2.1. Fungsi Distribusi

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai fungsi distribusi akan diberikan beberapa definisi sebagai berikut.

Definisi 2.1 :

Variabel acak adalah suatu fungsi dengan domain x dan kodomain bilangan real, yang memenuhi syarat untuk setiap bilangan real R terdapatlah kejadian K : { ω : $X(\omega) \leq R$ } ε x.} ε x.

Definisi 2.2 :

Himpunan dengan elemen pasangan $(x_i;p(x_i))$, i=1,2,3,... disebut distribusi kemungkinan atau distribusi x ; dimana $p(x_i) = P(X=x_i)$.

Definisi 2.3 :

Fungsi distribusi komulatif dari variabel acak X dinyatakan dengan $F_x(.)$ didefinisikan sebagai suatu fungsi dengan domain bilangan real dan kodomain [0,1] yang memenuhi untuk setiap bilangan real R berlaku

$$F_x(R) = P(X \leq R) = P(\{\omega : X(\omega) \leq R \})$$

Bila a < b ,maka $P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a \leq X \leq b)$

$$F(b) = F(a) + P(a \leq X \leq b).$$

Jadi $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

$$F_x(x) = \sum_{x_i \varepsilon x} P(X = x_i), \; i = 1,2,3,\ldots$$

Untuk distribusi waktu kontinu jika terdapat fungsi $f_x(.)$ sedemikian sehingga

$$F_x(X) = \int_{-\infty}^{X} f_x(u)\, du. \quad \text{atau}$$

$$F_x'(X) = f_x(X)$$

dimana fungsi padat X adalah turunan pertama dari fungsi distribusinya.

2.2. Ekspektasi Matematika

Bila X variabel acak yang kontinu dengan fungsi padat $f(X)$ maka

$$E[X] = \int_{\sim}^{\sim} X.f(X)\, dX \tag{2.1}$$

Dan untuk X variabel acak yang diskrit dengan suatu fungsi $h(x)$ yang domain dan kodomainnya bilangan real maka

$$E[h(x)] = \sum_{j=1}^{n} h(x)\; f_x(x_j) \tag{2.2}$$

Teorema 2.1 :

Sifat-sifat ekspektasi

1. $E[c] = c$ (2.3)
2. $E[cf_1(x)] = cE[f_1(x)]$ (2.4)
3. $E[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 E[f_1(X)] + c_2 E[f_2(x)]$ (2.5)
4. $E[f_1(x)] \le E[f_2(x)]$, jika $f_1(x) \le f_2(x)$ (2.6)

a. Untuk variabel x yang diskrit

1. $E[c] = \Sigma\ c\ f_x(x_i)$

$$= c\ \Sigma\ f_x(x_i) \longrightarrow \Sigma\ f_x(x_i) = 1$$

$$= c$$

2. $E[c f_1(x)] = \Sigma\ c\ f_1(x)\ f_x(x_i)$

$$= c\ \Sigma\ f_1(x)\ f_x(x_i)$$

$$= c\ E[f_1(x)]$$

3. $E[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]$

$$= \Sigma(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) f_x(x_i)$$

$$= \Sigma(c_1\ f_1(x)\ f_x(x_i) + c_2\ f_2(x)\ f_x(x_i))$$

$$= \Sigma(\ c_1\ f_1(x)\ f_x(x_i)) + \Sigma(\ c_2\ f_2(x)\ f_x(x_i))$$

$$= c_1\ \Sigma\ f_1(x)\ f_x(x_i) + c_2\ \Sigma\ f_2(x)\ f_x(x_i)$$

$$= c_1\ E[f_1(x)] +$$

$$c_2\ E[f_2(x)]$$

4. $f_1(x) \le f_2(x)$,untuk setiap x

$$f_1(x) f_x(x_i) \le f_2(x) f_x(x_i)$$

$$\Sigma\ f_1(x)\ f_x(x_i) \le \Sigma\ f_2(x)\ f_x(x_i)$$

$$E[f_1(x)] \le E[f_2(x)]$$

d. Jika x dalam waktu kontinu

1. $E[c] = \int_{-\infty}^{\infty} c\ f(x)\ dx$

$$\int^{\infty} f(x)\ dx = c \longrightarrow \int^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$= c \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\ f(x)\ dx$$

