BAB 2

LANDASAN TEORI

2.1 Program Linear

2.1.1 Pengertian Umum

Program linear yang diterjemahkan dari Linear Programming merupakan suatu cara untuk menyelesaikan permasalahan pengalokasian sumber-sumber yang terbatas di antara beberapa aktivitas yang bersaing, dengan cara terbaik yang mungkin dilakukan.

Membuat program linear berarti membuat rencana kegiatan-kegiatan untuk memperoleh hasil yang optimum di antara semua alternatif yang mungkin dengan menggunakan suatu model matematis untuk menggambarkan permasalahan yang dihadapi.

Contoh 2.1-1 :

Contoh permasalahan program linear

Memaksimumkan $Z = 3x_1 + 2x_2$

Dengan kendala $2x_1 + x_2 \leq 100$

$x_1 + x_2 \leq 80$

$x_1 \leq 40$

$x_1, x_2 \geq 0$

Dalam membuat program linear digunakan karakteristik-karakteristik yang biasa digunakan, yaitu :

1. Variabel Keputusan

   Variabel keputusan adalah variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan-keputusan yang akan dibuat.

   Dari contoh 2.1-1, variabel keputuan menggunakan x_1, x_2.

2. Fungsi tujuan

   Fungsi tujuan adalah fungsi dari variabel keputusan yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan.

   Dari contoh 2.1-1, fungsi tujuannya adalah :

   Memaksimumkan $Z = 3x_1 + 2x_2$

3. Pembatas

   Pembatas adalah kendala-kendala yang dihadapi, sehingga tidak bisa ditentukan harga-harga variabel keputusan secara sembarang.

   Dari contoh 2.1-1 :

   Pembatas 1 : $2x_1 + x_2 \leq 100$

   Pembatas 2 : $x_1 + x_2 \leq 80$

   Pembatas 3 : $x_1 \leq 40$

4. Konstanta ruas kanan pembatas

   Konstanta ruas kanan pembatas adalah bilangan-bilangan yang berada di sisi kanan setiap pembatas.

Dari contoh 2.1-1, konstanta ruas kanan pembatasnya adalah bilangan-bilangan 100, 80, 40.

5. Pembatas tanda

   Pembatas tanda adalah pembatas yang menjelaskan apakah variabel keputusan diasumsikan hanya berharga non negatif atau variabel keputusan boleh berharga positif boleh juga negatif (tidak terbatas dalam tanda).

   Dari contoh 2.1-1, kedua variabel keputusan berharga non negatif, sehingga harus dinyatakan :

   $x_1, x_2 \geq 0$

2.1.2 Model Program Linear

Secara umum permasalahan program linear dapat dinyatakan sebagai berikut :

Memaksimumkan / meminimumkan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

Dengan kendala $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\ (\leq \text{atau} \geq)\ d_1$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\ (\leq \text{atau} \geq)\ d_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n\ (\leq \text{atau} \geq)\ d_m$$

$$x_1, x_2 \ldots x_n \geq 0$$

Dengan :

Z = fungsi tujuan.

c_j = koefisien variabel fungsi tujuan x_j.

a_{ij} = koefisien variabel fungsi kendala x_j.

x_j = variabel keputusan .

d_i = koefisien vektor kolom ruas kanan pembatas.

untuk i = 1, 2, ...m dan j = 1,2,...n.

dengan asumsi bahwa a_{ij}, c_j dan d_i adalah parameter-parameter model yang telah diketahui.

