BAB II

TEORI DASAR

Dalam bab ini dijelaskan teori yang dapat menunjang materi pembahasan pada bab III antara lain teorema ring, homomorfisma ring, prosedur immersi , ring polinomial dan ruang vektor.

2.1 RING

Definisi 2.1.1

Misalkan R suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan (+) dan pergandaan ($\cdot$). Suatu sistem matematika R yang dilengkapi dengan dua operasi tersebut, dituliskan dengan $\langle R,+,\cdot\rangle$ disebut ring jika memenuhi :

1.Terhadap penjumlahan $\langle R,+\rangle$ merupakan grup komutatif yaitu

(i) Memenuhi sifat assosiatif : $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a,b,c \in R$

(ii) Terdapat unsur 0 di R yang bersifat $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in R$. Unsur 0 ini disebut elemen netral atau elemen identitas terhadap penjumlahan

(iii) $\forall$ $a \in R$ $\exists$ $-a \in R \Rightarrow -a + a = a + (-a) = 0$. Unsur ($-a$) ini disebut invers aditif dari a

(iv) Memenuhi sifat komutatif : $a + b = b + a$, $\forall a,b \in R$

2. Terhadap pergandaan $\langle R,\cdot\rangle$ bersifat assosiatif : $(ab)c = a(bc)$, $\forall a,b,c \in R$.

3. Terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan secara bersama – sama $\langle R,+,\cdot\rangle$ memenuhi sifat distributif : $(a + b)\ c = a\ c + b\ c \ \wedge\ c\ (a + b) = c\ a + c\ b$, $\forall a,b,c \in \mathrm{R}$.

Contoh:

Misalkan Z himpunan bilangan bulat, Q himpunan bilangan rasional, R himpunan bilangan nyata dan C himpunan bilangan kompleks maka $\langle Z,+,\cdot\rangle$, $\langle Q,+,\cdot\rangle$, $\langle \mathrm{R},+,\cdot\rangle$ dan $\langle \mathrm{C},+,\cdot\rangle$ adalah suatu ring.

Definisi 2.1.2

Suatu ring R yang memuat e sehingga berlaku $ea = ae = a$, $\forall a \in R$ disebut ring dengan elemen satuan, yaitu elemen satuannya adalah e.

Apabila ring R mempunyai elemen satuan maka elemen satuan tersebut adalah tunggal, sebab misalkan e_1 dan e_2 adalah elemen satuan, akan berlaku $e_1e_2 = e_1$ (karena e_2 elemen satuan) dan $e_1e_2 = e_2$ (karena e_1 elemen satuan), yang berarti $e_1 = e_2$.

Definisi 2.1.3

Suatu ring R dimana persamaan $ax = b$ memiliki penyelesaian $\forall a,b \in R$, $a \neq 0$ disebut ring pembagian.

Definisi 2.1.4.

Misalkan R suatu ring, unsur $a \in R$ dan $a \neq 0$ disebut pembagi nol sejati dari R jika $\exists b \in R$ dan $b \neq 0$ sehinggga $ab = ba = 0$.

Dari definisi diatas maka ring yang tidak memuat pembagi nol sejati akan memenuhi

(i) $a \neq 0,\ b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ atau

(ii) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

Contoh :

1. Ring $\langle Z,+,\cdot\rangle$, $\langle Q,+,\cdot\rangle$, $\langle R,+,\cdot\rangle$ dan $\langle C,+,\cdot\rangle$ tidak memuat pembagi nol sejati.
2. Ring $\langle Z_6,+,\cdot\rangle$ memuat pembagi nol sejati karena dalam Z_6, $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$. Jadi $\overline{2}$ dan $\overline{3}$ adalah pembagi nol sejati dari ring Z_6.

Definisi 2.1.5

Misalkan R suatu ring, maka R dikatakan ring komutatif jika berlaku $ab = ba,\ \forall a,b \in R$

Definisi 2.1.6.

Suatu ring komutatif dengan elemen satuan dan tidak memuat pembagi nol sejati disebut daerah integral.

Definisi 2.1.7

Suatu daerah integral D disebut daerah Euclid jika D dilengkapai dengan pemetaan $g : D - \{0\} \to Z^+$ memenuhi :

1. $\forall a, b \in D, a \neq 0, b \neq 0$ berlaku $g(a) \leq g(ab)$
2. $\forall a, b \in D, a \neq 0$ berlaku $b = qa + r$, untuk suatu $q, r \in D$ dengan $r = 0$ atau $g(r) < g(a)$.

Definisi. 2.1.8

Suatu ring komutatif dengan elemen satuan dan setiap elemen tak nolnya memiliki invers disebut lapangan (field).

Teorema 2.1.1

Setiap ring pembagian yang komutatif adalah suatu lapangan.

Bukti :

Misalkan R adalah ring pembagian. Akan ditunjukkan R suatu lapangan.

(i) Akan ditunjukkan dulu ring pembagian R tidak memuat pembagi nol sejati. Ambil sembarang $a,b \in R$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Pandang persamaan $ax = b$, karena R ring pembagian maka persamaan tersebut memiliki penyelesaian misalkan x_1. Jelas $x_1 \neq 0$ (andaikan $x_1 = 0$ maka $b = ax_1 = a0 = 0$ sehingga bertentangan dengan pengambilan b). Pandang persamaan $bx = x_1$ yang pasti juga memiliki penyelesaian misalkan x_2. Jelas $x_2 \neq 0$. Sehingga $bx_2 = x_1$ dan $a(bx_2) = ax_1 = b$. Dengan sifat assosiatif $(ab)x_2 = b$. Jelas bahwa $ab \neq 0$. Jadi untuk $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ diperoleh $ab \neq 0$ atau R tidak memuat pembagi nol sejati.

