# BAB II

# DASAR TEORI METODE BOOTSTRAP

## 2.1. Probabilitas

Sebuah pendekatan aksioma dilakukan untuk mendefinisikan probabilitas sebagai suatu fungsi himpunan dimana elemen-elemen daerah asal adalah himpunan-himpunan dan elemen-elemen dari range bilangan riil.

Jika kejadian A adalah sebuah elemen pada daerah asal fungsi ini, kita pergunakan notasi fungsi P(A), f(A) dan seterusnya untuk menunjukkan elemen-elemen yang berkaitan dalam rangenya.

**Definisi 2.1.1**

Jika sebuah percobaan $\varepsilon$ mempunyai ruang sampel $\zeta$ dan sebuah kejadian A di definisikan pada $\zeta$, maka P (A) adalah suatu bilangan riil yang disebut probabilitas dari peristiwa A atau probabilitas A, dan fungsi P (.) mempunyai syarat-syarat sebagai berikut :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ untuk setiap kejadian A dari $\zeta$.
2. $P(\zeta) = 1$
3. Untuk setiap bilangan yang terbatas k dari kejadian-kejadian yang saling meniadakan didefinisikan atas $\zeta$.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} Ai\right) = \sum_{i=1}^{k} P(Ai)$$

4. Jika $A_1$, $A_2$ , $A_3$, ..... adalah deret yang tidak dapat dihitung dari kejadian-kejadian yang saling meniadakan didefinisikan pada y, maka P $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ..) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ....$

**Definisi 2.1.2.**

Nilai $f_A = m_A / m$ disebut frekuensi relatif kejadian A, yang mempunyai batasan-batasan :

1. $0 \leq f_A \leq 1$.
2. $f_A = 0$ jika hanya dan hanya jika A tidak pernah terjadi dan $f_A = 1$ jika dan hanya jika A terjadi pada setiap perulangan .
3. Jika A dan B kejadian bebas (saling meniadakan) maka $f_{A \cup B} = f_A + f_B$

Untuk m mendekati $\infty$ maka $P(A) = m_A / m = P_A$.

Percobaan yang dilakukan berkali-kali, frekuensi relatif dari kejadian A akan menyimpang lebih kecil dan mengurangi (dari satu ulangan ke ulangan lain), sebagaimana ulangan semakin bertambah.

**Teorema 2.1.1**

Bila β adalah himpunan kosong, maka P(β) = 0.

**Bukti :**

Perhatikan bahwa $\zeta = \zeta \cup \varnothing$ dan $P(\zeta) = P(\zeta) + P(B)$, sehingga $P(B)=0$

**Teorema 2.1.2**

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

**Bukti :**

Perhatikan bahwa $\zeta = A \bigcup \overline{A}$ dan $P(\zeta) = P(A) + P(\overline{A})$ , $P(\zeta) = 1$, maka $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

**Teorema 2.1.3**

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**Bukti :**

$A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$, dimana A dan $(B \cap \overline{A})$ adalah bebas dan $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$, dimana $(B \cap A)$ dan $(B \cap \overline{A})$ adalah bebas, kemudian $P(B \cup A) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$ dan $P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$, didapat $P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$ sehingga $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Contoh :

Jika A dan B kejadian yang saling asing dan diketahui P (A) = 0,20 sedangkan P (B) = 0,30 maka didapatkan :

a. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}80$

b. $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}70$

c. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$

d. $P(A \cap B) = 0$.

**Definisi 2.1.3.**

Probabilitas bersyarat adalah probabilitas terjadinya kejadian A dengan syarat bahwa B sudah terjadi atau akan terjadi ditulis :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

atau

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

**Definisi 2.1.4.**

A dan B bebas jika dan hanya jika $P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$

**Teorema 2.1.4**

Jika A dan B adalah kejadian-kejadian yang bebas, maka :

P (A/B) = P(A) dan P (B/A) = P (B)

**Bukti :**

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)P(B) / P(B) = P(A)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A)P(B) / P(A) = P(B)$$

Contoh :

Misalkan sebuah sampel random yang besarnya dua dipilih dari populasi yang besarnya 100, dan diketahui 98 dari 100 item adalah adalah baik. Sampel tersebut dipilih dengan cara bahwa item pertama diselidiki dan diganti sebelum item kedua dipilih.

