2.1. RELASI TERURUT PARSIAL

Definisi 1 :

Relasi terurut parsial adalah relasi biner yang memenuhi sifat refleksif, anti simetris dan transitif.

Contoh :

1. A = Himpunan bilangan bulat positif.

   R = {(a,b)| a membagi habis b, a,b $\in$ A}, R adalah relasi terurut parsial sebab :

   1. Refleksif dipenuhi sebab a membagi habis dirinya sendiri ditunjukkan adanya elemen (a,a).
   2. Anti simetris dipenuhi sebab jika a membagi habis b belum tentu b membagi habis a kecuali a=b.
   3. Transitif dipenuhi sebab jika a membagi habis b dan b membagi habis c maka a membagi habis c.

2.1.1. PASANGAN TERURUT

Pasangan terurut ganda dua atau singkatnya pasangan terurut (ordered pair) ialah pasangan unsur-unsur atau elemen-elemen yang ditata menurut aturan tertentu. Pasangan terurut terdiri atas dua buah elemen katakan a dan b, dengan salah satunya katakan a ditetapkan sebagai elemen pertama dan yang lainnya sebagai elemen kedua, yang

Hal yang perlu diperhatikan pada pasangan terurut :

1. Urutan kedua elemen dalam suatu pasangan terurut adalah berbeda.

   Contoh :

   Di antara semua pemain dalam sebuah turnamen tenis, pasangan terurut (a,b) menyatakan juara pertama dan juara kedua dalam turnamen tersebut. Ini berarti bahwa pasangan terurut (a,b) tidak sama dengan pasangan terurut (b,a).

2. Kedua elemen dalam suatu pasangan terurut tidak harus berbeda.

   Contoh :

   Di antara semua mahasiswa di suatu kelas, pasangan terurut (a,b) menyatakan mahasiswa yang memperoleh nilai tertinggi dalam dua ujian. Jadi pasangan (a,a) berarti mahasiswa a memperoleh nilai tertinggi dalam kedua ujian itu.

Pasangan terurut ganda-n merupakan suatu himpunan terurut dengan n unsur. Komponen pertamanya terdiri atas (n-1) unsur dan komponen kedua adalah unsur ke-n.

2.1.2. HIMPUNAN TERURUT PARSIAL

Himpunan terurut parsial adalah himpunan yang dihasilkan oleh relasi pengurutan parsial dan dilambangkan dengan parsial.

2.2. KISI

Definisi 2 :

Suatu himpunan terurut parsial dinamakan kisi jika setiap dua unsur didalam himpunan itu mempunyai satu dan hanya satu batas atas terkecil dan satu dan hanya satu batas bawah terbesar.

Contoh :

1. $S = \{a,b,c\}$, $R = \{(A,B) \mid A \subseteq B,\ A,B \subseteq S\}$

   R adalah kisi sebab :

Gambar 1 Gambar Kisi R

V	{a,b,c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a}	{b}	{c}	∅
{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}
{a,b}	{a,b,c}	{a,b}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b}	{a,b}	{a,b,c}	{a,b}
{a,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,c}	{a,b,c}	{a,c}	{a,b,c}	{a,c}	{a,c}
{b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{b,c}	{a,b,c}	{b,c}	{b,c}	{b,c}
{a}	{a,b,c}	{a,b}	{a,c}	{a,b,c}	{a}	{a,b}	{a,c}	{a}
{b}	{a,b,c}	{a,b}	{a,b,c}	{b,c}	{a,b}	{b}	{b,c}	{b}
{c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,c}	{b,c}	{a,c}	{b,c}	{c}	{c}
∅	{a,b,c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{c}	{b}	{c}	∅

dari S adalah gabungan (union) kedua himpunan bagian tersebut, sedang untuk meet dua himpunan bagian dari S adalah irisan kedua himpunan bagian tersebut. Sehingga terlihat bahwa R adalah kisi yaitu himpunan terurut parsial dan setiap dua elemen hanya mempunyai satu dan hanya satu batas atas terkesil dan batas bawah terbesar.

2. $P = \{x \mid a \leq x \leq b,\ a \leq b,\ a,b \in R\}$, P adalah kisi sebab :
   1. Kelipatan persekutuan terkecil dari a dan b merupakan batas atas terkecil himpunan tersebut.
   2. Pembagi persekutuan terbesar dari a dan b merupakan batas bawah terbesar himpunan tersebut.

