BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab III akan dibahas pemodelan persamaan panas yang menggunakan solusi fundamental persamaan panas pada batang homogen dengan panjang tak hingga pada dimensi satu. Beberapa teori yang akan dipakai dalam pembahasan itu antara lain:

2.1 Teorema Fundamental Kalkulus

Teorema fundamental kalkulus akan digunakan untuk menganalisis persamaan panas pada tahap pemodelan persamaan panas.

Teorema:

Andaikan F suatu fungsi dapat diturunkan pada [a,b], $F^{'}(x) = f(x)$ $f \in R$ pada [a,b] maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bukti:

Untuk semua partisi P di [a,b] dipilih $x \in [x_{i-1}, x_i]$ dan $x_{i-1} \leq y_i \leq x_i$ dimana i = 1,2,3,..n maka

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})F^{'}(y_i)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= (x_i - x_{i-1}) f(y_i)$$

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \{F(x_i) - F(x_{i-1})\} = \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \Delta x_i$$

$$\lim_{\mu(P) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \Delta x_i = F(b) - F(a)$$

dimana $\mu(P) =$ mesh dari P

$$= \max\{\Delta x_i \mid i = 1,2,3 \ldots n\}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Jadi terbukti $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

2.2 Transformasi Fourier

Dalam memecahkan masalah syarat batas pada sebuah interval berhingga $(-L < x < L)$, dengan menggunakan bentuk kompleks dari Deret Fourier sebagai berikut :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x / L} . \qquad 2.1$$

Koefisien deret Fourier sebagai berikut:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(\xi) e^{-in\pi \xi / L} d\xi . \qquad 2.2$$

Seluruh daerah $-L < x < L$ adalah daerah asal pengintegralan dan menggunakan sebuah variabel dummy ξ untuk membedakan dari variabel x. Dengan memperluas pemikiran deret Fourier ke fungsi yang didefinisikan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

pada $-\infty < x < \infty$ dapat diterapkan ke persamaan panas dengan daerah asal tak hingga.

Pada persamaan 2.1 merupakan ekspansi dari suatu fungsi *f(x)* dengan periode *2L* ke dalam deret Fourier. Pada integral Fourier nanti akan membahas deret Fourier pada $L \to \infty$

Mensubsttitusikan persamaan 2.2 ke dalam persamaan 2.1 diperoleh:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(\xi) e^{in\pi\xi/L} d\xi \right\} e^{-in\pi x/L} \quad . \qquad 2.3$$

Variabel x akan didefinisikan pada $-\infty < x < \infty$ sebagai fungsi periodik dengan periode tak hingga.

Dengan memisalkan $\omega = \frac{n\pi}{L}$ sehingga $\Delta\omega = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$,

apabila $\Delta\omega \to 0$ maka $\frac{\pi}{L} \to 0$, persamaan 2.3 menjadi:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi e^{-i\omega x} \qquad 2.4$$

Apabila $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi$ konvergen , dan bila $L \to \infty$ maka persamaan 2.4 menjadi :

$$f(x) = \lim_{L \to \infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{-L}^{L} f(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi \, e^{-i\omega x} \, . \qquad 2.5$$

Misalkan:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi \, e^{-i\omega x} \, .$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Persamaan 2.5 dapat ditulis :

$$f(x) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(\omega)\Delta\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-L}^{L} f(\xi) e^{i\omega\bar{x}} d\xi \right] e^{-i\omega x} d\omega . \qquad 2.6$$

Identitas Integral Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-L}^{L} f(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi \right] e^{-i\omega x} d\omega . \qquad 2.7$$

Menurut Haberman: *F(ω)* merupakan tranformasi Fourier dari *f(x)*:

$$F(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi \qquad 2.8$$

dimana γ adalah konstanta sembarang.