Misalnya : A : item pertama diteliti baik.

B : item kedua diteliti baik.

Maka probabilitas ke dua item tersebut baik adalah :

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) = \frac{98}{100}\frac{98}{100} = 0.9604$$

Jika sampel diambil tanpa diganti sehingga item pertama tidak diganti sebelum item dipilih maka :

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A) = \frac{98}{100}\frac{97}{99} = 0.9602$$

**2.2. Variabel Acak ( Random Variable)**

Suatu hasil pengumpulan data, baik merupakan kegiatan riset maupun eksperimen dapat berupa variabel diskrit maupun variabel kontinue. Variabel diskrit adalah variabel yang nilainya tidak dapat diwakili oleh suatu titik dalam suatu interval sedangkan variabel kontinu adalah variabel yang dapat diwakili oleh seluruh titik dalam interval.

**Definisi 2.2.1**

Jika $\varepsilon$ sebuah percobaan yang memiliki ruang sampel $\zeta$ dan x sebuah fungsi yang dinotasikan sebuah bilangan riil x (e) untuk setiap hasil $e \in \zeta$, kemudian x (e) disebut varibel random.

**Definisi 2.2.2**

Jika X adalah sebuah variabel random diskrit yang dihubungkan dengan sebuah bilangan $p_x(x_i) = p(X = x_i)$ dengan masing-masing hasil $x_i$, dalam $p_x$ untuk i = 1,2, ...., n dimana bilangan $p_x(x_i)$ memenuhi :

1. $P_x(x_i) \geq 0$, untuk semua i.
2. $\sum_{i=1}^{x} P_x(x_i) = 1$

**Definisi 2.2.3**

Untuk sebuah variabel random kontinu x, didefinisikan :

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_x(x)\,dx$$

$f_x$ dinyatakan sebagai fungsi densitas probabilitas (fdp), memenuhi kondisi-kondisi sebagai berikut :

1. $f_x(x) \geq 0$, untuk semua $x \in R_x$
2. $\int f_x(x)\,dx = 1$

contoh :

Sebuah variabel random x mempunyai fungsi densitas probabilitas yang diberikan :

$f_x(x) = x \quad , 0 \leq x < 1$

$\quad = 2 - x , 1 \leq x < 2$

$\quad = 0 \quad$ , yang lain

a. $P(-1 < x < 1/2) = \int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_0^{1/2} x\,dx = 1/8$

b. $P(x \leq 3/2) = \int_{-x}^{0} 0\,dx + \int_0^1 x\,dx + \int_1^{3/2} (2 - x)\,dx = 7/8$

c. $P(1/4 < x < 3/2) = \int_{1/4}^{1} x\,dx + \int_{1}^{3/2} (2-x)\,dx = 27/32$

### 2.3. Nilai Harapan ( Ekspetasi )

Jika x adalah sebuah variabel random dan Y = H(x) adalah sebuah fungsi dari x, maka nilai harapan H(x) didefinisikan :

$E[H(x)] = \sum_{i=1}^{x} H(x_i)\, p(x_i)$ , untuk x yang diskrit

$E[H(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(x_i)\, f(x_i)\, dx$ , untuk x yang kontinu

Jika H(x) = x maka $E[H(x)] = E(x) = \mu$, sehingga nilai harapan variabel random x adalah rata-rata $\mu$.

Jika $H(x) = (x-\mu)^2$ , maka $E[(x-\mu)^2] = \sigma^2$.

Jika H(x) = x, maka $var(x) = E[(x-E(x))^2] = E(x^2) - [E(x)]^2$

contoh :

X adalah banyaknya pesanan barang dalam satuan yang masuk selama satu minggu. P(X) adalah probabilitas terjadinya X=x.