Suatu model program linear dikatakan sebagai model normal apabila mempunyai bentuk sebagai berikut :

1. Memaksimumkan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

   Dengan Kendala

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\
x_1, x_2 \ldots x_n &\geq 0
\end{aligned}
$$

2. Meminimumkan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

   Dengan kendala

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\geq d_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\geq d_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\geq d_m \\
x_1, x_2 \ldots x_n &\geq 0
\end{aligned}
$$

Untuk mengubah permasalahan maksimum/minimum yang tidak normal (jika pembatas mempunyai tanda lain seperti = dan ≥ untuk kasus maksimum atau = dan ≤ untuk kasus minimum) menjadi permasalahan normal, dapat dilakukan melalui langkah – langkah berikut :

1. Mengalikan setiap pembatas bertanda ≤ (untuk kasus minimum) dan pembatas bertanda ≥ (untuk kasus maksimum) dengan bilangan –1.
2. Mengganti setiap pembatas = menjadi dua ketidaksamaan (≥ dan ≤), kemudian melakukan pada langkah 1.
3. Mengganti variabel x_j yang tidak terbatas dalam tanda dengan :

   $x_j = x_j^1 - x_j^{11}$ di mana $x_j^1 \geq 0$ dan $x_j^{11} \geq 0$.

Untuk memahami uraian selanjutnya, berikut diberikan definisi tentang solusi.

Solusi fisibel adalah solusi yang memenuhi semua kendala permasalahan.

Solusi optimum adalah solusi fisibel yang memberikan nilai terbaik bagi fungsi tujuannya, yaitu memberikan nilai terbesar untuk permasalahan program linear kasus maksimum dan memberikan nilai terkecil untuk kasus minimum.

2.1.3 Teori Dualitas

Teori dualitas merupakan salah satu konsep program linear yang penting dan menarik ditinjau dari segi teori dan praktisnya. Ide dasar yang melatarbelakangi teori ini adalah bahwa setiap permasalahan program linear mempunyai program linear yang lain yang saling berkaitan yang disebut **dual,** sedemikian sehingga solusi pada permasalahan semula (yang disebut **primal**) juga memberi solusi pada dualnya.

Bentuk umum permasalahan primal-dual adalah sebagai berikut :

Primal

Memaksimumkan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

Dengan kendala $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$

$x_1, x_2 \ldots x_n \geq 0$

Dual

Meminimumkan $W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$

Dengan kendala $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2$

$\vdots$

$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n$

$y_1, y_2 \ldots y_m \geq 0$

Korespondensi antara primal dan dual :

1. Koefisien variabel fungsi tujuan primal menjadi konstanta ruas kanan pembatas bagi dual, sedangkan konstanta ruas kanan pembatas primal menjadi koefisien fungsi tujuan bagi dual.
2. Tanda ketidaksamaan pada pembatas akan bergantung pada fungsi tujuannya.
3. Fungsi tujuan berubah bentuk (Maksimum pada primal menjadi minimum pada dual, dan sebaliknya).
4. Setiap kolom pada primal berkorespondensi dengan baris (pembatas) pada dual.
5. Setiap baris (pembatas) pada primal berkorespondensi dengan kolom dual.

Contoh 2.1-2 :

Primal

Meminimumkan $Z = 5x_1 - 2x_2$

Dengan Kendala $-x_1 + x_2 \geq -3$

$2x_1 + 3x_2 \leq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

Dual

Memaksimumkan $W = 3y_1 + 5y_2$

Dengan kendala $y_1 + 2y_2 \leq 5$

$-y_1 + 3y_2 \leq -2$

$y_1, y_2 \leq 0$

2.2 Vektor

Definisi 2.2.1

Misalkan $p_1, p_2, \ldots p_n$ adalah sejumlah n bilangan riil dan P adalah himpunan yang berurutan dari angka-angka riil itu, yaitu :

$P = (p_1, p_2, \ldots p_n)$, maka P disebut sebuah vektor.

Komponen ke-i dari P diketaui dengan p_i, $i = 1, 2, \ldots n$.

Definisi 2.2.2

Secara ilmu ukur vektor adalah suatu potongan (ruang, segmen) garis yang mempunyai arah.

Suatu vektor a dapat digambarkan dengan ruas garis berarah (tanda panah) dan ditulis dengan notasi $\bar{a}$. Panjang dari vektor a ditulis dengan $|\bar{a}|$.