Dari persamaan 2.7 maka didapat:

$$f(x) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \qquad 2.9$$

Persamaan 2.9 menunjukkan bahwa *f(x)* adalah komposisi atau gabungan dari gelombang $e^{-i\omega x}$ untuk semua bilangan gelombang *ω*. *F(ω)* merupakan transformasi fourier dari *f(x)*, mewakili amplitudo dari gelombang dengan bilangan gelombang *ω*, transformasi Fourier ditentukan oleh pengintegralan atas seluruh daerah asal yang tak hingga

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Persamaan 2.8 dan 2.9 juga diketahui sebagai pasangan transformasi Fourier. Dalam persamaan 2.9 ketika diintegralkan atas ω (disebut variabel transformasi) maka didapat sebuah fungsi x, begitu juga dengan persamaan 2.9 ketika diintegralkan atas x, dihasilkan sebuah fungsi ω.

Persamaan 2.8 dan 2.9 berlaku jika $f(x)$ memenuhi kondisi –kondisi berikut ini:

1. $f(x)$ kontinu disetiap segmennya pada setiap interval berhingga
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ konvergen, yaitu $f(x)$secara mutlak dapat diintegralkan pada $(-\infty,\infty)$

2.2.1 Invers Transformasi Fourier dari Gaussian

Didalam sub bab 2.3 untuk melengkapi solusi persamaan panas, akan digunakan invers transformasi Fourier dalam "kurva dalam bentuk lonceng" yang dikenal sebagai Gaussian :

$$K(\omega) = e^{-\alpha\omega^2} \qquad 2.10$$

yang sudah disketsa pada gambar 2.1. Fungsi $g(x)$, merupakan transformasi Fourier dari $K(\omega)$, yang ditunjukkan sebagai berikut:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{-i\omega x}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\omega^2} e^{-i\omega x}\,d\omega\,. \qquad 2.11$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dengan mengevaluasi hasil integral didalam persamaan 2.9 didapat:

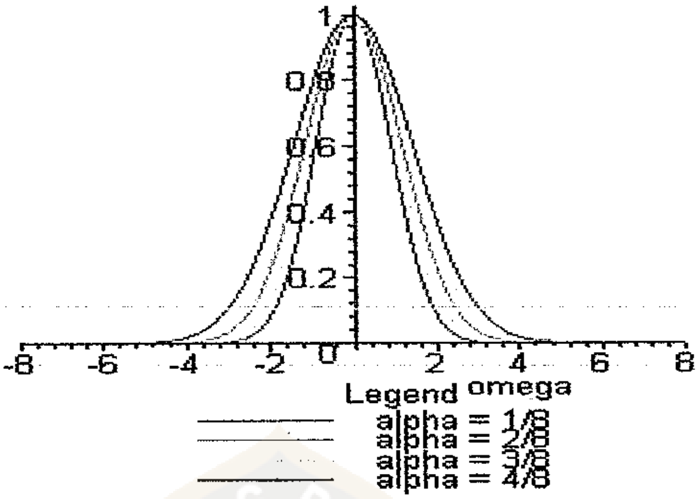
$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(\omega + i(x/2\alpha))^2} e^{-x^2/4\alpha}\, d\omega$$

$$g(x) = e^{-x^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(\omega + i(x/2\alpha))^2}\, d\omega$$