$$= c\ E[f_1(x)]$$

3. $E[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{c_1\ f_1(x)\ f(x) + c_2\ f_2(x)\ f(x)\}\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\ c_1\ f_1(x)\ f(x))\ dx + \int_{-\infty}^{\infty} (\ c_2\ f_2(x)\ f(x))\ dx$$

$$= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f(x)\ dx + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\ f(x)\ dx$$

$$= c_1\ E[f_1(x)] + c_2\ E[f_2(x)]$$

4. $f_1(x) \le f_2(x)$,untuk setiap x

$$f_1(x) f(x) \le f_2(x) f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\ f(x)\ dx \le \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\ f(x)\ dx$$

$$E[f_1(x)] \le E[f_2(x)]$$

2.3. Mean dan Kovarian

Mean dari variabel acak X didefinisikan sebagai

$$E[X] = \mu \qquad (2.7)$$

Sedang variansinya adalah :

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[X - E[X]]^2 \\ &= E[X^2 - 2XE[X] + X^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

sebagai :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \tag{2.9}$$

Jika $E[X] = \overline{X}$ dan $E[Y] = \overline{Y}$ maka

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})]$$

Dan apabila $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ dikatakan X dan Y tidak berkorelasi/tidak berhubungan atau dikatakan independen.

Sehingga

$$E[XY] = E[X].E[Y] \tag{2.10}$$

Teorema 2.2 :

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \,\mathrm{Cov}(X_i Y_j) \tag{2.11}$$

Bukti :

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right)$$

$$= E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i - E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i]] [\sum_{j=1}^{m} b_j Y_j - E[\sum_{j=1}^{m} b_j Y_j]]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i - \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]] [\sum_{j=1}^{m} b_j Y_j - \sum_{j=1}^{m} b_j E[Y_j]]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j X_i Y_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b E[X_i] Y_j$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j X_i E[Y_j] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j E[X_i] E[Y_j]]$$

$$= \sum_{i=}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j E[X_i Y_j - E[X_i] Y_j - X_i E[Y_j] + E[X_i] E[Y_j]]$$

$$= \sum_{i=}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \; E \; [X_i - E[X_i]][Y_j - E[Y_j]]$$

$$= \sum_{i=}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \; Cov(X_i, Y_j)$$

Catatan : $E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]$

Teorema 2.3 :

$$Var[\sum_{i=1}^{n} X] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + 2 \sum_{i,j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) \tag{2.12}$$

Bukti :

Sebelum membuktikan teorema diatas pandang persamaan berikut :

$$Var[X] = E[X-E[X]][X-E[X]] = Cov(X,X) \tag{2.13}$$

Dari persamaan (2.11) dan (2.13) maka

$$Var[\sum_{i=1}^{n} X_i] = Cov(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j)$$

$$= \sum_{i=}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

$$= Cov(X_1, X_1) + Cov(X_1, X_2) + Cov(X_1, X_3)$$

$$+ \ldots + Cov(X_k, X_l) + \ldots + Cov(X_n, X_n)$$

$$= \sum^{n} Cov(X_i, X_i) + \sum^{n} Cov(X_i, X_j)$$

Karena $Cov(X_i, X_j) = Cov(X_j, X_i)$, sehingga

$$Var[\sum_{i>j}^{n} X_i] = \sum_{i>j}^{n} Var[X_i] + 2 \sum_{i<j}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

(2.14)

Apabila $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ independen maka

$$Var[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]. \qquad (2.15)$$

Sedang koefisien korelasi dua variabel acak X dan Y didefinisikan sebagai

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var[X].Var(Y]}} \qquad (2.16)$$

jika X dan Y berkorelasi $|\rho_{xy}| \leq 1$, dan $\rho_{xy} = 0$ bhb X,Y tidak berkorelasi.

2.4. Proses Gauss

Proses gauss disebut juga proses normal dan variabel acak yang berdistribusi normal juga disebut berdistribusi gauss.

Secara umum fungsi kepadatan normal adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\tfrac{1}{2}\,\sigma^2(x - \mu_x) \qquad (2.17)$$

mempunyai distribusi normal gabungan atau distribusi gauss gabungan jika $a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$ berdistribusi normal untuk setiap pilihan konstanta $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Definisi 2.4 :

Suatu stokhastik $X(t)$, $t \in T$ dikatakan sebagai proses gauss bhb untuk setiap bilangan bulat positif n dan setiap pilihan $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, variabel acak $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ mempunyai distribusi normal gabungan .