2.3. SISTEM ALJABAR

Misalkan $(A,\leq)$ sebuah kisi. Sebuah sistem aljabar $(A,\vee,\wedge)$, dengan $\wedge$ dan $\vee$ adalah dua operasi biner pada A sedemikian rupa sehingga untuk a dan b di dalam A, $a \vee b$ sama dengan batas atas terkecil bagi a dan b, dan $a \wedge b$ sama dengan batas bawah terbesar bagi a dan b. Untuk selanjutnya kita akan menamakan $(A,\vee,\wedge)$ dengan sistem aljabar yang didefinisikan oleh kisi $(A,\leq)$. Operasi biner $\vee$ seringkali dinamakan operasi join sedang operasi $\wedge$ sering dinamakan operasi meet.

join (V)

V	a	b
a	a	a
b	a	b

meet (^)

^	a	b
a	a	b
b	b	b

2.4. KISI MENYEBAR

Definisi 3 :

Suatu kisi dinamakan kisi menyebar bila operasi meet menyebar terhadap operasi join dan operasi join menyebar terhadap operasi meet.

Atau untuk sebarang a,b dan c

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

2.5. BATAS BAWAH UNIVERSAL

Definisi 4 :

Suatu unsur a di dalam kisi $(A,\leq)$ dinamakan batas bawah universal (universal lower bound) jika untuk setiap unsur $b \in A$, $a \leq b$.

Dengan demikian, jika suatu kisi mempunyai batas bawah universal, batas itu tunggal. Sebab jika ada dua batas bawah universal a dan b, maka :

$a \leq b$ dan $b \leq a$

yang berimplikasi $a = b$.

Definisi 5 :

Suatu unsur a di dalam kisi $(A,\leq)$ dinamakan batas atas universal (universal upper bound) jika untuk setiap unsur $b \in A$, $b \leq a$, yang juga bersifat tunggal.

2.7. LAMBANG BATAS SUATU KISI

Definisi 6 :

a. Lambang 0 menyatakan batas bawah universal yang identik bagi operasi meet $(\wedge)$.

b. Lambang 1 menyatakan batas atas universal yang identik bagi operasi join (V).

2.8. KISI TERKOMPLEMEN (COMPLEMENTED LATTICE)

Definisi 7 :

Sebuah kisi dinamakan kisi terkomplemen jika setiap unsur didalam kisi ini memiliki komplemen.

Suatu unsur a di dalam A, suatu unsur b dinamakan komplemen bagi a di dalam suatu kisi $(A,\leq)$ jika

$$a \vee b = 1 \text{ dan } a \wedge b = 0$$

untuk batas bawah universal 0 dan batas atas universal 1. Berdasarkan sifat komutasi, jika a adalah komplemen b maka b juga komplemen a.

Definisi 8 :

Kisi yang menyebar dan terkomplementasi dinamakan kisi boolean (boolean lattice).

2.10. ALJABAR BOOLEAN

Misalkan $(A,\leq)$ adalah kisi boolean. Karena setiap unsur di dalam suatu kisi boolean mempunyai komplemen yang tunggal, dapat didefinisikan suatu operasi uner pada A, dilambangkan $\bar{\ }$, sedemikian rupa sehingga untuk setiap a di dalam A, $\bar{a}$ adalah komplemen bagi a. Operasi tersebut dinamakan operasi komplementasi. Dengan demikian dapat dikatakan kisi boolean $(A,\leq)$ mendefinisikan suatu sistem aljabar $(A,\vee,\wedge,\bar{\ })$, dengan $\vee$, $\wedge$ dan $\bar{\ }$ masing-masing adalah operasi join, meet dan komplementasi. Sehingga sistem aljabar yang didefinisikan oleh kisi boolean dinamakan aljabar boolean.

Definisi 9 :

Dua elemen aljabar boolean dapat didefinisikan sebagai $A_2 = \{0,1\}$.