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(x) | 0,125 | 0,375 | 0,175 | 0,125 |

a. $\mu_x = E(x) = \sum_{i=1}^{x} x_i\, p(x_i)$

$= 0\ p(0) + 1\ p(1) + 2\ p(2) + 3\ p(3)$

$= 0(0{,}125) + 1(0{,}375) + 2(0{,}375) + 3(0{,}125)$

$= 1{,}5$

b. $\sigma^2 = E\ [(x-E(x))^2]$

$= E\ [(x-1{,}5)^2]$

$= \sum (x_i-1{,}5)^2\ p(x_i)$

$= (2{,}25)(0{,}125) + (0{,}25)(0{,}375) + (0{,}25)(0{,}375) + (2{,}25)(0{,}125)$

$= 0{,}75$

$\sigma = 0{,}865$

**2.4. Penarikan Sampel**

Pengumpulan data dengan cara sensus, walaupun dapat diperoleh data statistik yang sebenarnya (parameter), biasanya banyak mengeluarkan biaya dan tenaga. Misalnya sensus penduduk, sensus industri, sensus pertanian, sensus pegawai negri dimaksudkan untuk memperoleh data sebenarnya. Data penduduk meliputi antara lain : jumlah penduduk menurut umur, menurut lapangan kerja dan lain sebagainya, data industri : jumlah karyawan menurut pendidikan, menurut lapangan kerja dan lain sebagainya.

Berdasarkan alasan tersebut, maka dalam prakteknya sering digunakan penarikan sampel yang akan memberikan nilai taksiran atau penduga (penduga jumlah rata-rata, prosentase, simpangan baku dan lain sebagainya).

Metode penarikan sampel lebih praktis, lebih mudah dan memerlukan tenaga yang lebih sedikit dibandingkan dengan sensus.

Di dalam setiap kegiatan pengumpulan data, kita harus tentukan dahulu elemennya (sesuatu yang menjadi obyek penyelidikan atau satuan penelitian, misalnya orang, organisasi, barang dan lain sebagainya), kemudian karakteristik apa yang akan diketahui dari elemen tersebut. Karakteristik yang dimaksud di sini adalah sifat-sifat, ciri-ciri atau hal-hal yang dimiliki elemen.

Sensus ialah suatu cara pengumpulan data bila seluruh populasi diselidiki satu persatu. Hasilnya disebut data sebenarnya yang disebut parameter, sedangkan penarikan sampel ialah cara pengumpulan data bila hanya sebagian elemen (sampel) yang diselidiki.

Suatu himpunan bagian pengamatan dipilih dari sebuah populasi disebut dengan sampel. Data penarikan sampel atau disebut dengan sampling merupakan nilai penduga karena adanya kesalahan penarikan sampel (sampling error).

Penarikan sampel acak (sampel random) sederhana adalan penarikan sampel dimana pemilihan elemen-elemen populasi dilakukan sedemikian rupa sehingga setiap elemen mempunyai peluang yang sama untuk dipilih. Penarikan sampel (sampling) terdiri dari beberapa macam antara lain : penarikan sampel acak berlapis (stratified random sampling), penarikan sampel sistematik (systematic sampling), penarikan sampel gerombol (cluster sampling) dan lain sebagainya. Pada penulisan ini kita hanya membahas penarikan sampel acak sederhana.

**2.5. Perkiraan (Estimasi) Parameter**

Statistik induktif adalah proses memperoleh informasi dari data sampel yang digunakan untuk menarik kesimpulan tentang populasi dari sampel yang dipilih. Teknik statistik induktif dapat dibagi dua bagian besar yaitu estimasi parameter dan pengujian hipotesis.

Sebagai contoh sebuah masalah estimasi parameter, misalnya seorang ilmuwan sedang menghadakan analisis kekuatan tekanan beton. Masing-masing kekuatan model beton merupakan suatu variabel. Konsekuensinya ilmuan tersebut tertarik untuk memperkirakan variabilitas dari populasi ini. Kita menyajikan metode untuk memperoleh estimasi tunggal parameter, seperti rata-rata dan varian populasi serta metode untuk memperoleh perkiraan interval parameter yang disebut interval keyakinan (confidence interval).

Suatu perkiraan tunggal pada sebuah parameter populasi adalah nilai tunggal numerik pada sebuah statistik yang berhubungan dengan parameter tersebut. Perkiraan tunggal adalah sebuah pemilihan yang unik untuk sebuah nilai parameter populasi yang tidak diketahui. Satu parameter dapat mempunyai beberapa penduga.

