha)^2 b_{T-2} + (1-\alpha) b_{T-1}$$

Jika subsitusi S_{T-k}, untuk k=2,3,...,T dilanjutkan maka diperoleh:

$$S_T = \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k X_{T-k} + (1-\alpha)^{T-1}(S_1 + b_1) + \sum_{k=1}^{T-1} (1-\alpha)^k b_{T-k} \qquad ..... \quad (2.57)$$

Dengan S_1 adalah penaksir awal dari S_T dan b_1 adalah penaksir awal dari b_T, yang dipakai pada awal proses.

Nilai dari $\sum_{k=1}^{T-1}(1-\alpha)^k$ adalah jumlahan deret geometri dengan suku awal (a) = 1-α dan rasio (r) = 1- α. Sehingga jumlah deret tersebut adalah:

$$\sum_{k=1}^{T-1}(1-\alpha)^k = \frac{1-\alpha}{\alpha} \qquad \ldots. \quad (2.58)$$

Jika nilai T cukup besar, maka $(1-\alpha)^{T-1}(S_1 + b_1)$ mendekati nol. Sehingga persamaan (2.57) menjadi :

$$S_T = \alpha\sum_{k=0}^{T-1}(1-\alpha)^k X_{T-k} + \sum_{k=1}^{T-1}(1-\alpha)^k b_{T-k} \quad \ldots.. \quad (2.59)$$

S_T adalah penaksir tak bias dari X_T , karena:

$$E(S_T) = E\left\{\alpha\sum_{k=0}^{T-1}(1-\alpha)^k X_{T-k}\right\} + E\left\{\sum_{k=1}^{T-1}(1-\alpha)^k b_{T-k}\right\}$$

$$= \alpha\sum_{k=0}^{T-1}(1-\alpha)^k \; E(X_{T-k}) + \sum_{k=1}^{T-1}(1-\alpha)^k E(b_{T-k})$$

$$= \alpha\sum_{k=0}^{T-1}(1-\alpha)^k \; (a + b(T-k)) + \sum_{k=1}^{T-1}(1-\alpha)^k E(b_{T-k})$$

$$= [a + bT]\alpha\sum_{k=0}^{T-1}(1-\alpha)^k - b\alpha\sum_{k=0}^{T-1}k(1-\alpha)^k + b\sum_{k=1}^{T-1}(1-\alpha)^k$$

$$E(S_T) = (a + bT) - \left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\right] b + \left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\right] b$$

$$E(S_T) = a + bT \qquad \ldots.. \quad (2.60)$$

$$E(S_T) = \hat{X}_T \qquad \ldots.. \quad (2.61)$$

Oleh karena itu S_T dipakai sebagai penaksir tak bias dari X_T .

2.8.4.2. Estimasi Parameter b_T

Telah terbukti bahwa S_T adalah penaksir tak bias untuk X_T , yang perumusannya sebagai berikut:

$$S_T \equiv \hat{X}_T \qquad \ldots. \qquad (2.62)$$

Nilai b_T pada akhir periode T-1 adalah b_{T-1}. Taksiran permintaan aktual adalah S_T dan taksiran permintaan aktual pada akhir periode T-1 adalah S_{T-1}. Akan dicari b_T yaitu penaksir bagi b. Nilai b_T adalah sama dengan penaksir lama b_{T-1} ditambah dengan nilai kecil tertentu dari selisih taksiran permintaan aktual ke T dengan taksiran permintaan sebelumnya (T-1). Selisih taksiran pada periode T adalah Δ_T sebagai berikut:

$$\Delta_T = S_T - S_{T-1} \qquad \ldots. \qquad (2.63)$$

Jika γ adalah nilai kecil tertentu yang dimaksud diatas maka nilai trend yang baru adalah:

$$b_T = b_{T-1} + \gamma\{S_T - S_{T-1}\} \qquad \ldots. \qquad (2.64)$$

Untuk T yang besar, maka:

$$\begin{aligned} b_T &= \gamma\{S_T - S_{T-1}\} + b_{T-1} \\ &= \gamma\{S_T - S_{T-1}\} + \{\gamma(S_{T-1} - S_{T-2}) + b_{T-2}\} \\ &= \gamma\sum_{k=0}^{T-1}(S_{T-k} - S_{T-k-1}) + b_{T-k} \qquad \ldots.. \qquad (2.65) \end{aligned}$$