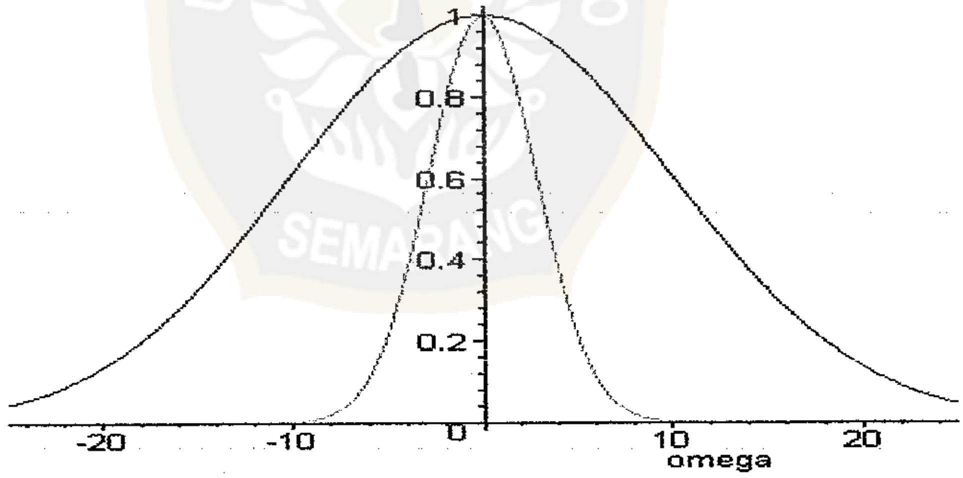
$$g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ e^{-x^2/4\alpha} \qquad 2.12$$

Hasil persamaan 2.12 bisa dipakai untuk mendapatkan transformasi Fourier *f(ω)* dari model Gaussian $e^{-\beta x^2}$. Transformasi Fourier $e^{-x^2/4\alpha}$ adalah $\sqrt{\alpha/\pi}\ e^{-\alpha\omega^2}$, dengan menempatkan β = 1/4α, transformasi Fourier dari $e^{-\beta x^2}$ adalah $1/\sqrt{\alpha/\pi}\ e^{-\omega^2/4\beta}$, maka transformasi Fourier dari Gaussian juga Gaussian. Jika α lebih kecil , maka *f(x)* adalah " memenuhi semua " bidang Gaussian dan transformasi Fouriernya meruncing keatas mendekati $\omega = 0$. Sebaliknya jika *f(x)* hampir berada diposisi atas maka fungsi Gaussian α nilainya menjadi besar, dan transformasi Fourier menjadi membesar, hal ini dapat dilihat pada gambar 2.2

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)



Gambar 2.1
Lonceng Gaussian



Legenda

t = 50
t = 5

Gambar 2.2

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.3 Solusi Fundamental Persamaan Panas Dimensi Satu

Persamaan panas pada domain tak hingga dimana mempunyai sumber panas adalah :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{K}\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + F(x,t) \quad , -\infty < x < \infty \quad , \mathrm{K} > 0\, ,\ t > 0 \qquad 2.13$$

Kondisi awal adalah:

$$u(x,0)=f(x)\, . \qquad , -\infty < x < \infty$$

Didefinisikan fungsi Green $G(x,t;\xi,t_0)$ adalah solusi dari persamaan 2.13 sehingga persamaan 2.29 dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \mathrm{K}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \delta(x-\xi)\delta(t-t_0). \qquad 2.14$$

Dimana $\delta(x-\xi)\delta(t-t_0)$ merupakan fungsi dari sumber panas .

Ketika fungsi Green melambangkan respon suhu pada posisi x (dan pada waktu t) dikarenakan sebuah sumber panas yang terkonsentrasi pada posisi ξ (dan pada waktu t_0), akan tetapi bahwa fungsi Green $G(x,t;\xi,t_0)$ adalah bernilai 0 ketika sumber panas belum beraksi, yang dapat disajikan sebagai berikut:

$$G(x,t;\xi,t_0) = 0 \quad \text{untuk} \quad t < t_0 \qquad 2.15$$

Persamaan 2.15 disebut prinsip sebab akibat.