Ada beberapa perbedaan utama estimator tunggal untuk suatu parameter. Misalnya jika kita ingin memperkirakan rata-rata sebuah variabel random, kita harus perhatikan salah satu rata-rata sampel, median sampel atau mungkin observasi yang paling kecil dalam sampel sebagai estimator tunggal. Agar dapat menentukan estimator tunggal sebuah parameter tertentu adalah satu-satunya yang paling terbaik untuk dipergunakan, kita perlu menguji sifat-sifatnya secara statistik dan mengembangkan beberapa kriteria untuk perbandingan estimator.

Adapun sifat-sifat yang dimiliki penduga (estimator) :

a. Penduga tak bias (unbias estimator)

θ merupakan penduga tak bias apabila E $(\hat{\theta})$ = θ dan θ dikatakan penduga bias (biased estimator) jika E$(\hat{\theta}) \neq \theta$ dan besarnya bias adalah [E$(\hat{\theta})$-θ].

contoh :

x merupakan penduga tak bias dari μ sebab $E(\overline{X}) = E((1/n)\sum_{i=1}^{x} x) = (1/n)$

$E(\sum_{i=1}^{x} x)$

$= 1/n\, E(\sum_{i=1}^{x} \mu) = 1/n \cdot n \cdot \mu = \mu$

b. Penduga konsisten (consistent estimator) θ merupakan penduga konsisten apabila nilai $\hat{\theta}$ mendekati nilai θ untuk n mendekati tak hingga. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1$$

c. Suffient estimator

$\hat{\theta}$ merupakan sufficient estimator apabila $\hat{\theta}$ mencakup seluruh informasi tentang $\hat{\theta}$ yang terkandung didalam sampel. Maksudnya adalah distribusi bersyarat dari variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sebagai sampel, untuk nilai θ yang diketahui, tidak tergantung pada parameter θ, atau dapat ditulis sebagai berikut :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n / \hat{\theta})\, h(\hat{\theta}, \theta).$$

Rata-rata error kuadrat suatu estimator $\hat{\theta}$ didefinisikan sebagai :

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$

Rata-rata error kuadrat dapat juga ditulis sebagai berikut :

$$MSE(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))]^2 + [\theta - E(\hat{\theta})]^2$$

$$= V(\hat{\theta}) + (Bias)^2$$

Rata-rata error kuadrat $\hat{\theta}$ sama dengan varian estimator ditambah bias kuadrat. Jika $\hat{\theta}$ adalah sebuah estimator yang unbias pada $\theta$, maka rata-rata error kuadrat $\hat{\theta}$ sama dengan varian $\hat{\theta}$.

### 2.5.1. Metode Maximum Likelihood

Metode maximum likelihood adalah suatu metode yang paling baik untuk memperoleh sebuah estimator tunggal. Misalkan X variabel random dengan distribusi probabilitas $f(x, \theta)$, dimana parameter tunggal $\theta$ tidak diketahui. Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ menjadi nilai yang diobservasi didalam suatu sampel random yang besarnya n. Maka fungsi Likelihood sampel tersebut adalah :

$$L(\theta) = f(x_1, \theta)\, f(x_2, \theta) \ldots f(x_n, \theta)$$

contoh :

Misal x variabel random Bernaulli.

$$p(x) = p^x (1-p)^{1-x} \text{ , untuk } x = 0,1$$
$$= 0 \text{ , yang lain}$$

$$L(p) = p^{x1} (1-p)^{1-x1} .\, p^{x2} (1-p)^{1-x2} \ldots p^{xn} (1-p)^{1-xn}$$

$$= \prod_{1}^{n} p^{xi} (1-p)^{1-xi}$$

$$= p^{\Sigma xi} (1-p)^{n-\Sigma xi}$$

jika $\hat{p}$ memaksimumkan L(p) maka $\hat{p}$ juga memaksimumkan Ln L(p), sehingga logaritma Likelihood :

$$\text{Ln } L(p) = \sum_{i=1}^{x} x_i \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{x} x_i\right) \ln(1-p)$$

maka :