(ii) Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa R memuat elemen satuan. Ambil sembarang $a \in R$, $a \neq 0$, maka persamaan $ax = a$ pasti memiliki penyelesaian misalkan e. Jelas $e \neq 0$. Jadi $ae = a$ dan $ae^2 = ae$ sehingga $ae^2 - ae = 0$, atau $a(e^2 - e) = 0$. Karena R tidak memuat pembagi nol sejati dan $a \neq 0$ maka haruslah $e^2 - e = 0$ atau $e^2 = e$. Ambil sembarang $d \in R$, untuk $d = 0$, jelas ed $= de = d$. Untuk $d \neq 0$ maka $de^2 = de$ atau $de^2 - de = 0$ sehingga $(de - d)\, e = 0$. Karena R tidak memuat pembagi nol sejati dan $e \neq 0$ maka haruslah $de - d =$ atau $de = d$. Di sisi lain $e^2d = ed$ atau $e^2d - ed = 0$ sehingga $e(ed\text{-}d) = 0$. Karena R tidak memuat pembagi nol sejati maka $ed = d$. Hal ini menunjukkan bahwa R memuat e sebagai elemen satuan.

(iii) Tinggal ditunjukkan R suatu lapangan. Ambil sembarang $a \in R$ dengan $a \neq 0$. Pandang persamaan $ax = e$. Karena R ring pembagian maka $ax = e$ memiliki penyelesaian misalkan x_1 , sehingga $ax_1 = e$. Selanjutnya $(x_1a - e)x_1$ $= x_1ax_1 - ex_1 \;\; = x_1e - ex_1 = 0$. Karena R tidak memuat pembagi nol sejati maka haruslah $x_1a - e = 0$ atau $x_1a = e$. Akibatnya $ax_1 = x_1a = e$ atau x_1 adalah invers dari a.

Jadi R adalah lapangan. ■

Teorema 2.1.2.

Setiap lapangan adalah daerah integral

Bukti:

Misalkan F suatu lapangan. Misalkan juga $a,b \in F$ dengan $a \neq 0$ dan berlaku $ab = 0$. Akan ditunjukkan bahwa $b = 0$. Karena F lapangan maka terdapat $a^{-1} \in F$ dan berlaku $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. Sehingga diperoleh $0 = ab = a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = eb = b$. Jadi F tidak memuat pembagi nol sejati atau F daerah integral. ■

Teorema diatas tidak dapat dibalik, sebab ada daerah integral yang bukan lapangan, contohnya ring bilangan bulat $\langle Z,+,\cdot\rangle$ adalah daerah integral, tetapi $\langle Z,+,\cdot\rangle$ bukan suatu lapangan.

Definisi 2.1.9

Misalkan R ring dan $S \subseteq R$. S disebut subring dari R jika memenuhi

(i). $\forall x, y \in S \Rightarrow x - y \in S$

(ii). $\forall x, y \in S \Rightarrow xy \in S \wedge yx \in S$

2.2 Ideal dan Ring Kuosien

Definisi 2.2.1

Misalkan $I \subseteq R$ dan $I \neq \phi$. I disebut ideal dari ring R jika memenuhi :

(i) $\forall x, y \in I \Rightarrow x - y \in I$

(ii) $\forall x \in I \wedge r \in R \Rightarrow xr \in I \wedge rx \in I$

Dari definisi diatas jelas bahwa $\{0\}$ adalah ideal dari R yang dinamakan ideal nol dan R sendiri juga ideal terhadap dirinya sendiri.

Definisi 2.2.2

Suatu ideal yang dibangun oleh satu elemen saja disebut ideal utama. Ideal utama yang dibangun oleh a ditulis $\langle a \rangle = \{ra \mid r \in R\}$.

Suatu ring R yang setiap idealnya adalah ideal utama dinamakan daerah ideal utama.

Lema 2.2.1

Misalkan N himpunan semua bilangan asli dan N' subhimpunan tak hampa dari N. Maka N' memuat bilanagan terkecil, yaitu terdapat $x \in N'$ sedemikian hingga $x \le y$, untuk setiap $y \in N'$

Bukti :

Jika $1 \in N'$, jelas 1 adalah bilangan terkecil di N'. Selanjutnya misalkan $1 \notin N'$. Tulis, $S = N - N'$, maka $1 \in S$. Andaikan untuk setiap $x \in S$ berlaku $p(x) \in S$ Karena $S \subseteq N$ dan $1 \in S$, maka menurut induksi matematika, didapatkan $S = N$. Akibatnya $N' = \phi$, bertentangan dengan yang diketahui bahwa $N' \neq \phi$. Jadi terdapat $x \in S$ dengan $p(x) \notin S$. Misalkan x adalah bilangan pertamadi S dengan pengikut $p(x) \notin S$ atau $p(x) \in N'$. Maka untuk setiap $y \in N'$ memenuhi $p(x) < y$. Dengan kata lain $p(x)$ adalah bilangan terkecil di N'. ■

Teorema 2.2.1

Misalkan D suatu daerah Euclid dan I suatu ideal dari D, maka terdapat $d \in D$ yang memenuhi $I = \langle d \rangle = \{kd | k \in D\}$

Bukti :

Dalam hal $I = \{0\}$, pilih $d = 0$. Diperoleh $I = \langle 0 \rangle$. Selanjutnya misalkan $I \neq \{0\}$. Dalam hal ini $g(D - \{0\}) = N' \neq \phi$.

Jika $0 \in N'$, pilih $d \in I$ dengan $g(d) = 0$. Untuk setiap $x \in I$ terdapat $q, r \in D$ yang memenuhi $x = qd + r$, dengan $r = 0$ atau $g(r) < g(d)$. Karena $g(d) = 0$ maka yang harus $r = 0$. Jadi $x = qd$, untuk suatu $q \in D$ dan didapatkan $I \subseteq \langle d \rangle$.

Jika $0 \notin N'$, maka $N' \subseteq N$ dan $N' \neq \phi$. Menurut lema 2.2.1, subhimpunan N' memuat bilangan terkecil, sebut n_0. Pilih $d \in I$ yang memenuhi $g(d) = n_0$. Untuk suatu $x \in I$ terdapat $q, r \in D$ yang memenuhi $x = qd + r$ dengan $r = 0$ atau $g(r) < g(d)$. Andaikan $r \neq 0$ maka $r = x - qd \in I$ dengan $g(r) < g(d)$. Ini mustahil karena $g(d) = n_0$ adalah bilangan terkecil di N'. Jadi haruslah $r = 0$. Ini memberikan $x = qd$ untuk suatu $q \in D$ atau $I \subseteq \langle d \rangle$.