Contoh :

Diketahui Z_1 dan Z_2 independen berdistribusi normal dengan mean = 0 dan varian = σ^2

$$X(t) = Z_1 \text{Cos } \lambda t + Z_2 \text{Sin } \lambda t \qquad , X(t), -\sim < t < \sim$$

adalah proses gauss.

Akan ditunjukkan $X(t)$ dengan pilihan $t_1, t_2, \dots, t_n$ berdistribusi normal gabungan.

Bukti :

Diketahui $E[Z_1] = 0$ dan $E[Z_2] = 0$

$X(t) = Z_1 \text{Cos } \lambda t + Z_2 \text{Sin } \lambda t$

Dan kombinasi linier variabel acak $X(t)$ adalah

$a_1X(t) + a_2X(t) + \dots + a_nX(t)$

$$= Z_1(a_1 \mathrm{Cos}\ \lambda t + \ldots + a_n \mathrm{Cos}\ \lambda t)$$

$$+ Z_2(a_1 \mathrm{Sin}\ \lambda t + \ldots\ldots + a_n \mathrm{Sin}\ \lambda t)$$

$$E[a_1X(t) + a_2X(t) + \ldots + a_nX(t)] =$$

$$E[Z_1(a_1\mathrm{Cos}\ \lambda t+\ldots+a_n\mathrm{Cos}\ \lambda t)+Z_2(a_1\mathrm{Sin}\ \lambda t+\ldots+a_n\mathrm{Sin}\ \lambda t)]$$

$$= E[Z_1](a_1\mathrm{Cos}\ \lambda t+\ \ldots\ +a_n\mathrm{Cos}\ \lambda t)+E[Z_2](a_1\mathrm{Sin}\ \lambda t+\ \ldots\ +$$

$$a_n\mathrm{Sin}\ \lambda t)] = 0$$

Karena Z_1 dan Z_2 independen dan berdistribusi normal ($E[Z] = 0$ dan varian $= \sigma^2$) maka $E[Z_1Z_2] = 0, E[Z_1^2] = E[Z_2^2] = \sigma^2$.

Sehingga

$$\mathrm{Var}[Z_1(a_1\mathrm{Cos}\lambda t+\ldots+a_n\mathrm{Cos}\lambda t)+Z_2(a_1\mathrm{Sin}\lambda t+\ldots+a_n\mathrm{Sin}\lambda t)]$$

$$= E[(Z_1(a_1\mathrm{Cos}\lambda t+\ldots+a_n\mathrm{Cos}\lambda t)+Z_2(a_1\mathrm{Sin}\lambda t+\ldots+a_n\mathrm{Sin}\lambda t))^2]$$

$$= E[Z_1^2(a_1\mathrm{Cos}\lambda t+\ldots+a_n\mathrm{Cos}\lambda t)^2+Z_2^2(a_1\mathrm{Sin}\lambda t+\ldots+a_n\mathrm{Sin}\lambda t)^2+$$

$$Z_1Z_2(a_1\mathrm{Cos}\lambda t+\ldots+a_n\mathrm{Cos}\lambda t)(a_1\mathrm{Sin}\lambda t+\ldots+a_n\mathrm{Sin}\lambda t)]$$

$$= E[Z_1^2](a_1\mathrm{Cos}\lambda t+\ldots+a_n\mathrm{Cos}\lambda t)^2$$

$$+ (E[Z_2^2](a_1\mathrm{Sin}\lambda t+\ \ldots\ + a_n\mathrm{Sin}\lambda t)^2)$$

$$+ E[Z_1Z_2](a_1\mathrm{Cos}\lambda t+\ldots+a_n\mathrm{Cos}\lambda t)(a_1\mathrm{Sin}\lambda t+\ldots+a_n\mathrm{Sin}\lambda t)$$

$$=\sigma^2(a_1\mathrm{Cos}\lambda t+\ldots+a_n\mathrm{Cos}\lambda t)+\sigma^2(a_1\mathrm{Sin}\lambda t+\ldots+a_n\mathrm{Sin}\lambda t)]$$

Jadi terbukti kombinasi linier $X(t)$ berdistribusi normal.

Fungsi densitas bersama dari X,Y adalah

$$q = \frac{1}{(1 + \rho^2)}\left[\left[\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right]^2 - 2\left[\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right]\left[\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right] + \left[\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right]^2\right]$$

dikatakan distriobusi normal bivariat dengan parameter μ_x, μ_y, σ_x^2, σ_y^2, ρ. Khusus untuk normal standar $\mu_x = \mu_y = 0$ dan $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$.