$$\partial \text{ Ln } L(p)/\partial p = \sum_{i=1}^{x} x_i / p - \left(n - \sum_{i=1}^{x} x_i\right) / (1-p)$$

$$= 0$$

Didapat estimator maximum Likelihood yaitu :

$$\sum_{i=1}^{x} x_i / p = \left(n - \sum_{i=1}^{x} x_i\right) / (1-p)$$

$$(1-p)\sum_{i=1}^{x} x_i = p\left(n - \sum_{i=1}^{x} x_i\right)$$

$$\hat{p} = (1/n) \sum_{i=1}^{x} x_i = \overline{X}$$

Estimator maximum likelihood tidak perlu unbias, tetapi estimator tersebut biasanya dapat dengan mudah diubah untuk membuat estimator tersebut menjadi unbias. Bias mendekati nol untuk sampel yang besar. Pada umumnya estimator maximum likelihood mempunyai sampel yang besar atau sifat asimptotik. Khususnya estimasi tersebut berdistribusi normal secara asimptotik, unbias dan mempunyai varian yang mendekati batas terendah Cramer-Rao untuk n yang besar. Lebih tepat kita sebutkan bahwa jika $\hat{\theta}$ adalah estimator maximum likelihood untuk θ, maka $n^{1/2}(\hat{\theta} - \theta)$ berdistribusi normal dengan rata-rata nol.

Estimator maximum likelihood adalah konsisten juga. Selanjutnya estimator tersebut mempunyai sifat invarian, yaitu jika $\hat{\theta}$ adalah estimator maximum likelihood θ dan u(θ) adalah fungsi θ yang mempunyai invers nilai tunggal, maka estimator maksimum likelihood u(θ) adalah $u(\hat{\theta})$.

### 2.5.2. Metode Momen

Misalkan x variabel random kontinu dengan fungsi densitas $f(x;\theta_1,\theta_2, \dots, \theta_k)$ atau variabel random diskrit dengan distribusi $p(x;\theta_1,\theta_2, \dots, \theta_k)$ dengan k parameter tidak diketahui. Misalkan $x_1,x_2, \dots, x_n$ adalah sampel random yang besarnya n dari x, dan didefinisikan momen sampel pertama k disekitar nol sebagai :

$$m_t` = (1/n)\sum_{i=1}^{x} X_i`, \quad t = 1,2, \dots, k$$

Momen populasi pertama k disekitar nol adalah :

$$\mu`_t = E(X`) = \int_{-\infty}^{\infty} x`f(x;\theta_1,\theta_2, \dots, \theta_k)\, dx$$

$$t = 1,2,3, \dots, k \text{ dan X kontinu}$$

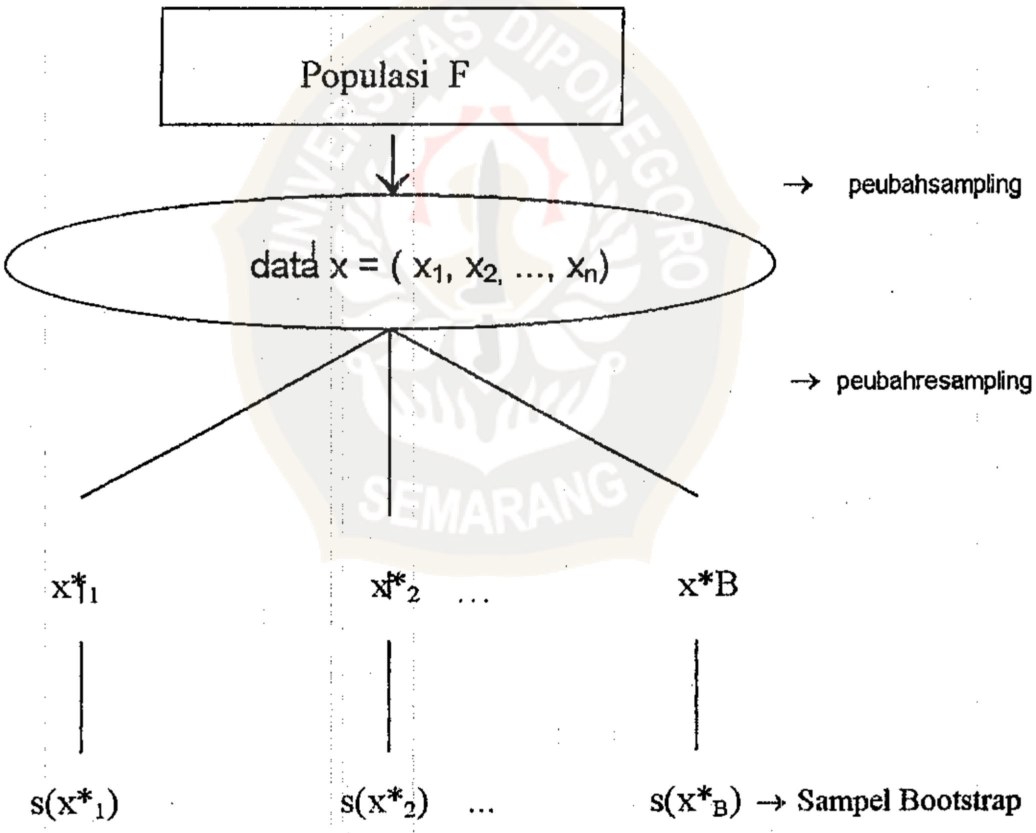
$$\mu`_t = E(X`) = \sum x`p(x;\theta_1,\theta_2, \dots, \theta_k)$$