Dengan demikian senantiasa berlaku $I \subseteq \langle d \rangle$. Dan jelas bahwa inklusi balkikannya yaitu $\langle d \rangle \subseteq I$ juga berlaku . Akibatnya $I = \langle d \rangle$. ■

Akibat 2.2.1

Setiap daerah Eucild adalah daerah ideal utama.

Teorema 2.2.2

Misalkan I ideal dari R, maka himpunan koset penjumlahan $R/I = \{r + I = \overline{r} | r \in R\}$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan dengan

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$$

membentuk suatu ring, yang disebut dengan ring kuosien R oleh I

Bukti :

Akan ditunjukkan dulu penjumlahan dan pergandaan di atas terdefinisi dengan baik. Misalkan $\overline{a} = \overline{a'}$ dan $\overline{b} = \overline{b'}$. Kita punyai $a - a' \in I$ dan $b - b' \in I$, atau $a = a' + x$ dan $b = b' + y$ untuk suatu $x, y \in I$. Kita peroleh

$$a + b = (a' + x) + (b' + y) = (a' + b') + (x + y) = (a' + b') + m$$

$$ab = (a' + x)(b' + y) = a'b' + (a'y + b'x + xy) = a'b' + n$$

untuk suatu $m, n \in I$. Dengan demikian $(a + b) - (a' + b') \in I$ dan $ab - a'b' \in I$, atau $\overline{a+b} = \overline{a' + b'}$ dan $\overline{ab} = \overline{a'b'}$. Jadi penjumlahan dan pergandaan di atas terdefinisi dengan baik.

Selanjutnya akan di tunjukkan bahwa R/I merupakan suatu ring.

R/I terhadap penjumlahan :

1) Bersifat assosiatif : $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in R/I$ berlaku $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a+b} + \overline{c} = \overline{a+b+c} = \overline{a} + (\overline{b+c}) = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$

2) Terdapat $\overline{0} \in R/I$ sehingga $\forall \overline{a} \in R/I$ berlaku $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a+0} = \overline{0+a} = \overline{0} + \overline{a} = \overline{a}$.

Elemen $\overline{0}$ ini dinamakan unsur netral dalam R/I.

3) Untuk setiap $\forall \overline{a} \in R/I$ terdapat $\overline{-a} \in R/I$ sehingga berlaku $\overline{a} + \left(\overline{-a}\right) = \overline{a+(-a)} = \overline{-a+a} = \overline{-a} + \overline{a} = \overline{0}$. Unsur $\overline{-a} \in R/I$ ini dinamakan invers aditif dari $\forall \overline{a} \in R/I$.

Terhadap pergandaan :

Bersifat assosiatif : $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in R/I$ berlaku

$$\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)\overline{c} = \overline{ab} \cdot \overline{c} = \overline{abc} = \overline{a} \cdot \overline{bc} = \overline{a} \cdot \left(\overline{bc}\right)$$

Terhadap penjumlahan dan pergandaan secara bersama bersifat distributif

$$\overline{a}\left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a(b+c)} = \overline{ab+ac} = \overline{ab} + \overline{ac}$$

$$\left(\overline{b} + \overline{c}\right)\overline{a} = \overline{(b+c)a} = \overline{ba+ca} = \overline{ba} + \overline{ca}$$

Jadi R/I membentuk suatu ring. ■

Definisi 2.2.3

Suatu ideal M di dalam ring R dikatakan ideal maksimal jika untuk setiap ideal N di R dan berlaku $M \subseteq N \subseteq R$ maka $N = M$ atau $N = R$.

Teorema 2.2.3

Misalkan R suatu ring komutatif dengan elemen satuan dan M adalah suatu ideal di R, maka M ideal maksimal jika dan hanya jika R/M suatu lapangan.

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan R ring komutatif dengan elemen satuan dan M ideal di R. Jelas bahwa R/M juga komutataif. Misalkan M ideal maksimal, akan ditunjukkan bahwa R/M lapangan. Ambil sembarang elemen tak nol di R/M, misalkan $a+M$. Maka $a \notin M$. Sekarang dibentuk himpunan $I=\{ar+m \mid r \in R, m \in M\}$. Jelas bahwa I tidak kosong karena M dan R tidak kosong. Ambil sembarang elemen $x,y \in I$, $x=ar_1+m_1$ dan $y=ar_2+m_2$ dengan $r_1,r_2 \in R$ dan $m_1,m_2 \in M$ maka

(i) $x-y=a(r_1-r_2)+(m_1-m_2)$, karena $r_1-r_2 \in R$ dan $m_1-m_1 \in M$ maka $x-y \in I$

(ii) Ambil sembarang $r \in R$ maka $rx=xr=a(r_1r)+(m_1r)$, karena $r_1r \in R$ dan $m_1r \in M$ maka $xr=rx \in I$

Jadi I ideal di R.

Ambil sembarang $m \in M$ maka m dapat dituliskan $m=a0+m$ dengan $0 \in R$ dan $m \in M$. Akibatnya $m \in I$. Ini memberikan $M \subseteq I$. Selanjutnya ambil $ae+0=a \in I$, jelas bahwa $a \notin M$. Dengan demikian terdapat unsur di I yang bukan unsur di M, jadi $M \subset I$. Karena M ideal maksimal dan $M \subset I$ maka haruslah $I=R$. Dengan demikian unsur kesatuan $e \in R$ dapat dituliskan $e=ar+m$ untuk suatu $r \in R$ dan $m \in M$, dan $e+M=(ar+m)+M=ar+M=(a+M)(r+M)$. Ini berarti $r+M$ invers dari $a+M$. Dengan perkataan lain, $a+M$ punya invers.

Sehingga karena setiap unsur tak nol di R/M punya invers maka R/M suatu lapangan.

$(\Leftarrow)$Selanjutnya misalkan R/M suatu lapangan dan misalkan I ideal di R sehingga $M \subset I \subseteq R$. Karena $M \subset I$ maka terdapat $a \in I$ dan $a \notin M$. Dengan demikian $a + M \in R/M$. Ambil sembarang $b \in R$. Karena R/M suatu lapangan dan $a + M$ elemen tak nol di R/M maka berlaku $(a+M)(x+M) = b + M$ atau $ax + aM + xM + M = ax + M = b + M$ sehingga $ax - b = m$, untuk suatu $m \in M$ atau $b = ax - m$. Perhatikan bahwa $ax \in I$ (I ideal) dan $m \in I$ (karena $M \subset I$). Sehingga $b \in I$. Karena b sembarang maka $R \subseteq I$. Jadi $I = R$ atau M ideal maksimal. ■

Definisi 2.2.4.