Definisi 2.2.3

Vektor bertitik awal di $P = (p_1, p_2, \ldots p_n)$ dan bertitik ujung di $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ adalah :

Vektor $PQ = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, q_n - p_n)$

Definisi 2.2.4

Panjang vektor a = (a_1, a_2,..., a_n) adalah :

$|\bar{a}| = [(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)]^{1/2}$, sedangkan jarak dua titik P = (p_1, p_2, ...p_n)

dan Q = (q_1, q_2, ... q_n) adalah panjang vektor PQ, yaitu :

$|\overline{PQ}| = [(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \ldots + (q_n - p_n)^2]^{1/2}$

Definisi 2.2.5

Bila a dan b vektor-vektor, dan θ adalah sudut antara $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), dot produk dari $\bar{a}$ dan $\bar{b}$, yang dapat ditulis dengan $\bar{a} \cdot \bar{b}$ ($\bar{a}$ dot $\bar{b}$) adalah suatu skalar :

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos\theta$

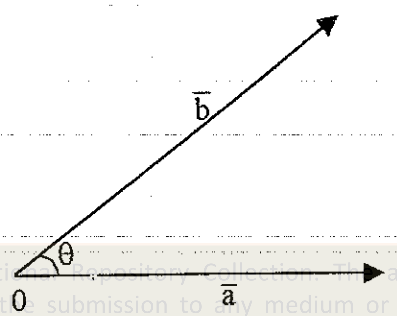
dengan :

$|\bar{a}|$ = panjang vektor a

$|\bar{b}|$ = panjang vektor b

θ = sudut terkecil yang dibentuk oleh vektor a dan vektor b.

Gambar 2.2.1 :



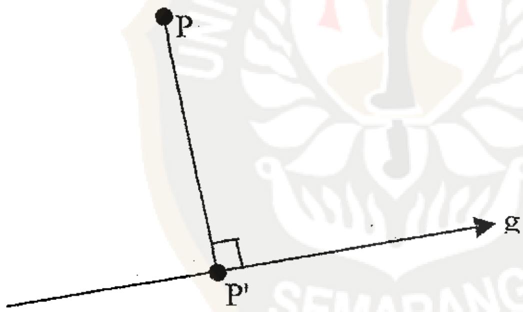
2.3 Proyeksi

2.3.1 Proyeksi Titik Pada Garis

Definisi 2.3.1

Proyeksi sebuah titik P pada sebuah garis g diperoleh dengan menarik garis tegak lurus dari titik P terhadap garis g. Perpotongan garis tegak lurus dari titik P dengan garis g, yaitu titik P' disebut sebagai proyeksi titik P pada garis g.

Gambar 2.3-1 :



Dengan :

P = titik yang diproyeksikan.

P' = titik hasil proyeksi.

PP' = garis yang memproyeksikan.

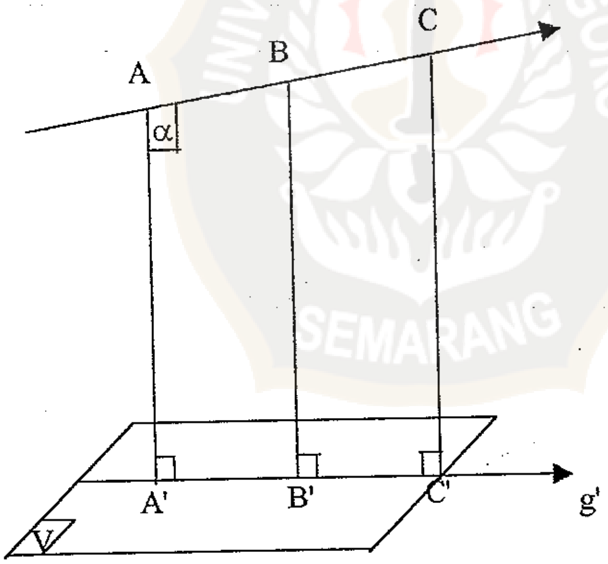
g = garis proyeksi.

