BAB II

MATERI PENUNJANG

Sebelum membahas lebih jauh tentang bahasan utama dalam Tugas Akhir ini, akan diterangkan lebih dulu materi penunjang yang berkaitan dengan bahasan utama tersebut. Diantaranya adalah Matrik, Sistim Persamaan Linier, Persamaan Regresi Linier Berganda, dan Multikolinieritas.

2.1. Matrik

Matrik adalah susunan berbentuk segi empat yang dibatasi tanda kurung siku [ ], kurung biasa ( ), dan bentuk ‖ ‖ dengan elemen-elemen yang tersusun dalam m baris dan n kolom.

Secara umum matrik dengan m baris dan n kolom disebut matrik order $m \times n$ dan dinyatakan dalam bentuk:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jika A adalah matrik order $m \times n$ maka transposenya adalah $\mathbf{A}'$, yang merupakan matrik order $n \times m$, yaitu:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1

Matrik A dikatakan telah dipartisi jika matrik A dipecah menjadi submatrik-submatrik dengan memberi sekat garis horisontal diantara dua baris dan/atau garis vertikal diantara dua kolom

Contoh 2.1

Misalkan matrik **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 10 & 9 & -7 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ dapat dipartisi menjadi}$$

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 8 \\ 10 & 9 & -7 \\ \hline 7 & 4 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{P} & \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{Q} & \mathbf{S} \end{array}\right]$$

dengan :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 9 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2

Jika **A** dan **B** adalah matrik bujursangkar $n \times n$ sedemikian hingga $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ maka **B** disebut invers dari **A** (dinotasikan dengan $\mathbf{A}^{-1}$) dan **A** disebut invers dari **B** (dinotasikan dengan $\mathbf{B}^{-1}$).

Contoh 2.2

Misalkan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{dan } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

maka **A** adalah invers dari **B** dan **B** adalah invers dari **A.**

Definisi 2.3

Operasi-operasi berikut disebut transformasi elementer pada suatu matrik **A**:

1. Pertukaran baris ke-i dengan baris ke-r , dinotasikan dengan $H_{ir}(\mathbf{A})$ atau,

   Pertukaran kolom ke-j dengan kolom ke-s, dinotasikan dengan $K_{js}(\mathbf{A})$

2. Perkalian setiap elemen baris ke-i dengan skalar k tidak nol, dinotasikan dengan $H_i^{(k)}(\mathbf{A})$ atau,

   Perkalian setiap elemen kolom ke-j dengan skalar k tidak nol, dinotasikan dengan $K_j^{(k)}(\mathbf{A})$

3. Penambahan pada elemen-elemen baris ke-i dengan k kali elemen-elemen padanannya dari baris ke-r, dinotasikan dengan $H_{ir}^{(k)}(\mathbf{A})$ atau,

   Penambahan pada elemen-elemen kolom ke-j dengan k kali elemen-elemen padanannya dari kolom ke-s, dinotasikan dengan $K_{js}^{(k)}(\mathbf{A})$

Transformasi pada pernyataan pertama masing-masing operasi disebut operasi baris elementer sedangkan pada pernyataan kedua dari masing-masing operasi disebut operasi kolom elementer.

Invers dari suatu matrik bujursangkar **A** dapat dicari dengan menggunakan operasi baris/kolom elementer. Caranya dengan mentransformasikan matrik **A** menjadi matrik identitas **I** melalui operasi baris/kolom elementer. Lalu dengan urutan operasi baris/kolom elementer yang sama, matrik **I** diubah menjadi $\mathbf{A}^{-1}$.

Untuk memudahkan, matrik **A** dan **I** dibuat dalam satu matrik (disebut matrik augmented) yaitu $\left[\mathbf{A}\middle|\mathbf{I}\right]$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

Sedangkan matrik hasil transformasi adalah $\left(\mathbf{I}\middle|\mathbf{A}^{-1}\right)$... atau

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \cdots & \overline{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}_{n1} & \overline{a}_{n2} & \cdots & \overline{a}_{nn} \end{array}\right]$$

Contoh 2.3

Misalkan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan matrik identitasnya } \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

akan dicari invers dari **A**.