Suatu ideal I dari ring komutatif R dikatakan ideal prim jika untuk setiap unsur a dan b di R yang memenuhi $ab \in I$ maka $a \in I$ atau $b \in I$

Teorema 2.2.4.

Misalkan R suatu ring komutatif dan I ideal dalam R, maka R/I daerah integral jika dan hanya jika I ideal prim.

Bukti :

$(\Rightarrow)$ Misalkan R/I daerah integral. Ambil unsur $a, b \in R$ yang memenuhi $ab \in I$. Kita punyai $\overline{ab} = \overline{ab} = \overline{0}$ Karena R/I daerah integral maka $\overline{a} = \overline{0}$

atau $\bar{b} = \bar{0}$. Dengan kata lain $a \in I$ atau $b \in I$. Ini memberikan bahwa I ideal prim.

($\Leftarrow$) Misalkan I ideal priem dan $\bar{c}, \bar{d} \in R/I$ memenuhi $\overline{cd} = \bar{0}$. Kita punyai $\overline{cd} = \bar{0}$ atau $cd \in I$. Karena I ideal priem maka $c \in I$ atau $d \in I$. Dengan kata lain $\bar{c} = \bar{0}$ atau $\bar{d} = \bar{0}$. Ini memberikan R/I suatu daerah integral.

Definisi 2.2.5

Misalkan R suatu ring. Jika terdapat bilangan bulat positif terkecil n yang memenuhi $nx = 0$ untuk setiap x di R maka n dikatakan karakteristik dari ring R. Jika bilangan bulat positif tersebut tidak ada maka R dikatakan berkarakteristik nol.

2.3 Homomorfisma Ring

Definisi 2.3.1

Misalkan R dan R' adalah suatu ring, maka pemetaan $\phi : R \to R'$ dikatakan homomorfisma ring jika berlaku :

(1) $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$

(2) $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

untuk setiap $a, b \in R$.

Lema 2.3.1

Jika $\phi : R \to R'$ suatu homomorfisma maka :

(1) $\phi(0) = 0'$, yaitu elemen netral di R'

(2) $\phi(-a) = -\phi(a), \forall a \in R$

Bukti :

(1) Misalkan 0 elemen netral di R, maka $a + 0 = a$; $\forall a \in R$. Dengan demikian $\phi(a) = \phi(a+0) = \phi(a) + \phi(0)$. Karena $\phi(a) \in R$ dan 0' unsur netral di R' maka $\phi(a) + 0' = \phi(a)$. Dari persamaan di atas diperoleh $\phi(a) + 0' = \phi(a) + \phi(0)$. Ini mengakibatkan $\phi(0) = 0'$, yaitu elemen netral di R'.

(2) Ambil sebarang $a \in R$ maka terdapat $-a \in R$ sehingga berlaku $a + (-a) = 0 \in R$. Dengan demikian $0' = \phi(0) = \phi(a + (-a)) = \phi(a) + \phi(-a)$. Ini berarti $\phi(-a)$ invers dari $\phi(a)$. Jadi $\phi(-a) = -\phi(a)$. ■

Definisi 2.3.2

Jika $\phi : R \to R'$ suatu homomorfisma , maka kernel dari ϕ ditulis $\mathrm{Ker}(\phi)$ adalah himpunan semua elemen $a \in R$ yang dipetakan oleh ϕ ke 0', yaitu $\mathrm{Ker}(\phi) = \{a \in R \mid \phi(a) = 0'\}$.

Teorema 2.3.1

Jika $\phi : R \to R'$ suatu homomorfisma maka $\mathrm{Ker}(\phi)$ adalah ideal dari R.

Bukti :

Misalkan $\phi : R \to R'$ suatu homomorfisma, jelas bahwa $\mathrm{Ker}(\phi) \subseteq R$ dan $\ker(\phi) \neq \phi$ karena $\phi(0) = 0$, yaitu $0 \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Selanjutnya

1. Ambil sembarang $a,b \in \mathrm{Ker}(\phi)$, maka $\phi(a) = 0'$ dan $\phi(b) = 0'$. Dengan demikian $\phi(a-b) = \phi(a+(-b)) = \phi(a) + \phi(-b) = \phi(a) - \phi(b) = 0' - 0' = 0'$. Hal ini berarti $a - b \in \mathrm{Ker}(\phi)$.
2. Selanjutnya ambil sembarang $a \in \mathrm{Ker}(\phi)$ dan $r \in R$, maka berlaku $\phi(a) = 0'$ dan $\phi(ar) = \phi(a).\phi(r) = 0'.\phi(r) = 0'$. Demikian juga berlaku $\phi(ra) = \phi(r) \cdot \phi(a) = \phi(r) \cdot 0' = 0'$. Ini berarti $ar \in \mathrm{Ker}(\phi)$ dan $ra \in \mathrm{Ker}(\phi)$.

Jadi $\mathrm{Ker}(\phi)$ ideal dari R. ■

Definisi 2.3.3

Suatu homomorfisma $\phi : R \to R'$ dikatakan isomorfisma jika ϕ merupakan pemetaan yang bersifat satu – satu dan pada.

Definisi 2.3.4

Dua ring R dan R' dikatakan isomorfis jika terdapat isomorfisma dari R ke R', ditulis $R \approx R'$.