$$E(b_T) = \gamma\sum_{k=0}^{T-1}E(S_{T-k} - S_{T-k-1}) + E(b_{T-k})$$

$$E(b_T) \neq b \qquad \ldots... \quad (2.66)$$

Berdasarkan persamaan (2.66), penaksir b_T pada persamaan (2.64) adalah bukan penaksir tak bias. Penaksir b_T pada persamaan (2.64) ini menghasilkan nilai baru yang lebih tinggi atau lebih rendah dari pada nilai sebelumnya. (*Makridakis & Wheelwright, 1996*). Holt menyarankan penaksir b_T yang merupakan penaksir tak bias dari b adalah :

$$b_T = \gamma (S_T - S_{T-1}) + (1 - \gamma)\, b_{T-1} \qquad \ldots. \quad (2.53)$$

Untuk meremajakan trend pada persamaan (2.53), digunakan selisih antara nilai pemulusan terakhir. Karena masih terdapat kerandoman, maka hal ini dihilangkan oleh parameter pemulusan γ pada periode terakhir (S_T-S_{T-1}) dan ditambah dengan taksiran trend sebelumnya dikalikan dengan (1-γ).

Untuk T yang besar maka :

$$b_T = \gamma (S_T - S_{T-1}) + (1 - \gamma)\, b_{T-1}$$

$$b_T = \gamma(S_T - S_{T-1}) + (1-\gamma)\{\gamma(S_{T-1} - S_{T-2}) + (1-\gamma)b_{T-2}\}$$

$$= \gamma(S_T - S_{T-1}) + \gamma(1-\gamma)(S_{T-1} - S_{T-2}) + (1-\gamma)^2 b_{T-2}$$

Jika Subsitusi b_{T-k}, untuk k=2,3,..., T-1 dilanjutkan maka diperoleh :

$$b_T = \gamma \sum_{k=0}^{T-1} (1-\gamma)^k (S_{T-k} - S_{T-k-1}) + (1-\gamma)^{T-1} b_1 \qquad \ldots..<19>$$

Jika nilai T cukup besar, maka $(1-\gamma)^{T-1}$ b_1 mendekati nol.

Penaksir b_T pada persamaan (2.53) adalah penaksir tak bias, karena :

$$E(b_T) = \gamma \sum_{k=0}^{T-1} (1-\gamma)^k E[S_{T-k} - S_{T-k-1}]$$

$$= E[S_{T-k} - S_{T-k-1}] = E(S_{T-k}) - E(S_{T-k-1})$$

$$= a + b(T - k) - a - b(T - k - 1)$$

$$= a + bT - bk - a - bT + bk + b$$

$$= b \qquad \ldots\ldots. \quad (2.67)$$

Berdasarkan persamaan (2.67) maka terbukti bahwa b_1 adalah penaksir tak bias dari b.

2.8.4.3. Inisialisasi Parameter S_T dan b_T

Proses inisialisasi untuk pemulusan eksponensial linier Holt memerlukan dua taksiran, yaitu S_1 dan b_1. (*Makridakis & Wheelwright, 1996*)

Taksiran-taksiran tersebut dapat diperoleh dari :

1. Untuk inisialisasi S_1 ambil : $S_1 = X_1$
2. Untuk inisialisasi b_1 ada tiga alternatif antara lain:
   - $b_1 = X_2 - X_1$
   - $b_1 = \frac{(X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + (X_4 - X_3)}{3}$
   - b_1= taksiran kemiringan (slope) setelah data aktual diplot dengan regresi linier terhadap waktu (T)

Adapun statistik yang digunakan untuk mengetahui nilai kesalahan adalah:

- $\text{MAD} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} | X_i - X_i |$ .... (2.68)
- $\text{MSD} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} (X_i - X_i)^2$ .... (2.69)
- $\text{MAPE} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} \left| \frac{X_i - X_i}{X_i} \right| (100)$ .... (2.70)

Keterangan :

MAD = nilai tengah deviasi absolut

MSD = nilai tengah deviasi kuadrat

MAPE = nilai tengah kesalahan persentase absolut

Pengambilan parameter pemulusan α dan γ terbaik adalah berdasarkan nilai MAD, MSD dan MAPE terkecil. Sehingga diharapkan menghasilkan error yang kecil.