2.11. EKSPRESI BOOLEAN

Definisi 10 :

Suatu ekspresi boolean di dalam aljabar boolean $(A,\vee,\wedge,\bar{\ })$ didefisikan sebagai berikut :

2. Setiap nama peubah adalah suatu ekspresi boolean.

3. Jika e_1 dan e_2 adalah ekspresi boolean, maka $\bar{e}_1$, $e_1 V e_2$, $e_1 \wedge e_2$ adalah ekspresi boolean.

Contoh :

$0Vx$, $((\overline{2\wedge 3})V(x_1 V\bar{x}_2))\wedge(\overline{x_1\wedge x_3})$ adalah ekspresi boolean di dalam aljabar boolean $(\{0,1,2,3\},V,\wedge,\bar{\ })$.

2.12. EKSPRESI BOOLEAN N PEUBAH

Misalkan $E(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ adalah sebuah ekspresi boolean n peubah di dalam suatu aljabar boolean $(A,V,\wedge,\bar{\ })$. Maksud pemberian nilai pada peubah-peubah $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ialah pemberian unsur-unsur di dalam A untuk menjadi nilai-nilai bagi peubah-peubah tersebut.

Sebagai misal, ekspresi boolean :

$$E(x_1,x_2,x_3) = (x_1 V x_2) \wedge (\bar{x}_1 V \bar{x}_2) \wedge (\overline{x_2}\wedge\bar{x}_3)$$

di dalam aljabar boolean $(\{0,1\},V,\wedge,\bar{\ })$, pemberian nilai-nilai $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0$ menghasilkan :

$$\begin{aligned} E(0,1,0) &= (0V1) \wedge (\bar{0}V\bar{1}) \wedge (\overline{1v0}) \\ &= 1 \wedge 1 \wedge 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Definisi 11 :

Suatu fungsi dari A^n ke A dinamakan fungsi boolean bila dapat dispesifikasikan oleh suatu ekspresi boolean n peubah. Cara untuk menspesifikasikan suatu fungsi dari A^n ke A adalah melalui sebuah ekspresi boolean $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, yaitu dengan memisalkan setiap pemberian nilai-nilai kepada peubah-peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ merupakan suatu pasangan terurut ganda-n (ordered n-tuple) di dalam daerah asal (domain) A^n, dan memisalkan nilai ekspresi $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah bayangannya di dalam daerah hasil (range) A.

Contoh :

Ekspresi boolean : $(\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$ didalam aljabar boolean $(\{0,1\}, \vee, \wedge, {}^{-})$ mendefinisikan fungsi f dalam tabel berikut :

(x_1, x_2, x_3)	$f(x_1, x_2, x_3)$
(0,0,0)	0
(0,0,1)	0
(0,1,0)	1
(0,1,1)	0
(1,0,0)	1
(1,0,1)	1
(1,1,0)	0
(1,1,1)	1

Dengan kata lain :

Definisi 12 :

Suatu fungsi boolean f didefinisikan sebagai suatu pemetaan :

$$f : A_2^{\,n} = A_2 \times \ldots \times A_2 \longrightarrow A_2,$$

yaitu suatu fungsi yang setiap peubah dan harganya pada A_2.

2.14. FUNGSI PSEUDO BOOLEAN

Pada prinsipnya fungsi pseudo boolean adalah identik dengan fungsi boolean, yaitu nilai dari setiap peubahnya berupa boolean, tetapi harga dari fungsinya berupa real. maka didefinisikan sebagai berikut :

Misalkan R adalah himpunan bilangan real, suatu fungsi pseudo boolean didefinisikan sebagai suatu fungsi :

$$f : A_2^{\,n} \longrightarrow R,$$

adalah suatu fungsi berharga real dengan peubah yang bivalent.

Contoh :

Diberikan fungsi pseudo boolean :

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2\ x_1\bar{x}_2 + 6\ x_1 x_3 + 5\ \bar{x}_2\bar{x}_3$$
$$= 2\ (x_1 \wedge \bar{x}_2)\ V\ 6\ (x_1 \wedge x_3)\ V\ 5\ (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)$$

misal diambil $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ dan $x_3 = 1$ maka :

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2\ (1 \wedge 0)\ V\ 6\ (1 \wedge 1)\ V\ 5\ (0 \wedge 0)$$
$$= 2.0\ V\ 6.1\ V\ 5.0$$
$$= 0\ V\ 6\ V\ 0$$
$$= 6\ V\ 0$$
$$= 6$$