Lema 2.3.2

Misalkan $\phi : R \to R'$ suatu homomorfisma, maka $\phi : R \to \phi(R) \subseteq R'$ dikatakan isomorfisma jika dan hanya jika $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan $\phi : R \to \phi(R)$ suatu isomomorfisma, akan ditunjukkan $\text{Ker}(\phi) = 0$. Jelas bahwa $\{0\} \subseteq \text{Ker}(\phi)$. Selanjutnya ambil sembarang $a \in \text{Ker}(\phi)$, maka $\phi(a) = 0$. Karena ϕ isomomorfisma yang berarti pemetaan satu – satu dan kita punya $\phi(a) = 0$ dan $\phi(0) = 0$, haruslah $a = 0$. Ini berarti $\ker(\phi) \subseteq \{0\}$. Akibatnya $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Misalkan $\phi : R \to R'$ suatu homomorfisma dan $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$ akan ditunjukkan ϕ pemetaan satu – satu dan pada. Ambil sembarang $a, b \in R$ dengan $\phi(a) = \phi(b)$, maka $\phi(a-b) = \phi(a + (-b)) = \phi(a) + \phi(-b) = \phi(a) - \phi(b) = 0'$. Karena $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$, harusalah $a - b = 0$ atau $a = b$. Ini berarti ϕ pemetaan satu – satu. Dengan membatasi petanya pada $\phi(R)$ maka ϕ jelas bersifat pada. Akibatnya $\phi : R \to \phi(R) \subseteq R'$ suatu isomomorfisma. ■

2.4 Prosedur Immersi

Ditentukan S dan T' dua ring yang saling asing sedangkan T' isomorfis dengan subring T dari S, yaitu $T' \approx T$. Maka T' dapat diperluas menjadi ring S' sedemikian hingga $S \approx S'$ dan T' merupakan subring dari S' dan berlaku $S' - T' = S - T$. Sehingga subring T dapat dikeluarkan dari S dan diganti dengan T'. Yaitu T' disisipkan dalam S. Inilah yang disebut immersi (penyisipan) dari suatu ring ke dalam ring.

Teorema 2.4.1

Misalkan T' suatu ring, maka dapat dikonstruksikan suatu ring S yang mempunyai elemen satuan sedemikian hingga T' dapat diimmersikan ke dalam ring S.

Bukti :

Misalkan T' mempunyai karakteristik n. Kita konstruksikan himpunan S terdiri atas elemen – elemen berbentuk pasangan – pasangan $(a,\overline{p})$ dimana $a \in T'$ dan $\overline{p} \in I_n$ dengan I_n adalah ring dari bilangan bulat modulo n, yaitu $S = \{(a,\overline{p}) | a \in T' \wedge \overline{p} \in I_n\}$. Kesamaan dua elemen didefinisikan $(a,\overline{p}) = (b,\overline{q})$ jika dan hanya jika $a = b$ dan $\overline{p} = \overline{q}$. Selanjutnya didefinisikan aturan penjumlahan dan pergandaan sebagai berikut

$$(a,\overline{p}) + (b,\overline{q}) = (a+b,\overline{p}+\overline{q})$$
$$(a,\overline{p}) \cdot (b,\overline{q}) = (ab+pb+qa,\overline{pq})$$

Jelas bahwa penjumlahannya terdefinisi dengan baik. Untuk membuktikan pergandaan juga terdefinisi dengan baik akan ditunjukkan apabila $\overline{p} = \overline{r}$ dan $\overline{q} = \overline{s}$ maka $(ab+pb+qa,\overline{pq}) = (ab+rb+sa,\overline{rs})$. Karena $\overline{p} = \overline{r}$ maka $p - r = kn$ untuk suatu bilangan bulat k. Selanjutnya $(p-r)b = knb = 0$ karena karakteristik T' adalah n. mengakibatkan $pb - rb = 0$ atau $pb = rb$. Dengan cara yang sama diperoleh $qa = sa$. Jadi dalam himpunan S, terhadap penjumlahan dan pergandaan seperti di atas terdefinisi dengan baik. Selanjutnya dengan aturan penjumlahan dan pergandaan diatas S juga membentuk ring dengan eleman satuan yaitu $(0,\bar{1})$ sebagai elemen satuannya. Pandang sekarang himpunan T sebagai himpunan bagian dari S, yaitu $T = \{(a,\bar{0}) | a \in T', \bar{0} \in I_n\}$.

Maka $\forall (a,\bar{0}),(b,\bar{0}) \in T$ dan $(c,\overline{m}) \in S$ berlaku

$$(a,\bar{0}) - (b,\bar{0}) = (a,\bar{0}) + (-b,\bar{0}) = (a-b,\bar{0}) \in T$$
$$(a,\bar{0}) \cdot (c,\overline{m}) = (ac + 0c + ma, \overline{0m}) = (ac + ma, \bar{0}) \in T$$
$$(c,\overline{m}) \cdot (a,\bar{0}) = (ca + ma + 0a, \overline{m0}) = (ca + ma, \bar{0}) \in T$$

Memperlihatkan bahwa T merupakan ideal dalam S.

Selanjutnya buat pengaitan $\psi : a \mapsto (a,\bar{0})$, $\forall a \in T'$, yang mendefinisikan pemetaan $\psi : T' \to T$. Jelas $\psi : T' \to T$ merupakan suatu isomorfisma, sehingga prosedur immersi dapat dilakukan. Himpunan T dikeluarkan dari S dan diganti dengan T'. ■

2.5 Ring Polinomial

Definisi 2.5.1

Misalkan R suatu ring dan simbol x menyatakan suatu variabel (indeterminate). Suatu polinom (suku banyak) dalam x dengan koefisien dari R dituliskan $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, dengan $a_i \in R$ dan hampir semua $a_i = 0$. Selanjutnya himpunan semua polinom dalam x dengan koefisien dari R ini dinyatakan dengan $R[x]$, Jadi $R[x] = \{f(x) | f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ dengan $a_i \in R$ dan hampir semua $a_i = 0\}$ yang dinamakan dengan daerah suku banyak.

Derajat dari suatu polinom didefinisikan sebagai bilangan n terbesar dimana $a_n \neq 0$. Dengan demikian polinom konstan memiliki derajat nol dan polinom nol tidak memiliki derajat, dan pada umumnya derajat polinom nol ini didefinisikan dengan minus tak hingga atau der(0) = $-\infty$.

Dua polinom $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ dan $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ dikatakan sama jika $a_i = b_i$ untuk setiap i.