2.3.2 Proyeksi Garis pada Bidang

Definisi 2.3.2

Proyeksi sebuah garis g pada bidang V dapat diperoleh dengan membuat proyeksi titik-titik yang terletak pada g ke bidang V, kemudian titik-titik proyeksi ini dihubungkan, dan disebut proyeksi dari garis g terhadap bidang V, yaitu garis g'.

Gambar 2.3.2 :



Dengan :

Bidang V = bidang proyeksi.

Garis g = garis yang diproyeksikan.

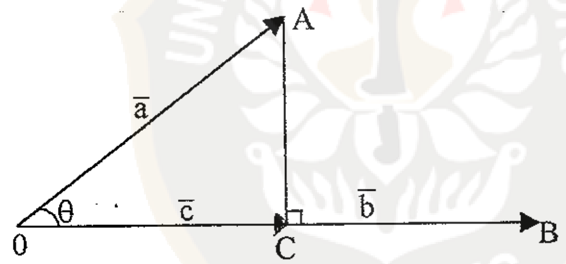
AA', BB' dan CC' = garis-garis yang memproyeksikan (garis proyektor).

Bidang α = bidang proyektor, yaitu bidang yang dibentuk oleh garis-garis proyektor.

2.3.3 Proyeksi Suatu Vektor Pada Vektor Lain

Dari definisi 2.3.1 dan 2.3.2 dapat ditunjukkan bahwa proyeksi vektor OA pada vektor OB adalah vektor OC, di mana OC = OA Cos θ.

Gambar 2.3.3 :



Jika $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ dan $\overline{OC}$ mewakili $\bar{a}$, $\bar{b}$ dan $\bar{c}$, maka proyeksi $\bar{a}$ pada $\bar{b}$ adalah $\bar{c}$ dengan panjang vektor c dinyatakan oleh : $|\bar{c}| = |\bar{a}|\text{Cos } \theta$. Panjang vektor proyeksi dari $\bar{a}$ pada $\bar{b}$ dapat dinyatakan dengan menggunakan dot produk sebagai berikut :

$$|\bar{c}| = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$$

bukti :

Panjang vektor c adalah $|\bar{c}| = |\bar{a}|\text{Cos } \theta$ ... 1)

Sedangkan dari definisi dot produk bahwa :

$$\bar{a} \,.\, \bar{b} = \left|\bar{a}\right| \left|\bar{b}\right| \text{ Cos } \theta$$

$$\text{maka Cos } \theta = \frac{\bar{a} \,.\, \bar{b}}{\left|\bar{a}\right| . \left|\bar{b}\right|} \qquad \ldots 2)$$

dengan menstubsitusikan 2) ke 1) diperoleh :

$$\left|\bar{c}\right| = \left|\bar{a}\right| \text{Cos}\,\theta$$

$$= \left|\bar{a}\right| \frac{\bar{a} \,.\, \bar{b}}{\left|\bar{a}\right| . \left|\bar{b}\right|}$$

$$= \frac{\bar{a} \,.\, \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|}$$

2.4 Matriks

Matriks adalah sekumpulan bilangan yang disusun dalam sebuah persegi panjang secara teratur di dalam baris-baris dan kolom-kolom.Matriks diberi nama dengan huruf kapital A, B, C, P dan lain-lain. Batas matriks diberikan dengan [ ] atau ( ). Bilangan-bilangan yang terdapat dalam matriks disebut unsur atau elemen matriks. Elemen-elemen yang mendatar membentuk baris dan elemen-elemen yang vertikal membentuk kolom matriks. Banyak baris dan kolom suatu matriks menyatakan ukuran atau ordo matriks tersebut. Jika dalam suatu matriks A terdapat m baris dan n kolom, maka ukuran matriks A adalah (mxn), dan dapat dituliskan dengan A (mxn) = [a_{ij}] (mxn), dalam hal ini a_{ij} menyatakan elemen dari matriks A pada baris ke – i dan kolom ke – j.