Misalkan matriks yang diperbesar untuk **A** dan **I** adalah $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$

dengan transformasi elementer baris akan diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{H_{21}^{(-4)}} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -5 & -4 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[H_2^{(2)}]{H_1^{(5)}} \left[\begin{array}{cc|cc}5 & 10 & 5 & 0\\ 0 & -10 & -8 & 2\end{array}\right] \xrightarrow{H_{21}}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}5 & 0 & -3 & 2\\ 0 & -10 & -8 & 2\end{array}\right] \xrightarrow[H_2^{(-1/10)}]{H_1^{(1/5)}} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -3/5 & 2/5\\ 0 & 1 & 4/5 & -1/5\end{array}\right]$$

Jadi invers dari **A** adalah matrik yang terdapat di sebelah kanan tanda pemisah:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4

Matrik segitiga atas (*upper triangular*) adalah matrik bujursangkar yang semua emelen dibawah diagonal utama = 0. Dengan perkataan lain, **A** adalah matrik segitiga atas (*upper triangular*) jika $a_{ij} = 0$, untuk $i > j$.

Contoh 2.4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$ adalah matrik segitiga atas

Definisi 2.5

Rank baris dari matrik **A** adalah dimensi dari ruang baris matrik **A**. Rank kolom dari matrik **A** adalah dimensi ruang kolom matrik **A**. Karena rank baris = rank kolom, maka rank matrik **A** didefinisikan sebagai harga rank baris = rank kolom dari matrik **A** tersebut, dinotasikan dengan r(**A**).

Rank dari matrik menyatakan jumlah maksimum vektor-vektor baris/kolom yang bebas linier. Karena matrik-matrik yang ekivalen baris/kolom mempunyai ruang yang sama, maka untuk mencari rank dari suatu matrik dapat digunakan transformasi elementer. Diusahakan untuk dapat mengubah sebanyak mungkin baris/kolom menjadi vektor nol.

Contoh 2.5

Cari rank dari $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Akan dikerjakan secara baris:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_{31}^{(-3)}]{H_{21}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{32}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

terlihat baris ke-3 adalah vektor nol, jadi r($\mathbf{A}$) = 2

Definisi 2.6

Dua matrik $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ disebut ekivalen apabila salah satunya diperoleh dari yang lain dengan transformasi elementer terhadap baris dan atau kolom. Kalau transformasi-transformasi elementernya pada baris saja, dikatakan ekivalen baris. Sebaliknya, kalau pada kolom saja dikatakan ekivalen kolom.

Contoh 2.6

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ adalah ekivalen baris.

Ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

matrik $\mathbf{B}$ diperoleh dari operasi elementer baris pada matrik $\mathbf{A}$, yaitu pertukaran baris-1 dengan baris-2.

Sehingga $\mathbf{B} = H_{12}(\mathbf{A})$.

Definisi 2.7

Matrik simetri $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ dikatakan semi definit positif jika $\mathbf{x'Ax} \geq 0$, untuk semua $\mathbf{x} \in R^n$

Contoh 2.7

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Misal diambil $\mathbf{x'} = [c_1 \quad c_2]$

maka:

$$\mathbf{x'Ax} = [c_1 \quad c_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$= [c_1 \quad c_2]\begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} = (c_1 + c_2)^2 > 0$$

pada kasus $c_1 = -c_2$ dan $c_1 \neq 0$, maka diperoleh $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ tetapi $\mathbf{x} \neq 0$

sehingga diperoleh $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$.

2.2. SISTIM PERSAMAAN LINIER

Definisi 2.8

Bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ adalah sebuah persamaan linier.

dengan:

a_i dan b adalah skalar, dimana a_i disebut koefisien dan b disebut konstanta .