$$t = 1,2,3, \dots, k \text{ dan X diskrit}$$

Momen populasi $\{\mu`_t\}$, pada umumnya fungsi-fungsi k parameter tidak diketahui $\{\theta_i\}$. Dengan menyamakan momen sampel dan momen populasi akan menghasilkan persamaan sebanyak k secara serentak dengan k tidak diketahui $\{\theta_i\}$ yaitu $\mu`_t = m`_t$ dengan t = 1,2,3, ... , k, sehingga dapat menghasilkan estimator-estimator momen $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$.

**2.6. Metode Bootstrap**

Metode bootstrap meliputi pendugaan secara empirik semua distribusi sampling dari $\hat{\theta}$. Boostrap tidak akan merubah struktur model yang telah diberikan, misalnya model regresi linier yang diselesaikan melalui metode boostrap, maka hasilnyapun akan tetap menjadi model regresi linier.




Gambar 1. Diagram untuk komponen ragam dari sampling dan resampling

| DUNIA NYATA | DUNIABOOTSTRAP |
|---|---|
| Distribusi Probabilitas Tidak diketahui — Pengamatan Sampel Acak | Distribusi Empirik — Sampel Bootstrap |
| $F \rightarrow \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$ | $\Rightarrow \quad \hat{F} \rightarrow \quad x^* = (x^*_1, \ldots, x^*_n)$ |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| $\hat{\theta} = s(x)$ | $\hat{\theta}^* = s(x^*)$ |
| Statistik yang diinginkan | Ulangan Bootsrap |

Gambar 2. Diagram dari bootstrap, penerapan masalah suatu sampel

Pendekatan bootstrap mempunyai prinsip memperlakukan sampel seperti layaknya populasi dan menerapkan sampling untuk membangkitkan dugaan empirik bagi distribusi sampling statistik. Pengambilan sampel ulang (resampel) berukuran n dilakukan berulang-ulang secara acak dengan pengembalian dari sampel asli. Dari setiap sampel bootstrap dapat dihitung nilai dari $\hat{\theta}^*$ ( lihat gambar 1 dan 2 ).

Penekanan pada hasil dengan menggunakan metode bootstrap adalah bahwa distribusi frekuensi relatif dari $\hat{\theta}^*$ yang dihitung dari resampel adalah merupakan dugaan dari distribusi sampling $\hat{\theta}$.