Untuk menyelesaikan persamaan 2.14 dan 2.15 akan digunakan transformasi Fourier pada fungsi Green. Misalkan $\overline{G}(\omega,t;\xi,t_0)$ adalah hasil transformasi Fourier dari fungsi Green $G(x,t;\xi,t_0)$, sehingga $\overline{G}(\omega,t;\xi,t_0)$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\overline{G}(\omega,t;\xi,t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t;\xi,t_0)e^{i\omega x}dx.$$

$$G(x,t;\xi,t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(\omega,t;\xi,t_0)e^{-i\omega x}d\omega.$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

1. Transformasi Fourier pada persamaan 2.13 yaitu transformasi Fourier dari $\frac{\partial G}{\partial t}$ sama dengan K kali transformasi Fourier dari $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ ditambah $(\delta(x-\xi)\delta(t-t_0))$. Sehingga didapatkan:

$$\mathrm{F}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) = \mathrm{K}\ \mathrm{F}\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \mathrm{F}(\delta(x-\xi)\delta(t-t_0)). \qquad 2.16$$

2. $$\mathrm{F}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial t} e^{i\omega x} dx$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} G(x,t;\xi,t_0) e^{i\omega x} dx\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\overline{G}(\omega,t;\xi,t_0)$$

3. Dengan menggunakan integral bagian demi bagian untuk menghitung $\mathrm{F}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)$ didapatkan:

$$\mathrm{F}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x} e^{i\omega x} dx$$
$$= \left.\frac{G\, e^{i\omega x}}{2\pi}\right|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t;\xi,t_0) e^{i\omega x} dx. \qquad 2.17$$

4. Jika $G \to 0$, maka $\left.\frac{G\, e^{i\omega x}}{2\pi}\right|_{-\infty}^{\infty} = 0$, sehingga persamaan 2.17 dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathrm{F}\ \frac{\partial G}{\partial x} = -i\omega\quad \mathrm{F}\ [G] = -i\omega\overline{G}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

5. Dengan cara sama seperti langkah 2 sampai 4, transformasi Fourier pada turunan yang lebih tinggi didapatkan:

$$\mathrm{F}\left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right] = -i\omega \quad \mathrm{F}\left[\frac{\partial G}{\partial x}\right] = (-i\omega)^2 \overline{G}.$$

Persamaan 2.16 dapat disajikan sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{G}(\omega,t;\xi,t_0) = \mathrm{K}(-i\omega)^2 \overline{G}(\omega,t;\xi,t_0)$$

$$= -\mathrm{K}\omega^2 \overline{G}(\omega,t;\xi,t_0). \qquad 2.18$$

Apabila $(\delta(x-\xi)\delta(t-t_0)) = 0$

6. Akan dicari transformasi Fourier dari $(\delta(x-\xi)\delta(t-t_0))$

$$\mathrm{F}(\delta(x-\xi)\delta(t-t_0)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi)\delta(t-t_0)e^{i\omega x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\delta(t-t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi)e^{i\omega x}\,dx$$

$$= \frac{e^{i\omega\xi}}{2\pi}\delta(t-t_0)$$

Sehingga didapatkan persamaan diferensial untuk transformasi Fourier dari fungsi Green:

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial t} = -\mathrm{K}\omega^2 \overline{G} + \frac{e^{i\omega\xi}}{2\pi}\delta(t-t_0). \qquad 2.19$$

Dengan mentransformasikan Fourier persamaan 2.15 didapatkan sebagai berikut:

$$\overline{G}(\omega,t;\xi,t_0) = 0 \qquad t < t_0 . \qquad 2.20$$

Transformasi Fourier dari fungsi Green juga diterapkan prinsip sebab akibat pada persamaan 2.15.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Solusi umum dari persamaan diferensial biasa pada persamaan 2.18 adalah:

$$\overline{G}(\omega,t;\xi,t_0)=c(\omega)e^{-K\omega^2(t-t_0)}.$$

$c(\omega)$ biasanya ditentukan dengan menghitung kondisi awal pada $t=t_0$. Ketika $\overline{G}(\omega,t;\xi,t_0)=0$ untuk $t<t_0$ dan fungsi $\delta(x-\xi)\delta(t-t_0)$ bekerja ketika $t=t_0$, disini $c(\omega)$ ditentukan dengan mengintegralkan persamaan 2.19 dari $t=t_{0-}$ ke $t=t_{0+}$, didapatkan:

$$\overline{G}(t_{0+})-\overline{G}(t_{0-})=\frac{e^{i\omega\xi}}{2\pi}$$

Menurut prinsip sebab akibat didapatkan $\overline{G}(t_{0-})=0$, maka $c(\omega)$ ditentukan dengan menggunakan $\overline{G}(t_{0+})=\frac{e^{i\omega\xi}}{2\pi}$. Sehingga transformasi Fourier pada fungsi Green untuk persamaan 2.16 adalah:

$$\overline{G}(\omega,t;\xi,t_0)=\frac{e^{i\omega\xi}}{2\pi}e^{-K\omega^2(t-t_0)}.$$

Dengan menggunakan invers transformasi Fourier sehingga didapatkan transformasi Fourier yang disajikan dalam fungsi Green sebagai berikut:

$$G(x,t;\xi,t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-K\omega^2(t-t_0)}}{2\pi}e^{-i\omega(x-\xi)}d\omega.$$

$$G(x,t;\xi,t_0)=\frac{1}{\sqrt{4\pi K(t-t_0)}}e^{-(x-\xi)^2/4K(t-t_0)}. \qquad 2.21$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

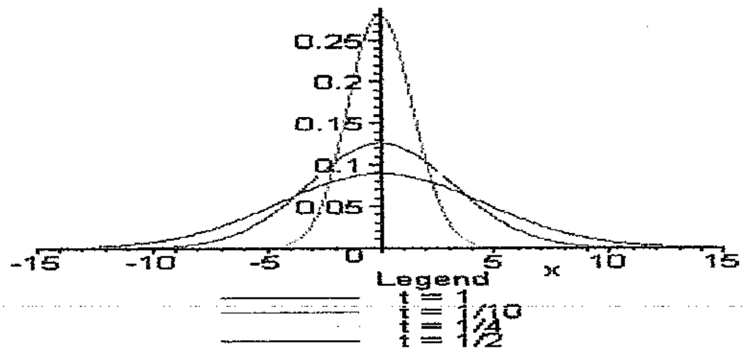
Fungsi – fungsi influens: Menurut persamaan 2.10 $e^{-k\omega^2 t}$ adalah sebuah gaussian. Jika $\alpha = kt$ didapatkan model gaussian

$g(x) = \sqrt{\pi / 4kt}\; e^{-x^2/4kt}$. Dengan menulis kembali persamaan 2.21 maka didapatkan :

$$G(x,t;\xi,t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K(t-t_0)}} e^{-(x-\xi)^2/4K(t-t_0)}$$

$G(x,t;\xi,t_0)$ disebut dengan fungsi influens. Persamaan 2.20 mengukur respon suhu pada posisi x (dan pada waktu t) dikarenakan sebuah sumber panas yang terkonsentrasi pada posisi ξ (dan pada waktu t_0). Pada waktu yang tetap pengaruh yang besar terjadi ketika $x = \xi$,sehingga temperatur awal pada posisi ξ mempunyai pengaruh yang besar pada tempat yang sama dan mempengaruhi temperatur pada tempat yang lain .Gambar fungsi influence $G(x,t;\xi,t_0)$ dapat dilihat pada Gambar 2.3, pada Gambar 2.3 menunjukkan bahwa pengaruh temperatur yang menyebar, $G(x,t,\xi,t_0)$ meruncing ketika t bernilai kecil tetapi $G(x,t;\xi,t_0)$ melandai ketika t bernilai besar. Jadi temperatur awal pada posisi x mempunyai pengaruh yang besar pada tempat yang sama, tetapi juga mempengaruhi temperatur (dalam derajat yang kecil) ketempat lainnya .

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)



Gambar 2.3

Fungsi Influensi $G(x,t;\xi,t_0)$ untuk Persamaan Panas

$G(x,t;\xi,t_0) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi K(t-t_0)}} e^{-(x-\xi)^2/4K(t-t_0)}$ untuk selanjutnya fungsi $G(x,t;\xi,t_0)$ dituliskan sebagai fungsi $v(x,t;\xi,\tau)$. $v(x,t;\xi,\tau)$ merupakan sebuah fungsi yang berbentuk Gaussian.