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ disebut variabel.

Sekumpulan harga dari variabel, katakanlah $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \cdots, x_n = k_n$ disebut solusi dari persamaan, apabila terpenuhi:

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n = b$$

jawab/solusi diatas dapat ditulis dalam notasi vektor $[k_1, k_2, \cdots, k_n]$ dan disebut jawab/solusi vektor dari persamaan linier.

Contoh 2.8

Persamaan $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$.

Harga-harga $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$ adalah suatu solusi,

karena $2.0 + 3.1 + 1.2 = 5$, dan dapat ditulis $[0,1,2]$.

Persamaan dalam **Contoh 2.8** dapat mempunyai lebih dari satu solusi, karena ternyata jika diambil $[0,0,5]$, $[2,0,1]$ dan vektor yang lain lagi, merupakan jawab/solusi untuk persamaan linier diatas.

Misal kita mempunyai persamaan linier sebanyak *m*, sehingga diperoleh bentuk persamaan:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.1}$$

a_{ij} dan b_j masing-masing adalah koefisien-koefisien dan konstanta persamaan-persamaan linier tersebut. Dengan notasi perkalian matrik, bentuk diatas dapat ditulis dengan $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, dengan:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

dengan melihat ruas kanan (nilai b_j) dari **persamaan (2.1)**, sistim persamaan linier dapat digolongkan menjadi:

- Persamaan Linier Homogen

  Jika ruas kanan/ harga b_j adalah nol

- Persamaan Linier Non-Homogen

  Jika ruas kanan/ harga b_j adalah tidak nol

Penyelesaian Sistim Persamaan Linier

Sesuai dengan bahasan dalam tugas akhir ini, maka yang akan dibahas pada sub bab ini adalah Persamaan Linier Non-Homogen, yaitu persamaan linier dengan harga ruas kanan/ b_j tidak nol.

Teorema 2.9

Suatu susunan persamaan linier akan mempunyai jawab apabila *rank matrik koefisien = rank matrik lengkap* atau apabila r(**A**)=r(**A**,**B**)

Matrik lengkap (**A**,**B**) adalah matrik:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{bmatrix}$$

Pembuktian:

Persamaan (2.1) dapat ditulis kembali sebagai:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

atau $A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = B$ dimana $A_1, A_2, \cdots A_n$ adalah vektor kolom dari **A**. Persoalannya adalah mencari $x_1, x_2, \cdots x_n$ yaitu skalar-skalar yang memenuhi persamaan (2.2). Kalau ada, maka B haruslah merupakan kombinasi linier dari $A_1, A_2, \cdots A_n$. Dengan perkataan lain, banyak vektor-vektor kolom yang bebas linier antara $A_1, A_2, \cdots A_n$ sama dengan banyak vektor-vektor kolom yang bebas linier antara $A_1, A_2, \cdots A_n, B$ atau B harus di dalam ruang kolom dari matrik **A**. Jadi r(**A**) = r(**A**,**B**).

Dalam suatu kasus, dimana jumlah persamaan linier non-homogen sama dengan jumlah variabel (m=n), maka sistem persamaan linier non-homogen tersebut akan mempunyai suatu jawab/solusi tunggal, jika r(**A**) = r(**A**,**B**) = n.

Persamaan linier non-homogen dengan m=n dapat disajikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

matrik lengkap (**A**,**B**) dapat disajikan dengan:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

dengan mereduksi bentuk matrik lengkap diatas menggunakan operasi elementer baris, maka akan diperoleh matrik:

$$\begin{bmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \cdots & \overline{a}_{1n} & \overline{b}_1 \\ 0 & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{2n} & \overline{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{a}_{nn} & \overline{b}_n \end{bmatrix}$$

terlihat bahwa r(**A**,**B**)=n, sehingga kita tetap mempunyai n persamaan linier non-homogen yang bebas linier. Dengan cara substitusi, dapat kita tentukan skalar-skalar yang menjadi solusi dari sistem persamaan linier non-homogen yang disajikan dalam **persamaan (2.3)**.