Fungsi pembangkit momennya diberikan oleh

$$M(t_1, t_2) = \exp\left(t_1\mu_x + t_2\mu_y + \frac{t_1^2\sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y t_1 t_2 + t_2^2\sigma_y^2}{2} \right)$$

Probabilitas orthant $P(X_1, X_2)$ dari fungsi $f(X_1 X_2)$ adalah

$$P(X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0) = \int_0^\infty\int_0^\infty f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \qquad (2.18)$$

dengan

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi(1 - \rho^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1^2 x_2^2 + x_2^2)\right]$$

X_1 dan X_2 berdistribusi normal bivariat dengan mean = 0 dan variansi = 1.

Ambil vektor $x = (x_1, x_2)$ dimana x' adalah tranpose dari vektor x dan $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ sehingga

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \mid \Sigma \mid^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}\ x'\ \Sigma^{-1} x)$$

Σ adalah simetris dan definit positif ketika $\mid \rho \mid < 1$

Dengan mengasumsikan :

$$\psi(u) = \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}\ u)$$

maka akan diperoleh densitas normal bivariat standar

$$f(x) = \mid \Sigma \mid^{-1/2} \psi(x' \Sigma^{-1} x)$$

yang definit positif disebut distribusi ellipsoidal atau distribusi simetri elliptika.

Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabel acak berdistribusi normal dan mempunyai fungsi densitas f, maka

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n)$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det \underset{\sim}{\Sigma})^{1/2}} \exp[-1/2(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})' \underset{\sim}{\Sigma}' (\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})']$$

dengan $\underset{\sim}{\Sigma}$ adalah matrik kovarian dengan

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} Cov(x_1,x_1) & Cov(x_1,x_2) & \ldots & Cov(x_1,x_n) \\ Cov(x_2,x_1) & Cov(x_2,x_2) & \ldots & Cov(x_2,x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Cov(x_n,x_1) & Cov(x_n,x_2) & \ldots & Cov(x_n,x_n) \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

mengingat bahwa $f(x) = \dfrac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-1/2 \left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$

maka kuantitas

$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = (x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)$$

akan diperluas untuk vektor $\underset{\sim}{X}$ berdimensi n menjadi

$$(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})(\underset{\sim}{\Sigma}^2)^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})$$

2.5. Pengertian Proses Stasioner

komplek, dengan indeks t, dimana t diambil dalam beberapa indeks himpunan T. Interval (~,~) disebut proses waktu kontinu sedang interval (...,-2,-1,0,1,2,...) disebut proses waktu diskrit.

Nilai real dari proses Z_t sebagai proses yang lambat membentang dalam waktu akan diselidiki dalam waktu tertentu sehingga menghasilkan suatu barisan dalam waktu diskrit dan sebuah fungsi dalam waktu kuntinu. Barisan dan fungsi tersebut merupakan suatu realisasi atau fungsi sampel atau rekaman waktu (time record). Koleksi dari semua kemungkinan kejadian disebut ensemble (pasangan).

Untuk beberapa koleksi dari n titik waktu $t_1<t_2<\dots<t_n$ distribusi probabilitas dari vektor random $(Z_{t_1},Z_{t_2},\dots,Z_{t_n})$ adalah

$$P(Z_{t_1} \le Z_{t_2} \le \dots \le Z_{t_n} \le z_n)$$

$f_{t_1}(z)$ adalah fungsi densitas probabilitas dari Z_{t_1} maka rata-rata (momen I) dari Z_{t_1} adalah

$$E[Z_{t_1}] = \int_{-\sim}^{\sim} z\, f_{t_1}(z)\, dz$$

diintepretasikan sebagai Average across ensemble pada waktu t.

Secara umum mean boleh dibedakan dari perbedaan titik waktu, jika didefinisikan $m(t) = E[Z_t]$, maka probabilitas gabungan dari (Z_{t_1}, Z_{t_2}).