Fungsi yang sangat berguna pada banyak masalah aliran panas dimensi satu adalah :

$$v(x,t;\xi,\tau) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(x-\xi)^2/4K(t-\tau)}}{\sqrt{4\pi K(t-\tau)}} & , -\infty < x < \infty \ , t > \tau , \ K > 0 \\ 0 & , -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{2.22}$$

$v(x,t;\xi,\tau)$ adalah solusi fundamental persamaan panas dimensi satu dengan panjang tak hingga.

Disini ξ dan τ adalah parameter bebas dari x dan t. Fungsi v disebut solusi fundamental persamaan panas homogen.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{K}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad 2.23$$

Akan dibuktikan bahwa persamaan 2.22 merupakan solusi dari persamaan 2.23

Keempat sifat berkut ini untuk membuktikan bahwa persamaan 2.22 merupakan solusi dari persamaan 2.23. Dengan memisalkan ξ dan τ tetap. Maka:

1. v ditetapkan kontinu kecuali di titik (ξ , τ), dimana v mempunyai diskontinu yang tak terbatas yaitu :

$$\lim_{t\to\tau} v(\xi,t;\xi,\tau) = \lim_{t\to\tau}\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa(t-\tau)}} = +\infty, \quad t > \tau$$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa v kontinu, misalkan (a,b) menjadi titik di bidang xt dimana $(a,b) \neq$ (ξ , τ). Sehingga untuk memenuhi sifat (1) cukup menunjukkan:

1. $v(a,b;\xi,\tau) = \dfrac{e^{-(a-\xi)^2/4\mathrm{K}(b-\tau)}}{\sqrt{4\pi\mathrm{K}(b-\tau)}}$

2. $\lim\limits_{(x,t)\to(a,b)} \dfrac{e^{-(x-\xi)^2/4\mathrm{K}(t-\tau)}}{\sqrt{4\pi\mathrm{K}(t-\tau)}} = \dfrac{e^{-(a-\xi)^2/4\mathrm{K}(b-\tau)}}{\sqrt{4\pi\mathrm{K}(b-\tau)}}$

3. $v(a,b;\xi,\tau) = \lim\limits_{(x,t)\to(a,b)} \dfrac{e^{-(x-\xi)^2/4\mathrm{K}(t-\tau)}}{\sqrt{4\pi\mathrm{K}(t-\tau)}} = \dfrac{e^{-(a-\xi)^2/4\mathrm{K}(b-\tau)}}{\sqrt{4\pi\mathrm{K}(b-\tau)}}$

Jadi terbukti $v(x,t;\xi,\tau)$ kontinu pada semua bidang xt kecuali di titik (ξ,τ)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2. v adalah solusi persamaan panas 2.23 untuk $t > \tau$

Bukti:

Untuk menunjukkan v adalah solusi persamaan panas untuk $t > \tau$,

Maka digunakan pemisalan :

$$A = e^{-(x-\xi)^2/4K(t-\tau)} \quad \text{dan } B = \sqrt{t-\tau} \quad \text{maka}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{-2(x-\xi)}{4K(t-\tau)} e^{-(x-\xi)^2/4K(t-\tau)}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{(x-\xi)^2}{4K(t-\tau)^2} e^{-(x-\xi)^2/4K(t-\tau)} \quad \text{dan}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 0 .$$