Langkah-langkah dalam metode bootstrap :

a. Berikan distribusi probabilitas empirik, $\hat{F}$ (x) bagi sampel dengan peluang 1/n untuk masing-masing titik $x_1, x_2, \ldots, x_n$. $\hat{F}$ (x) adalah fungsi empirik dari x.

b. Dari $\hat{F}$ (x) didapat sampel acak sederhana berukuran n dengan pengembalian, yang dinamakan resampel $x_b$*.

c. Hitung statistik yang diinginkan $\hat{\theta}$ dari resample dan menghasilkan $\hat{\theta}^*$

d. Ulangi langkah b dan c sebanyak B kali, untuk B cukup besar.

e. Berikan distribusi probabilitas dari B yaitu $\hat{\theta}^*_b$ dengan menempatkan peluang 1/B bagi masing-masing $\hat{\theta}^*_1, \hat{\theta}^*_2, \ldots \hat{\theta}^*_B$. Distribusi probabilitas ini adalah dugaan bootstrap bagi distribusi sampling $\hat{\theta}$ yaitu $\hat{F}^*(\hat{\theta}^*)$.

contoh :

Misal n = 3 dan $(X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3) = (4,1,10)$

Rata-rata dari sampel adalah $\overline{X} = (4 + 1 + 10)/3 = 5$.

| $X_{3i}$* | $\overline{X}_{3i}$* | $X_{3i}$* | $\overline{X}_{3i}$* |
|---|---|---|---|
| (1,1,1) | 1 | (4,10.4) | 6 |
| (1,1,4) | 2 | (10,4,4) | 6 |
| (1,4,1) | 2 | (4,4,10) | 6 |
| (4,1,1) | 2 | (4,10,10) | 8 |
| (1,4,4) | 3 | (10,4,10) | 8 |
| (4,1,4) | 3 | (10,10,4) | 8 |
| (4,4,1) | 3 | (1,4,10) | 5 |
| (4,4,4) | 4 | (1,10,4) | 5 |
| (1,1,10) | 4 | (4,1,10) | 5 |
| (1,10,1) | 4 | (4,10,1) | 5 |
| (10,1,1) | 4 | (10,4,1) | 5 |
| (10,10.1) | 7 | (10,1,4) | 5 |
| (1,10,10) | 7 | (10,10,10) | 10 |
| (10,1,10) | 7 | | |

Tabel 1. Rata-rata resampling untuk $(x_1, x_2, x_3) = (4,1,10)$

| i | ($\overline{X}_{3i}$*) | $\sqrt{3}$ ($\overline{X}_{3i}$* - $\overline{X}_{3i}$) ($w_i$) | frekuesi relatif ( fi ) | frekuensi relatif (pi) | frekuensi relatif kumulaif |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -6,9282 | 1 | 1/27 | 1/27 |
| 2 | 2 | -5,1962 | 3 | 3/27 | 4/27 |
| 3 | 3 | -3,4641 | 3 | 3/27 | 7/27 |
| 4 | 4 | -1,7320 | 4 | 4/27 | 11/27 |
| 5 | 5 | 0 | 6 | 6/27 | 17/27 |
| 6 | 6 | 1,7320 | 3 | 3/27 | 20/27 |
| 7 | 7 | 3,4641 | 3 | 3/27 | 23/27 |
| 8 | 8 | 5,1962 | 3 | 3/27 | 26/27 |
| 9 | 10 | 8,6603 | 1 | 1/27 | 1 |
| | | | $27=3^3$ | | |

Tabel 2. Distribusi frekuensi rata-rata resampling untuk $(X_1,X_2,X_3) = (4,1,10)$

Resampling dilakukan dengan pengembalian untuk semua kemungkinan sampel. Rata-rata dari sampel bootstrap ($\overline{X}_{3i}$*) menyebar, seperti terdapat pada tabel. Pendekatan bootstrap $G_3^*(x) = P^* (\sqrt{3}(\overline{X}_{3i} - \overline{X}) \le x)$ untuk setiap nilai x bagi $\sqrt{3}$ $(\overline{X}_{3i} - \mu)$ adalah $G_3^*(x) = \sum_{\substack{w_i \le x \\ i=1}}^{9} P_i$ .

Bootstrap dan kesimpulan parametrik kedua-duanya mempunyai tujuan yang sama yaitu dengan informasi yang terbatas bisa menduga distribusi sampling statistik, $\hat{\theta}$, untuk menarik kesimpulan tentang parameter populasi yaitu $\theta$. Bedanya adalah dalam memperoleh distribusi sampling seperti yang telah dijelaskan diatas.