Kemudian momen order kedua diberikan oleh ekspektasi :

$$E[Z_{t_1} Z_{t_2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_1 z_2 f(z_1, z_2)\, dz_1 dz_2$$

maka dengan mengingat bahwa Kovarian dari Z_{t_1} dan Z_{t_2} diberikan oleh :

$$\begin{aligned} Cov(Z_{t_1}, Z_{t_2}) &= E[(Z_{t_1} - E[Z_{t_1}])(Z_{t_2} - E[Z_{t_2}])] \\ &= E[Z_{t_1} Z_{t_2} - Z_{t_1} E[Z_{t_2}] - Z_{t_2} E[Z_{t_1}] + E[Z_{t_1}]E[Z_{t_2}]] \\ &= E[Z_{t_1} Z_{t_2}] - E[Z_{t_1}]E[Z_{t_2}] - E[Z_{t_2}]E[Z_{t_1}] + \\ &\quad E[Z_{t_1}]E[Z_{t_2}] \\ &= E[Z_{t_1} Z_{t_2}] - E[Z_{t_1}]E[Z_{t_2}] \qquad (2.19) \end{aligned}$$

Sehingga $Cov(Z_{t_1}, Z_{t_1}) = Var[Z_{t_1}]$

Fungsi $R_{(s-t)} = Cov(Z_s, Z_t)$ disebut kovarian atau fungsi autokovarian dari Z_{t_1} dan Z_{t_2}

Korelasi atau fungsi autokorelasi (ρ) didefinisikan dari fungsi kovarian normal

$$\rho_{(s,t)} = \frac{R_{(s,t)}}{\sqrt{R_{(s,s)} R_{(t,t)}}} \qquad (2.20)$$

Sehingga memenuhi

$\rho_{(t,s)} = \rho_{(s,t)}$ dan $|\rho(s,t)| \le \rho(t,t) = 1$.

Dengan cara yang sama dapat diperoleh momen order

$_1 \quad _2 \qquad _n$

Pada densitas probabilitas dimensional ke-n vektor random dari proses $(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n})$, kemudian

$$E[\varphi(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n})] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(z_1, z_2, \ldots, z_n) f_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(z_1, z_2, \ldots, z_n) dz_1 \ldots dz_n$$

Proses stokhastik $\{Z_t\}$ dikatakan proses stasioner sempurna jika distribusi gabungan / bersama dari $(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n})$ sama dengan distribusi gabungan dari $(Z_{t_1+\tau}, Z_{t_2+\tau}, \ldots, Z_{t_n+\tau})$, untuk semua $t_1, t_2, \ldots, t_n$, n, τ. Dengan kata lain selama jarak relatif antara titik-titik waktu tetap , distribusi gabungan tidak berubah.

Jadi jika order pertama ada, diambil $t = -\tau$ maka :

$$E[Z_t] = E[Z_{t+\tau}] = E[Z_0] = m$$

dengan m adalah konstanta.

Distribusi gabungan (Z_t, Z_s) dan $(Z_{t+\tau}, Z_{s+\tau})$ mempunyai distribusi yang sama pada t, s, τ dan dikatakan stasioner, diambil $\tau = -s$, jika momen order kedua ada maka

$$E[Z_t, Z_s] = E[Z_{t+\tau}, Z_{s+\tau}] = E[Z_{t-s}, Z_0] \qquad (2.21)$$

$$R_{(s,t)} = Cov(Z_t, Z_s) = R_{(s-t)} \qquad (2.22)$$

Fungsi autokovarian dari proses stasioner bernilai real adalah fungsi dari waktu lag (perbedaan waktu) τ.

$$\rho_{(\tau)} = \frac{R_{(\tau)}}{R_{(0)}} \qquad (2.25)$$

Autokorelasi adalah fungsi dari τ yang tunggal.

Autokorelasi $\rho_{(\tau)}$ adalah pengukuran korelasi antara $Z_{t+\tau}$ dan Z_t sebagai fungsi dari perbedaan indeks secara bebas dari t. $\rho_{(\tau)} = \rho_{(-\tau)}$ dan $| \rho_{(\tau)} | \le \rho_{(0)} = 1$.

Proses stasioner waktu diskrit selalu dikaitkan dengan R_k dan ρ_k, dimana $k = \ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$ dengan R_0 adalah varian dan ρ adalah autokorelasi order pertama.