Definisi 2.5.2

Penjumlahan dan pergandaan polinom dalam $R[x]$ didefinisikan seperti berikut, misalkan $f(x) = \sum a_i x^i$ dan $g(x) = \sum b_i x^i$

$$f(x) + g(x) = \sum (a_i + b_i) x^i$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum \Big(\sum_{p+q=i} a_p b_q \Big) x^i$$

Karena a_i dan b_i di R hampir semuanya nol maka $a_i + b_i$ juga di R dan hampir semuanya nol. Demikian pula dengan $\sum_{p+q=i} a_p b_q$ unsur di R yang hampir semuanya nol. Dengan demikian $f(x) + g(x)$ dan $f(x)g(x)$ adalah polinom – polinom di $R[x]$. Jadi diperoleh operasi penjumlahan

$$+ : R[x] \text{ X } R[x] \to R[x]$$

$$(f(x), g(x)) \mapsto R[x]$$

$$\bullet : R[x] \text{ X } R[x] \to R[x]$$

$$(f(x), g(x)) \mapsto f(x)g(x)$$

Teorema 2.5.1

Jika R ring komutatif dengan elemen satuan maka $R[x]$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan.

Bukti:

Misalkan R ring komutatif dengan elemen satuan dan pandang himpunan polinom $R[x]$ yang dilkengkapi dengan opersai penjumlahan dan pergandaan seperti diberikan oleh definisi 2.5.2,

1. Terhadap penjumlahan

(i) Sifat assosiatif . Misalkan $f(x) = \sum a_i x^i, g(x) = \sum b_i x^i$ dan $h(x) = \sum c_i x^i$, maka

$$f(x) + (g(x) + h(x)) = \sum a_i x^i + \sum (b_i + c_i) x^i = \sum (a_i + b_i + c_i) x^i$$

$$= \sum (a_i + b_i) x^i + \sum c_i x^i = (f(x) + g(x)) + h(x)$$

(ii) Sifat komutatif : $f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{s} (a_i + b_i) x^i = \sum_{i=0}^{s} (b_i + a_i) x^i = g(x) + f(x)$

(i) Unsur nol. Terdapat polinom nol, yaitu polinom yang semua koefisienya nol dan dinotasikan dengan 0 atau $0(x)$. Polinom nol memenuhi hubungan

$$f(x) + 0(x) = \sum (a_i + 0) x^i = \sum (0 + a_i) x^i = 0(x) + f(x) = f(x)$$

(iv)Unsur invers untuk setiap $f(x) = \sum a_i x^i$ di $R[x]$ terdapat polinom $-f(x) = \sum (-a_i) x^i$ di $R[x]$ yang bersifat $f(x) + (-f(x)) = (-f(x)) + f(x) = 0$.

2. Terhadap pergandaan

(i) Sifat assosiatif . Misalkan $f(x), g(x), h(x) \in R[x\}$ dengan

$f(x) = \sum a_p x^p, g(x) = \sum b_q x^q, h(x) = \sum c_r x^r$ diperoleh

$$(f(x)g(x))h(x) = \sum_i (\sum_{p+q=i} a_p b_q) x^i \sum_r c_r x^r = \sum_j (\sum_{i+r=j} (\sum_{p+q=i} a_p b_q) c_r) x^j$$

$$= \sum_j (\sum_{i+r=j} \sum_{p+q=i} a_p b_q c_r) x^j = \sum_j (\sum_{p+q+r=j} a_p b_q c_r) x^j$$

$$= \sum_j (\sum_{p+i=j} a_p (\sum_{q+r=j} b_q c_r)) x^j = \sum_p a_p x^p \sum_{q+r=i} (b_q c_r) x^i$$

$$= f(x)(g(x)h(x))$$

(ii) Sifat komutatif : $f(x)g(x) = \sum_i (\sum_{p+q=i} a_p b_q) x^i = \sum_i (\sum_{p+q=i} b_q a_p) x^i = g(x)f(x)$

(iii)Unsur kesatuan..

Pandang $1 \in R[x]$ dan tulis $1 = \sum_q b_q x^q$ dengan $b_0 = 1$ dan $b_q = 0, \forall q \geq 1$.

Untuk polinom $f(x) = \sum_p a_p x^p$ berlaku

$$f(x) \cdot 1 = \sum_r (\sum_{p+q=r} a_p b_q) x^r = \sum_r (\sum_{p+0} a_p b_0) x^r = \sum_p a_p x^p = f(x)$$

dengan cara serupa diperoleh $1 \cdot f(x) = f(x)$. Dengan demikian 1 adalah unsur kesatuan di $R[x]$

3. Sifat distributif . Misalkan $f(x) = \sum a_p x^p, g(x) = \sum b_q x^q, h(x) = \sum c_q x^q$ polinom di $R[x]$ terhadap opersai penjumlahan dan pergandaan secara bersama – sama berlaku

$$f(x)(g(x) + h(x)) = \sum_p a_p x^p \sum_q (b_q + c_q) x^q = \sum_{p+q=i} (a_p (b_q + c_q)) x^i$$

$$= \sum_{p+q=i} (a_p b_q + a_p c_q) x^i = \sum_{p+q=i} a_p b_q x^i + \sum_{p+q=i} a_p b_q x^i = f(x)g(x) + f(x)h(x).$$

Jadi $R[x] = \langle R[x],+,\cdot\rangle$ membentuk ring komutatif dengan elemen satuan. ■

Teorema 2.5.2

Jika R daerah integral maka $R[x]$ juga daerah integral

Bukti:

Misalkan $f(x) = \sum a_{p!} x^p$ dan $g(x) = \sum b_q x^q$ polinom di $R[x]$ dengan $f(x)g(x) = 0$. Misalkan juga $f(x) \neq 0$ dan a_k adalah koefisien pertama yang tak nol, yaitu $a_k \neq 0$ dan $a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0$. Diperoleh $f(x)g(x) = \sum_r (\sum_{p+q=r} a_p b_q) x^r = \sum_r c_r x^r$, dengan $c_r = 0$ untuk setiap r. Untuk $r = k$ diperoleh $c_k = \sum_{p+q=k} a_p b_q = \sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p} = a_k b_0 = 0$. Karena $a_k \neq 0$, maka $b_0 = 0$. Misalkan berturut - turut telah kita peroleh $b_0 = b_1 = \ldots = b_k = 0$. Untuk $r = 2k+1$, diperoleh $c_{2k+1} = \sum_{p+q=2k+1} a_p b^q = \sum_{p=0}^{2k+1} a_p b_{2k+1-p} = 0$. Karena $a_k \neq 0$, maka $b_{k+1} = 0$. Jadi $b_q = 0$ untuk setiap q. Dengan demikian $R[x]$ tidak memuat pembagi nol sejati atau $R[x]$ suatu daerah integral. ■

Akibat 2.5.1

Jika F suatu lapangan maka $F[x]$ daerah integral.