Contoh 2.10

Misalkan diberikan sebuah persamaan linier non-homogen sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11 \end{aligned}$$

Matrik lengkapnya adalah $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 11 \end{bmatrix}$

akan diselesaikan dengan operasi elementer baris.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}^{(-3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

jika kita susun kembali persamaan linier diatas pada matrik lengkap hasil operasi elementer baris, maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 &= 4 \\ -x_2 &= -1 \end{aligned}$$

dengan melakukan substitusi nilai x_2 terhadap persamaan diatasnya, maka akan diperoleh harga untuk x_1. Sehingga solusi tunggal untuk persamaan linier non-homogen dalam contoh ini adalah [3,-1].

2.3. Persamaan Regresi Linier Berganda

Model persamaan regresi linier berganda dapat disajikan dalam bentuk persamaan umum:

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_{1j} + \beta_2 X_{2j} + \ldots + \beta_p X_{pj} + \varepsilon_j \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \qquad (2.5)$$

yang dapat ditulis secara ringkas dalam notasi matrik

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.6)$$

dan dalam bentuk matrik adalah

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{P1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{P2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \qquad \mathbf{X} \qquad \beta + \varepsilon$$

$$n \times 1 \qquad n \times (p+1) \qquad (p+1) \times 1 \quad n \times 1$$

dengan β adalah suatu vektor kolom $(p+1)$ unsur dari penaksir koefisien regresi dan ε adalah suatu vektor kolom $(n \times 1)$ dari n residual.

Persamaan regresi linier yang disajikan dalam **persamaan (2.5)** dengan asumsi bahwa error (ε_j) didistribusikan secara normal dengan:

Rata-rata : $E(\varepsilon_j) = 0$

Varians : $E(\varepsilon_j^2) = \sigma^2$

Cov $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$: $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$

Asumsi ini secara ringkas dapat dinyatakan sebagai:

$$\varepsilon \sim NID(0,\sigma^2)$$

Metode Kuadrat Terkecil

Dengan metode ini, koefisien regresi diperoleh dengan meminimumkan kuadrat error :

$$\sum \varepsilon_j^2 = \sum \left(Y_j - \beta_0 - \beta_1 X_{1j} - \cdots - \beta_p X_{pj}\right)^2 \qquad (2.7)$$

dengan $\sum \varepsilon_j^2$ adalah jumlah kuadrat residual (*residual sums squares* - RSS).

Dalam notasi matrik, meminimumkan $\sum \varepsilon_j^2$ sama dengan meminimumkan $\varepsilon'\varepsilon$, karena:

$$\varepsilon'\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 = \sum \varepsilon_j^2$$

Untuk memperoleh taksiran (estimasi) $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_p$ dengan $\sum \varepsilon_j^2$ sekecil mungkin, dilakukan dengan cara menurunkan/mendifferensialkan secara parsial persamaan (2.7) terhadap $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p$ dan menyamakan hasil yang diperoleh dengan nol.

$$\frac{\partial \sum \varepsilon_j}{\partial \beta_0} = -2\sum \left(Y_j - \beta_0 - \sum \beta_j X_{ij}\right) \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial \sum \varepsilon_j}{\partial \beta_j} = -2\sum\left(Y_j - \beta_0 - \sum \beta_j X_{ij}\right)\left(X_{ij}\right) \qquad (2.9)$$