Secara umum untuk stasioner sempurna dan eksistensi momen order tingkat yang lebih tinggi dapat dituliskan sebagai :

$$E[Z_t Z_{t+t_1} Z_{t+t_2}] = E[Z_0 Z_{t_1} Z_{t_2}] \qquad (2.26)$$

Dalam kasus real $R_k = R_{-k}$ adalah fungsi genap sehingga didefinisikan sebagai

$$R_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\lambda)\ F(d\lambda)$$

secara umum dalam waktu kontinu $R(\tau) = R(-\tau)$ sehingga

$$R_{(\tau)} = \int_{-}^{\sim} \cos(\tau\lambda)\ F(d\lambda)$$

Karena autokovarian adalah simetris, $f(\lambda) = f(-\lambda)$ maka ketika densitas spektral ada, $F(d\lambda)$ dapat dinyatakan dengan $f(\lambda)d\lambda$ sehingga

$$R_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\lambda) f(\lambda) d\lambda$$

dan untuk waktu kontinu juga berlaku :

(τ) $-\pi$

2.6. Formula Cosinus

Misalkan $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ adalah proses stasioner dengan mean nol dari suatu deret waktu.

Sebuah deret waktu biner $X_1, X_2, \ldots, X_n$ oleh transformasi non linier diberikan oleh :

$$X_t = \begin{cases} 1 & , \text{ jika } Z_t \geq 0 \\ 0 & , \text{ jika } Z_t < 0 \end{cases}$$

$\{X_t\}$ adalah deret stasioner yang disebabkan oleh Z_t.

Bilangan zero crossing dinyatakan dengan D, didefinisikan dalam hubungan dengan $\{X_t\}$ didefinisikan sebagai

$$D = \sum_{t=2}^{N} (X_t - X_{t-1})^2 \qquad (2.27)$$

Selanjutnya D dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut :

$$D = \sum_{t=2}^{N} I_{\{x_t \neq x_{t-1}\}} \qquad (2.28)$$

$$= \sum_{t=2}^{N} d_t \qquad (2.29)$$

maka D tergantung pada ukuran N, banyaknya D yang dihasilkan adalah 0, 1, 2, . . . , N-1. Batas atas adalah dalam X_1, X_2, ..., . X_N. Kemungkinan bilangan maksimum adalah N-1. Nilai zero crossing yang dihasilkan dinyatakan dengan $\hat{\gamma}$, diberikan oleh perbandingan

$$\hat{\gamma} = \frac{D}{N - 1} \tag{2.30}$$

Dua parameter penting yang dikelompokkan dengan deret waktu $\{X_t\}$ probabilitas p pada waktu t, dan probabilitas bersyarat λ_1 pada waktu t, diberikan pada saat $X_{t-1} = 1$, dapat ditulis sebagai

$$p = P(X_t = 1) \tag{2.31}$$

$$\lambda_1 = P(X_t = 1 \,|\, X_{t-1} = 1) \tag{2.32}$$

Sehingga

$$E[D] = 2p(N-1)(1-\lambda_1) \tag{2.33}$$

yang tergantung pada N sebagai syaratnya.

Dan kecepatan persilangan-nol yang diharapkan dinyatakan oleh

$$\begin{aligned} \gamma = E[\hat{\gamma}] &= \frac{E[D]}{N - 1} \\ &= 2p(1-\lambda_1) \end{aligned} \tag{2.34}$$

dimana γ tidak tergantung pada N.

Dan definisi dari D digunakan untuk menuliskan hubungan antara ρ_1 dan E[D] yaitu

$$\rho_1 = \cos\left(\frac{\pi\, E[D]}{N - 1}\right) \tag{2.35}$$

Andaikan distribusi dimensional berhingga dari $\{Z_t\}$ ditentukan oleh densitas ellipsoidal

$$f(x) = |\Sigma|^{-1/2}\ \psi\ (x'\Sigma^{-1}x)$$

eliptik.

Teorema 2.4 :

Misalkan Z_1, Z_2 variabel random dengan mean = 0, varian = 1, korelasi ρ. Z_1 dan Z_2 berdistribusi ellipsoidal bivariat dengan densitas

$f(z) = |\Sigma|^{-1/2}\ \psi\ (z'\Sigma^{-1}z)$

untuk beberapa matrik yang definit positif Σ maka

$$P(Z_1 \geq 0\ ,\ Z_2 \geq 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\sin^{-1}\rho$$

$$= \frac{\lambda_1}{2} \qquad (2.36)$$

Bukti :