Contoh 2.4-1 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \\ 7 & \sqrt{2} & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks A adalah matriks dengan ukuran (3x4) dengan elemen-elemennya :

$a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = 1$

$a_{21} = 4$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{24} = -3$

$a_{31} = 7$, $a_{32} = \sqrt{2}$, $a_{33} = 10$, $a_{34} = 1$

2.4.1 Perkalian Matriks

Definisi 2.4.1

Misalkan matriks A = [a_{ij}] berukuran (p x Q) dan matriks B = [b_{ij}] berukuran (Q x r), maka hasil kali matriks A dan matriks B, ditulis AB adalah suatu matriks C = [C_{ij}] berukuran (p x r), di mana :

$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{iQ}b_{Qj}$

Untuk i = 1, 2,..., p dan j = 1, 2, ...,r.

Dari definisi 2.4.1, dapat dilihat bahwa :

1. Perkalian matriks AB dapat didefinisikan, jika banyak kolom matriks A = banyak baris matriks B.
2. Hasil kali dua matriks AB adalah suatu matriks C dengan banyak baris matriks C sama dengan banyak baris matriks A dan banyak kolom matriks C sama dengan banyak kolom matriks B.

Pada umumnya matriks tidak komutatif terhadap operasi perkalian $AB \neq BA$, meskipun BA terdifinisi untuk operasi perkalian.

Contoh 2.4-2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{dan } B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

maka C = AB adalah

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1x5)+(3x6) & (1x7)+(3x8) & (1x9)+(3x0) \\ (2x5)+(4x6) & (2x7)+(4x8) & (2x9)+(4x0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & 31 & 9 \\ 34 & 46 & 18 \end{bmatrix}$$

sedangkan untuk C = BA tidak terdefinisikan.

2.4.2 Jenis-jenis Matriks

1. Matriks Bujur Sangkar

   Matriks Bujur Sangkar adalah suatu matriks dengan banyak baris sama dengan banyak kolom.

2. Matriks Diagonal (D)

   Matriks Diagonal adalah suatu matriks Bujur Sangkar dengan semua elemen di luar diagonal utamanya sama dengan nol, atau dengan perkataan lain [a_{ij}] adalah suatu matriks Diagonal apabila $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

3. Matriks Identitas (I)

Matriks Identitas adalah suatu matriks Diagonal dengan elemen pada diagonal utamanya sama dengan 1, atau dengan perkataan lain [a_{ij}] adalah suatu Matriks Identitas apabila a_{ij} = 1 untuk i = j dan a_{ij} = 0 untuk $i \neq j$.

4. Vektor baris

Vektor baris adalah suatu matriks dengan satu baris dan n kolom. $(a_{11}\ \ a_{12}\ \ldots.\ \ a_{1n})$.

5. Vektor kolom

Vektor kolom adalah suatu matriks dengan m baris dan 1 kolom.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

6. Matriks Transpose

Misalkan matriks A = [a_{ij}] berukuran (mxn), maka transpose dari A adalah suatu matriks A^T dengan ukuran (nxm) yang diperoleh dari A dengan menggantikan baris ke-i dari A sebagai kolom ke-i pada A^T, untuk i = 1, 2, ...,m atau dengan perkataan lain : A^T = [a_{ji}].

2.4.3 Matriks Singular dan Nonsingular

Definisi 2.4.2

Sebuah Matriks Bujur Sangkar yang determinannya tidak sama dengan nol disebut Matriks fuul – rank atau Matriks Nonsingular sedangkan Matriks Bujur Sangkar yang determinannya sama dengan nol disebut Matriks Singular.

2.4.4 Invers Matriks

Definisi 2.4.3

Sebuah Matriks Bujur Sangkar A berukuran n disebut mempunyai invers bila ada matriks B, sedemikian sehingga AB = BA = I, dan ditulis dengan $B = A^{-1}$ yang merupakan Matriks Bujur Sangkar berukuran n.