Proses ini akan menghasilkan $(p+1)$ persamaan normal dalam $(p+1)$ variabel, yang disebut persamaan normal teori kuadrat terkecil. Persamaan normal yang diperoleh adalah:

$$\begin{aligned}
n\beta_0 + \beta_1\sum X_{1j} + \beta_2\sum X_{1j} + \cdots + \beta_p\sum X_{pj} &= \sum Y_j \\
\beta_0\sum X_{1j} + \beta_1\sum X_{1j}^2 + \beta_2\sum X_{1j}X_{2j} + \cdots + \beta_p\sum X_{1j}X_{pj} &= \sum X_{1j}Y_j \\
\beta_0\sum X_{2j} + \beta_2\sum X_{21}X_{1j} + \beta_3\sum X_{2j}^2 + \cdots + \beta_p\sum X_{3j}X_{pj} &= \sum X_{2j}Y_j \qquad (2.10)\\
\cdots \\
\beta_0\sum X_{pj} + \beta_2\sum X_{pj}X_{1j} + \beta_3\sum X_{pj}X_{2j} + \cdots + \beta_p\sum X_{pj}^2 &= \sum X_{oj}Y_j
\end{aligned}$$

Penggunaan notasi matrik akan terasa lebih mudah. Untuk itu akan dicari vektor taksiran kuadrat terkecil untuk β yang meminimumkan fungsi jumlah kuadrat error dengan pendekatan matrik, yaitu:

$$\begin{aligned}
\sum \varepsilon_j^2 &= \varepsilon'\varepsilon \\
&= (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \\
&= Y'Y - \beta'X'Y - Y'X\beta + \beta'X'X\beta \\
&= Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta
\end{aligned}$$

karena $\beta'X'Y$ adalah skalar, maka $(\beta'X'Y)' = Y'X\beta$ adalah merupakan skalar yang sama.

Estimasi kuadrat terkecil harus memenuhi:

1. $\frac{\partial \varepsilon' \varepsilon}{\partial \beta} = 0$,

Agar supaya taksiran β meminimumkan $\varepsilon'\varepsilon$, maka dapat ditunjukkan:

$$\frac{\partial \varepsilon' \varepsilon}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'X\beta \qquad (2.11)$$

dengan menyamakan turunan pertama sama dengan nol, maka diperoleh taksiran β yang meminimumkan $\varepsilon'\varepsilon$. Sehingga dapat ditunjukkan:

$$-2X'Y + 2X'X\beta = 0$$

$$X'Y = X'X\beta$$

$$(X'X)\beta = X'Y \qquad (2.12)$$

persamaan ini disebut persamaan normal kudrat terkecil. Untuk ,mencari penyelesaian β, kedua ruas dikalikan dengan invers $(X'X)$,

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \text{, asalkan inversnya ada.} \qquad (2.13)$$

2. $\frac{\partial^2 (\varepsilon' \varepsilon)}{\partial \beta^2} > 0$, dengan menurunkan sekali lagi **<u>persamaan (2.11)</u>** maka diperoleh turunan kedua:

$$\frac{\partial^2 (\varepsilon' \varepsilon)}{\partial \beta^2} = 2X'X \qquad (2.14)$$

matrik $X'X$ adalah matrik yang diperoleh dari persamaan normal kuadrat terkecil untuk ruas kiri dan menghilangkan persamaan terakhir. Elemen-

elemennya merupakan hasil jumlah kuadrat dan hasil kali yang merupakan matrik simetris dengan elemen diagonal positif. Maka dapat dikatakan $2X'X > 0$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\hat{\beta}$ adalah estimator tak bias, jika terpenuhi $E(\hat{\beta}) = \beta$.