Ambil suatu konstanta c > 0 sedemikian sehingga

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.c$$

$$u = \frac{z_1^2 + z_2^2 - 2\rho z_1 z_2}{c(1-\rho^2)}$$

oleh koordinat polar dengan transformasi $z_1 = r.\text{Cos}\ \theta$ dan $z_2 = r.\text{Sin}\ \theta$, maka

$$u = \frac{r^2.\text{Cos}^2\theta + r^2.\text{Sin}^2\theta - 2\rho r^2 \text{Cos}\ \theta.\text{Sin}\ \theta}{c(\ 1 - \rho^2\ )}$$

$$= \frac{r^2(\ 1 - \rho\ \text{Sin}\ 2\theta\ )}{c(\ 1 - \rho^2\ )}$$

$$P(Z_1 \geq 0, Z_2 \geq 0) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{c^2(1-\rho^2)}}\, \psi\left[\frac{z_1+z_2-2\rho z_1 z_2}{c(1-\rho^2)}\right] dz_1 dz_2$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{c^2(1-\rho^2)}}\, \psi\left[\frac{z_1+z_2-2\rho z_1 z_2}{c(1-\rho^2)}\right] dz_1 dz_2$$

$$= \sqrt{(1-\rho^2)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2(1-\rho\ \mathrm{Sin}\ 2\theta)} \int_0^{\infty} \psi(u)\ du$$

$$= \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ \mathrm{Sin}^{-1}\rho\right] \int_0^{\infty} \psi(u)\ du$$

dengan mengingat bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{c^2(1-\rho^2)}}\, \psi\left[\frac{z_1+z_2-2\rho z_1 z_2}{c(1-\rho^2)}\right] dz_1 dz_2 = 1$$

dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)\,du = \left(\sqrt{(1-\rho^2)} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2(1-\rho\mathrm{Sin}\ 2\theta)}\right)^{-1} = \frac{1}{\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2(1-\rho\mathrm{Sin}\ 2\theta)} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1-\rho\mathrm{Sin}\ 2\theta} + \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\rho\mathrm{Sin}\ 2\theta}$$

sedemikian sehingga akan diperoleh hasil akhir sebagai berikut :

$$P(Z_1 \geq 0, Z_2 \geq 0) = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ \mathrm{Sin}^{-1}\rho\right)\left(\frac{1}{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\ \mathrm{Sin}^{-1}\rho$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\ \mathrm{Sin}^{-1}\rho\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda_1)$$

$$= \frac{\lambda_1}{2}$$

Teorema 2.5 :

Ditinjau $\{Z_t\}$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ adalah sebuah

$\rho_1 = \mathrm{Cos}\left(\frac{\pi \ E[D]}{N - 1}\right)$ terpenuhi.

Bukti :

Dari definisi zero crossing D dan teorema 2.4 maka

$$E[D] = (N - 1)(1 - 2P(Z_k \geq 0, Z_{k-1} \geq 0))$$
$$= (N - 1)(1 - 2(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \mathrm{Sin}^{-1}\rho_1))$$
$$= (N - 1)(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \mathrm{Sin}^{-1}\rho_1)$$
$$E[D].(\frac{\pi}{N - 1}) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Sin}^{-1}\rho_1$$

maka

$$\mathrm{Cos}(E[D].(\frac{\pi}{N - 1})) = \mathrm{Cos}(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Sin}^{-1}\rho_1)$$
$$= \mathrm{Cos}(-\mathrm{Sin}^{-1}\rho_1)$$
$$= \mathrm{Sin}(\mathrm{Sin}\ \rho_1)$$
$$= \rho_1 \qquad (2.37)$$

Teorema 2.6 :

Ditinjau $\{Z_t\}$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ merupakan proses ellipsoidal stasioner dengan mean = 0 dan varian = 1, serta korelasi = ρ_k maka

$$P(Z_i \geq 0, Z_j \geq 0, Z_k \geq 0)$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4\pi} (\mathrm{Sin}^{-1}\rho_{i-j} + \mathrm{Sin}^{-1}\rho_{j-k} + \mathrm{Sin}\ \rho_{i-k}) \qquad (2.38)$$

Bukti :