Sehingga fungsi $v(x,t;\xi,\tau)$ dapat disajikan dalam bentuk berikut ini:

$$v = \frac{1}{\sqrt{4\pi K}} \frac{AB}{B}$$

dan $$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi K}} \frac{\frac{\partial A}{\partial t} B - \frac{\partial B}{\partial t} A}{B^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi K}} \left[\frac{(x-\xi)^2}{4K(t-\tau)^{5/2}} - \frac{1}{2(t-\tau)^{3/2}} \right] e^{-(x-\xi)^2/4K(t-\tau)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\pi K}} \frac{\frac{\partial A}{\partial x} B - \frac{\partial B}{\partial x} A}{B^2}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\pi K(t-\tau)}}\left[-\frac{x-\xi}{2K(t-\tau)}\right]e^{-(x-\xi)^2/4K(t-\tau)}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi K(t-\tau)}}\left[-\frac{1}{2\kappa(t-\tau)}+\frac{(x-\xi)^2}{4K^2(t-\tau)^2}\right]e^{-(x-\xi)^2/4K(t-\tau)}.$$

Akan dibuktikan bahwa persamaan 2.22 merupakan solusi dari persamaan 2.23, sehingga persamaan 2.23 dapat disajikan dalam bentuk

$$\frac{\partial v}{\partial t} = K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad 2.24$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa}}\left[-\frac{1}{2(t-\tau)^{3/2}}+\frac{(x-\xi)^2}{4K(t-\tau)^{5/2}}\right]e^{-(x-\xi)^2/4K(t-\tau)} \qquad 2.25$$

$$K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi K(t-\tau)}}\left[-\frac{1}{2(t-\tau)}+\frac{(x-\xi)^2}{4K(t-\tau)^2}\right]e^{-(x-\xi)^2/4K(t-\tau)} \qquad 2.26$$

Persamaan 2.25 sama dengan persamaan 2.26

Jadi persamaan 2.22 merupakan solusi dari $\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

3. $\int_{-\infty}^{\infty} v(x,t;\xi,\tau)dx = 1 \quad , \quad t > \tau$

akan dibuktikan bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} v(x,t;\xi,\tau)dx = 1 \quad , \quad t > \tau$

Bukti :

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x,t;\xi,\tau)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(x-\xi)^2/4K(t-\tau)}}{\sqrt{4K\pi(t-\tau)}}dx \qquad 2.27$$

Dengan memisalkan $\eta = \frac{x-\xi}{\sqrt{4K(t-\tau)}}$. 2.28

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Persamaan 2.28 disubstitusikan ke dalam persamaan 2.27 sehingga diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x,t;\xi,\tau)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta\,,$$

dimana $d\eta = \dfrac{dx}{\sqrt{4K(t-\tau)}}$.

Akan ditunjukkan: $\int_{-\infty}^{\infty} v(x,t;\xi,\tau)dx = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta = 1$.

Dengan memisalkan $I^2 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy$

$$I^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\,.$$

Nilai I^2 akan dirubah ke bentuk koordinat polar sehingga digunakan substitusi sebagai berikut: $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$

$$I^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}rdrd\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty} re^{-r^2}dr$$

$$I^2 = \frac{1}{\pi}.2\pi.\frac{1}{2} = \frac{\pi}{\pi}$$

$$I = 1$$

sehingga $\int_{-\infty}^{\infty} v(x,t;\xi,\tau)dx = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta = 1$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

4. $v(\xi,t;x,\tau) = v(x,t;\xi,\tau)$, $t > \tau$

Solusi dari persamaan diferensial mempunyai sifat dijamin ada dan tunggal dimana sifat 4 menunjukkan sifat tersebut.

Jika tidak ada sumber panas dalam batang dengan panjang tak hingga, temperatur u memenuhi :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{K}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ,-\infty < x < \infty \ , \ t > \tau$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , -\infty < x < \infty$$

Jika ξ tetap dan $\tau = 0$, maka solusi fundamentalnya:

$$v(x,t;\xi,0) = \frac{e^{-(x-\xi)^2} / 4\mathrm{K}t}{\sqrt{4\pi\mathrm{K}t}} \qquad 2.29$$

Solusi fundamental persamaan panas dimensi satu sangat berperan dalam menentukan temperatur pada persamaan panas pada batang tak hingga.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)