Teorema 2.4.1

Invers dari Matriks Bujur Sangkar A berukuran n, bila ada adalah tunggal (hanya ada 1).

Bukti :

Misalkan selain A^{-1} ada invers lainnya, yaitu B.

Maka berarti bahwa:

$BA \quad = I$

$BA \quad = A^{-1} A$

$BAA^{-1} \quad = A^{-1}AA^{-1}$

$BI = A^{-1} I$

$B = A^{-1}$

Terbukti bahwa invers bila ada adalah tunggal.

Teorema 2.4.2

Jika Matriks Bujur Sangkar A berukuran n menpunyai invers, maka A adalah Matriks Nonsingular.

Bukti :

Matriks A mempunyai invers yaitu A^{-1}, maka :

$AA^{-1} = I$

Kita ketahui bahwa I (matriks Identitas) selalu mempunyai determinan yaitu sama dengan 1.

$A . A^{-1} = I$

$|A| . |A^{-1}| = 1$

misal determinan dari $A^{-1} = n$, maka determinan $A = 1/n$ atau matriks A selalu mempunyai determinan yang tidak sama dengan nol. Atau dengan perkataan lain bahwa matriks A adalah nonsingular.

Teorema 2.4.3

Jika Matriks Bujur Sangkar A adalah nonsingular, maka A mempunyai invers.

Bukti :

A adalah Matriks Bujur Sangkar Nonsingular, maka Det (A) $\neq 0$. Dari (Anton, Howard. 1992. halaman 43 – 44) telah dijelaskan bahwa "Jika suatu matriks ekuivalen baris terhadap I, maka matriks tersebut akan mempunyai invers". Dari sini akan diperlihatkan bahwa Matriks A adalah matriks yang ekuivalen baris terhadap I.

Misal R bentuk eselon baris tereduksi dari A. Karena R dapat diperoleh dari A dengan menggunakan urutan berhingga dari operasi baris elementer, maka dapat dicari Matriks – Matriks Elementer $E_1, E_2, \ldots E_k$ sehingga :

$E_k \ldots E_2 E_1 A = R$ atau $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1} R$.

Jadi $\text{Det}(A) = \text{Det}(E_1^{-1})\text{Det}(E_2^{-1}) \ldots \text{Det}(E_k^{-1})\text{Det}(R)$.

Karena $\text{Det}(A) \neq 0$, maka didapatkan $\text{Det}(R) \neq 0$.

Dari sini dapat diketahui bahwa matriks R adalah suatu matriks yang tidak mempunyai suatu barisan bilangan 0.

Dari (Anton, Howard. 1992. halaman 74) telah dijelaskan bahwa "Jika bentuk eselon baris tereduksi R dari suatu Matriks Bujur Sangkar tidak mempunyai baris yang seluruh elemennya terdiri dari bilangan 0, maka Matriks R haruslah merupakan Matriks Satuan (I). Dari pernyataan tersebut dapat diketahui bahwa $R \approx I$, sehingga Matriks Bujur Sangkar A adalah matriks yang ekuivalen baris terhadap I. Dari sini dapat disimpulkan bahwa Matriks Bujur Sangkar A adalah Matriks Bujur Sangkar yang mempunyai invers.

Untuk menentukan invers dari sebuah matriks, dapat dilakukan antara lain dengan metode berikut :

1. Metode Matriks Adjoint

   Dengan diketahui A adalah Matriks Nonsingular berukuran n, maka invers sebuah Matriks A dapat ditentukan dengan rumus :

   $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adjoint } A$$

2. Metode Operasi Baris (Gauss – Jordan)

   Dengan mempertimbangkan matriks yang dipartisi $(A|I)$, di mana A adalah nonsingular. Dengan mengalikan sebelumnya matriks ini dengan A^{-1}, dapat diperoleh :

   $$(A^{-1} A | A^{-1} I) = (I | A^{-1})$$

   Jadi dengan melakukan operasi baris, Matriks Nonsingular A diubah menjadi I dan I diubah ke A^{-1}.