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \qquad \text{dari } \underline{\textbf{persamaan (2.13)}}$$

$$= (X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon)$$

$$= (X'X)^{-1}(X'X\beta) + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

$$= \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

$$E(\hat{\beta}) = E\left[\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]$$

$$= E(\beta) + (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon)$$

$$= \beta$$

Kemudian estimator β mempunyai variansi minimum:

$$Var(\beta) = E[(\beta - E(\beta))(\beta - E(\beta))']$$

$$= E\left[(\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon - \beta)(\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon - \beta)'\right]$$

$$= E\left[((X'X)^{-1}X'\varepsilon)((X'X)^{-1}X'\varepsilon)'\right]$$

$$= E\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}\right]$$

$$= (X'X)^{-1}E(\varepsilon\varepsilon')$$

$$= (X'X)^{-1}\sigma^2$$

Untuk menunjukkan bahwa $\beta = (X'X)^{-1}X'Y$ mempunyai variansi minimum, akan digunakan Teorema Gauss-Markov:

Bukti:

Misal $\hat{\beta}^*$ adalah estimator linier lain dari β yang tak bias. Karena $\hat{\beta}^*$ adalah estimator linier, maka dapat dimisalkan:

$$\hat{\beta}^* = \left[(X'X)^{-1}X' + U\right]Y \qquad (2.15)$$

untuk suatu matrik U yang merupakan fungsi dari X, sehingga nilai estimasi untuk $\hat{\beta}^*$ dapat diberikan:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\hat{\beta}^*) &= \left[(X'X)^{-1}X' + U\right]\mathrm{E}(Y) \\ &= \left[(X'X)^{-1}X' + U\right](X\beta) \\ &= \beta + UX\beta \\ &= (1 + UX)\beta \end{aligned}$$

agar $\hat{\beta}^*$ menjadi estimator tak bias, maka UX=0 sehingga:

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}^*) &= \left[((X'X)X' + U)Var(Y)(U' + X(X'X)^{-1}\right] \\ &= \sigma^2\left[(X'X)X'U' + UU' + (X'X)^{-1} + UX(X'X)^{-1}\right] \end{aligned}$$

karena $UX = X'U' = 0$, maka:

$$Var(\hat{\beta}^*) = \sigma^2\left[(X'X)^{-1} + UU'\right] \qquad (2.16)$$

matrik UU' adalah semi definit positif, karena unsur diagonal berbentuk kuadrat, jadi terbukti bahwa variansi dari vektor $\hat{\beta}^*$ selalu lebih besar atau sama dengan variansi $\hat{\beta}$ yang sesuai.

2.4. Multikolinieritas

Berkaitan dengan pembahasan pada BAB III, maka ditambahkan asumsi pada model regresi yang diambil adalah non-multikolinieritas, yang berarti tidak terdapat hubungan linier yang pasti antara variabel bebasnya. Untuk mendeteksi ada atau tidaknya hubungan linier yang pasti antara variabel bebasnya, dapat digunakan nilai VIF (*variance inflation factor*) dan Uji t terhadap koefisien korelasi antara variabel bebas tersebut. (Singgih Santoso, 2000)

Menggunakan nilai VIF dapat dinyatakan jika VIF mempunyai nilai di atas 10, maka dapat dikatakan tidak terjadi multikolinieritas. (Montgomery & A Peck, 1992).

Prosedur uji t dapat dilakukan setelah kita mendapatkan harga-harga koefisien korelasi antara variabel bebasnya. Nilai statistik t diperoleh dengan rumus:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \tag{2.17}$$

dengan:

r = koefisien korelasi antara dua variebel bebasnya

n = jumlah data

Rumusan hipotesanya adalah:

$H_0 : \rho = 0$ (tidak ada korelasi)

$H_1 : \rho \neq 0$ (ada korelasi)

Pengambilan keputusan terhadap hipotesis dilakukan dengan membandingkan nilai t dengan nilai t_{tabel}. Nilai t_{tabel} diperoleh berdasarkan tabel distribusi t, dengan tingkat ketelitian α dan derajat kebebasan (n-2). Lebih jelasnya kriteria pengambilan keputusan dapat dijelaskan sebagai berikut:

- jika $t > t_{tabel}$, maka H_0 ditolak - H_1 diterima.

  Artinya ada korelasi antara variabel bebas.

- jika $t < t_{tabel}$, maka H_0 diterima - H_1 ditolak.

  Artinya tidak ada korelasi antara variabel bebas.