Teorema 2.5.3

Untuk setiap polinom $f(x), g(x) \in F[x]$, berlaku $\text{der}(fg) = \text{der}(f) + \text{der}(g)$.

Bukti :

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah polinom berderajat m dan n, sehingga masing – masing memiliki koefisien pemimpin a_m dan b_n. Karena $a_m, b_n \in F$ dan F suatu lapangan jadi juga suatu daerah integral maka $a_m \cdot b_n \neq 0$. Sehingga koefisien pemimpin dari $f(x)g(x)$ adalah $a_m \cdot b_n$. Ini mengakibatkan $\text{der}(fg) = m + n$ atau $\text{der}(fg) = \text{der}(f) + \text{der}(g)$. ■

Teorema 2.5.4

Misalkan $f(x), g(x) \in F[x]$ dan $f(x) \neq 0$, maka terdapat dengan tunggal polimom $q(x)$ dan $r(x)$ sehingga berlaku $g(x) = f(x)q(x) + r(x)$, dengan $r(x) = 0$ atau der $r(x) <$ der $f(x)$.

Bukti:

Jika $g(x) = 0$, pilih $q(x) = 0$ dan $r(x) = g(x)$. Maka kita punyai $g(x) = f(x)q(x) + r(x)$, dengan $r(x) = 0$.

Dalam hal $g(x) \neq 0$, misalkan $\text{der}(g(x)) = m$ dan $\text{der}(f(x)) = n$, terdapat dua kasus :

1. der $g(x) <$ der $f(x)$.

Pilih $q(x)=0$ dan $r(x)=g(x)$ maka diperoleh $g(x)=f(x)q(x)+r(x)$ dengan $\operatorname{der}(r(x))<\operatorname{der}\ (f(x))$.

2: $\operatorname{der} g(x)\geq \operatorname{der}\ f(x)$.

Pembuktian dilakukan dengan induksi matematika Misalkan $g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$ dan $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$. Dalam hal $m=n$, pilih $q(x)=b_ma_n{}^{-1}$ dan $r(x)=g(x)-b_ma_n{}^{-1}f(x)$. Diperoleh $g(x)=f(x)q(x)+r(x)$ dengan $\operatorname{der}(r(x))<n-1<\operatorname{der}(f(x))$. Jadi, sifat berlaku. Selanjutnya, misalkan sifat berlaku untuk $m<n+k$ dengan $k>0$. Akan dibuktikan berlaku juga untuk $m=n+(k+1)$. Pandang suku banyak $g'(x)=g(x)-b_ma_n{}^{-1}x^{k+1}f(x)$. Kita peroleh $\operatorname{der}(g'(x))<n+k$. Menurut hipotesa induksi terdapat $q'(x),r(x)\in F[x]$ yang memenuhi $g'(x)=q'(x)f(x)+r(x)$ dengan $r(x)=0$ atau der $r(x)<\operatorname{der}\ f(x)$. Selanjutnya didapatkan

$$g(x)=g'(x)+b_ma_n{}^{-1}x^{k+1}f(x)=(q'(x)f(x)+r(x))+b_ma_n{}^{-1}x^{k+1}f(x)$$

$$=(q'(x)+b_ma_n{}^{-1}x^{k+1})f(x)+r(x)=q(x)f(x)+r(x)$$

dengan $q(x)=q'(x)+b_ma_n{}^{-1}x^{k+1}$ dan $r(x)=0$ atau $\operatorname{der} r(x)<\operatorname{der} f(x)$.

Untuk membuktikan ketunggalannya, misalkan $g(x)=q_1(x)f(x)+r_1(x)$ $=q_2(x)f(x)+r_2(x)$ dengan $q_1(x)\neq q_2(x)$ dan $r_1(x)\neq r_2(x)$. Maka $q_1(x)-q_2(x)\neq 0$ dan $r_1(x)-r_2(x)\neq 0$. Misalkan $\operatorname{der}(r_1(x)-r_2(x))=s$, jelas bahwa $s<n=\operatorname{der}(f(x))$.

Selanjutnya dari hubungan $q_1(x)f(x)+r_1(x)=q_2(x)f(x)+r_2(x)$ diperoleh $0=(q_1(x)-q_2(x))f(x)+r_1(x)-r_2(x)$ atau $r_1(x)-r_2(x)=(q_1(x)-q_2(x))f(x)$. Akibatnya $\operatorname{der}(r_1(x)-r_2(x))=$ $\operatorname{der}(q_1(x)-q_2(x))+$ $\operatorname{der}(f(x))\geq n$. Hal ini bertentangan bahwa $\operatorname{der}(r_1(x)-r_2(x))< n$. Jadi haruslah $q_1(x)=q_2(x)$ dan $r_1(x)=r_2(x)$. ■

Berdasarkan teorema 2.5.3 dan teorema 2.5.4 di atas dan dengan memandang derajat polinom tak nol pada $F[x]$ sebagai fungsi $g:F[x]-\{0\}\to Z^+$ maka daerah integral $F[x]$ merupakan daerah Euclid.

Definisi 2.5.3

Polinom $f(x)\in F[x]$ dikatakan tak tereduksi atas F jika $f(x)$ berderajat positif dan tidak dapat dinyatakan $f(x)=g(x)h(x)$ dengan $h(x)$ dan $g(x)$ polinom berderajat positif di $F[x]$. Jika tidak demikian maka dikatakan $f(x)$ tereduksi.

Teorema 2.5.5

Misalkan $p(x)\in F[x], p(x)\neq 0$. Maka ideal $I=\langle p(x)\rangle$ yaitu $\langle p(x)\rangle=\{p(x)r(x) \mid r(x)\in F[x]\}$ adalah ideal maksimal jika dan hanya jika $p(x)$ tak tereduksi di $F[x]$.