Pertama-tama didefinisikan $Y_t = 1 - X_t$, $t = 0$, $\pm 1 \pm 2, \ldots$

$$= E[(1-Y_i)(1-Y_j)(1-Y_k)]$$

$$= E[1-Y_i-Y_j-Y_k+Y_iY_j+Y_iY_k+Y_jY_k-Y_iY_jY_k]$$

$$= 1-E[Y_i]-E[Y_j]-E[Y_k]+E[Y_iY_j]+E[Y_iY_k]$$

$$+ E[Y_jY_k]-E[Y_iY_jY_k]$$

$$= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+E[Y_iY_j]+E[Y_iY_k]+E[Y_jY_k]$$

$$- E[Y_iY_jY_k]$$

karena distribusi ellipsoidal $(Z_{n_1},Z_{n_2},\ldots,Z_{n_k})$ simetri dan mempunyai distribusi yang sama dengan $(-Z_{n_1},-Z_{n_2},\ldots,-Z_{n_k})$ sehingga

$$2E[X_iX_jX_k] = -\frac{1}{2}+E[Y_iY_j]+E[Y_iY_k]+E[Y_jY_k] \qquad (2.39)$$

dengan mengingat teorema 2.4 yaitu

$$E[X_1X_2] = P(Z_1\geq 0,Z_2\geq 0) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\operatorname{Sin}^{-1}\rho$$

maka akan diperoleh :

$$2E[X_iX_jX_k] = -\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\operatorname{Sin}^{-1}\rho_{i-j})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\operatorname{Sin}^{-1}\rho_{i-k})$$

$$+(\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\operatorname{Sin}^{-1}\rho_{j-k})$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}(\operatorname{Sin}^{-1}\rho_{i-j}+\operatorname{Sin}^{-1}\rho_{i-k}+\operatorname{Sin}^{-1}\rho_{j-k})$$

$$E[X_iX_jX_k] = \frac{1}{8}+\frac{1}{4\pi}(\operatorname{Sin}^{-1}\rho_{i-j}+\operatorname{Sin}^{-1}\rho_{i-k}+\operatorname{Sin}^{-1}\rho_{j-k})$$

2.7. Persilangan Order Tinggi (HOC)

Misalkan $Z_1,Z_2,\ldots,Z_n$ merupakan deret waktu yang bernilai real, dengan mean = 0. Hitungan ... dalam waktu diskrit didefinisikan waktu secara biner.

Sebuah deret waktu biner $X_1, X_2, \ldots, X_n$ oleh Z_t untuk $t=1,2,\ldots,n$ diberikan oleh

$$X_t = \begin{cases} 1 & , \text{jika } Z_t \geq 0 \\ 0 & , \text{jika } Z_t < 0 \end{cases}$$

Kemudian ditetapkan pula nilai d_t sama dengan satu jika terdapat perubahan nilai dalam $\{X_t\}$ pada waktu t, dalam arti $\{X_t \neq X_{t-1}\}$ dan d_t bernilai nol untuk selainnya. Perubahan nilai pada waktu t dalam $\{X_t\}$ ini berhubungan dengan persilangan sumbu dalam Z_t pada waktu t. Banyaknya persilangan sumbu dalam $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ yang dinotasikan dengan $D_{k,N}$ didefinisikan sebagai banyaknya perubahan nilai dalam $X_1, X_2, \ldots, X_N$ atau setara dengan :

$$D_{1,N} = d_2 + d_3 + \ldots + d_N \qquad (2.40)$$

dengan $N < n$.

Untuk mendefinisikan persilangan (sumbu) ordo yang lebih tinggi (higher order crossings) disingkat HOC digunakan operator (selisih) ∇.

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} \qquad (2.41)$$

$$\text{dan} \quad \nabla^k Z_t = \nabla^{k-1} Z_t - \nabla^{k-1} Z_{t-1} \qquad (2.42)$$

untuk $k = 1,2,3,\ldots$

$$X_t^k = 1 \quad ; \nabla^{k-1} Z_t \geq 0 \qquad (2.43)$$
$$= 0 \quad ; \text{selainnya}$$

untuk $k = 1,2,3,\ldots.$ dan

$$d_t^k = 1 \quad ; X_t^k \neq X_{t-1}^k \qquad (2.44)$$
$$= 0 \quad ; \text{selainnya}$$

Dengan demikian nilai amatan HOC untuk ordo yang ke-k didefinisikan sebagai :

$$D_{k,N} = d_2^k + d_3^k + \ldots + d_N^k \qquad (2.45)$$

jadi nilai $D_{k,N}$ adalah perluasan dari $D_{1,N}$ adalah banyaknya persilangan sumbu untuk ordo beda (lag) ke-k dari deret $\nabla^{k-1}Z_1, \nabla^{k-1}Z_2, \ldots, \nabla^{k-1}Z_N$.