Bukti :

$(\Rightarrow)$Misalkan $I=\langle p(x)\rangle$ ideal maksimal. Tulis $p(x)=f(x)g(x)$, untuk suatu $f(x),g(x)\in F[x]$ dengan $\operatorname{der}(f(x))\geq 0$ dan $\operatorname{der}(g(x))\geq 0$. Karena $\langle p(x)\rangle$ ideal maksimal maka $\langle p(x)\rangle$ ideal prim. Akibatnya, karena

$f(x)g(x) \in \langle p(x) \rangle$ maka $f(x) \in \langle p(x) \rangle$ atau $g(x) \in \langle p(x) \rangle$. Dengan demikian diperoleh der($f(x)$) $\geq$ der$(p(x))$ atau der($g(x)$)$\geq$ der$(p(x))$. Dari hubungan $p(x) = f(x)g(x)$ maka der $(p(x))$ = der($f(x)$) + der($g(x)$). Ini memberikan der($f(x)$)≤ 0 atau der($g(x)$)≤ 0. Dengan demikian der($g(x)$) = 0 atau der($f(x)$) = 0. Jadi $p(x)$ tak tereduksi di $F[x]$.

($\Leftarrow$)Misalkan $p(x)$ tak tereduksi dan N suatu ideal di $F[x]$ yang memenuhi $\langle p(x) \rangle \subseteq N \subsetneq F[x]$. Akan ditunjukkan $N = \langle p(x) \rangle$ atau $N = F[x]$. Karena $F[x]$ suatu daerah Euclid, jadi juga merupakan daerah ideal utama maka $N = \langle g(x) \rangle$ untuk suatu $g(x) \in F[x]$.

Karena $p(x) \in N$, tulis $p(x) = g(x)q(x)$, untuk suatu $q(x) \in F[x]$. Karena $p(x)$ tak tereduksi maka der$(g(x)) = 0$ atau der($q(x)) = 0$. Untuk der$(g(x)) = 0$ maka $g(x)$ suatu unit yang berarti $N = \langle g(x) \rangle = F[x]$. Sedangkan untuk der$q(x) = 0$ mak $q(x) =$ c konstan dan diperoleh $g(x) = c^{-1}p(x)$ atau $g(x) \in \langle p(x) \rangle$. Jadi $\langle g(x) \rangle \subseteq \langle p(x) \rangle$ atau $N \subseteq \langle p(x) \rangle$. Akibatnya $N = \langle p(x) \rangle$. Dan terbukti N suatu ideal maksimal. ■

2.6 Ruang Vektor

Definisi 2.6.1

Misalkan V sembarang himpunan tak kosong dan F suatu lapangan. V dikatakan ruang vektor atas F jika terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan $\langle V,+,\cdot \rangle$ memenuhi aksioma sebagai berikut:

1. Terhadap penjumlahan $\langle V,+\rangle$ adalah grup komutatif

2. Tindakan F pada V, yaitu pemetaan $F \times V \to V$ dengan pengaitan $(\alpha, v) \mapsto \alpha v$, $\forall(\alpha, v) \in F \times V$, berlaku :

(i) $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$

(ii) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$

(iii) $(\alpha, \beta)v = \alpha(\beta v) = \beta(\alpha v)$

(iv) $1v = v$

$\forall \alpha, \beta \in F$ dan $v, w \in V$

Definisi 2.6.2

Misalkan X subhimpunan tak hampa dari ruang vektor V,

1. Suatu vektor $v \in V$ dikatakan kombinasi linier dari X jika untuk setiap $x \in X$ terdapat $\alpha_x \in K$ yang hampir semuanya nol yang memenuhi $v = \sum_{x \in X} \alpha_x x$.
2. Subhimpunan X dikatakan bebas linier jika kombinasi linier $\sum_{x \in X} \alpha_x x = 0$ hanya dipenuhi oleh $\alpha_x = 0$ untuk setiap $x \in X$
3. Subhimpunan X dikatakan bergantung linier jika X tidak bebas linier artinya untuk setiap $x \in X$ terdapat $\alpha_x \in K$ yang tidak semuannya nol yang memenuhi $\sum_{x \in X} \alpha_x x = 0$
4. Subhimpunan X dikatakan membangun V jika setiap vektor di V merupakan kombinasi linier dari X

5. Subhimpunan X dikatakan basis dari ruang vektor V, jika setiap vektor di V dapat dituliskan (dinyatakan) secara tunggal sebagai kombinasi linier dari X, artinya jika $v = \sum_{x \in X} \alpha_x x = \sum_{x \in X} \beta_x x$ maka $\alpha_x = \beta_x$ untuk setiap $\forall x \in X$.

Sifat 2.6.1

Subhimpunan X dikatakan basis untuk V jika X membangun V dan bebas linier.

Bukti:

Akan ditunjukkan Subhimpunan X basis atas V jika dan hanya jika X membangun V dan bebas linier

($\Rightarrow$) Misalkan X basis atas V. Jelas bahwa X membangun V. Selanjutnya pandang kombinasi linier $v = \sum_{x \in X} \alpha_x x = 0$. Perhatikan bahwa vektor nol di V dapat dituliskan $0 = \sum_{x \in X} 0x$. Dengan demikian, kita mempunyai $0 = \sum_{x \in X} \alpha_x x = \sum_{x \in X} 0x$ dan karena penulisan ini tunggal ,maka $\alpha_x = 0, \forall x \in X$. Ini memberikan X bebas linier.

($\Leftarrow$)Misalkan X membangun V dan bebas linier. Ambil sembarang $v \in V$ dan misalkan $v = \sum_{x \in X} \alpha_x x = \sum_{x \in X} \beta_x x$. Maka kita punyai $\sum_{x \in X} \alpha_x x - \sum_{x \in X} \beta_x x = 0$ atau $\sum_{x \in X} (\alpha_x - \beta_x) x = 0$. Karena X bebas linier maka haruslah $\alpha_x - \beta_x = 0$ atau $\alpha_x = \beta_x$ untuk setiap $\forall x \in X$. Jadi penulisan sembarang vektor di V senantiasa tunggal yang berarti X basis dari V.

Definisi 2.6.3

Misalkan V ruang vektor atas F, maka yang di maksud dengan dimensi V atas F ditulis $\dim_F(V)$ adalah banyaknya elemen dalam basis V atas F.

Definisi 2.6.4

Subhimpunan W dari ruang vektor V dinamakan subruang dari V jika memenuhi $\alpha x + \beta y \in W, \forall x, y \in W$ dan $\alpha, \beta \in F$.