BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Modulo Aritmatika

Definisi 2.1

Jika ρ bilangan real, m bilangan bulat, δ bilangan bulat positif dan x bilangan bulat sisa pembagian ρ oleh δ, sehingga dapat ditulis sebagai ,

$$\rho = m\,\delta + x$$

untuk $0 \leq x < \delta$, maka dinyatakan x sama dengan ρ modulo δ dan ditulis,

$$x = \rho \pmod{\delta}$$

Contoh 2.1.

$23 = (4 \times 5) + 3$ sehingga dapat ditulis $3 = 23 \pmod 5$

Definisi 2.2. Kongruensi Modulo *m*

Misal p, q, δ bilangan bulat dan δ positif, maka p kongruen q modulo δ, jika δ membagi (p-q). Ditulis,

$$p \equiv q \pmod{\delta}.$$

Contoh 2.2.

$$(73 - 28) = 9 \times 5$$

dengan $m = 5$ dapat membagi (73 - 28) sehingga dapat dinyatakan,

$$73 = 28 \pmod 5.$$

Teorema 2.3.

Misal δ bilangan bulat positif, maka bilangan bulat p kongruen q modulo δ jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat k sedemikian sehingga,

$$p = q + k\delta$$

<u>Bukti :</u>

($\Rightarrow$) Untuk bilangan bulat p, q dan δ bilangan bulat positif, $p \equiv q \pmod{\delta}$, maka δ membagi (p-q) sehingga untuk suatu bilangan bulat k dapat dinyatakan $(p\text{-}q) = k\delta$ atau $p = q + k\delta$.

(terbukti)

($\Leftarrow$) Untuk bilangan bulat k, sedemikian sehingga $p = q + k\delta$ dengan δ bilangan bulat positif, maka $(p\text{-}q) = k\delta$, berarti pengurangan p oleh q habis dibagi δ sehingga $p \equiv q \pmod{\delta}$.

(terbukti)

Teorema 2.4.

Misal m bilangan bulat positif. Jika $p \equiv q \pmod{\delta}$ dan $r \equiv s \pmod{\delta}$ maka $(p + r) \equiv (q + s) \pmod{\delta}$ dan $p\,r \equiv q\,s \pmod{\delta}$.

<u>Bukti :</u>

Diketahui $p \equiv q \pmod{m}$, sehingga untuk suatu bilangan bulat k, m membagi (p-q) atau

$$(p\text{-}q) = k\,\delta \tag{2.1}$$

dan $r \equiv s \pmod{m}$, sehingga untuk bilangan bulat l, m membagi (r-s) atau

$$(r\text{-}s) = l\,\delta \tag{2.2}$$

Dari (2.1) dan (2.2), maka :

$p - q = k\delta \Rightarrow p = q + k\delta$

$\underline{r - s = l\delta \Rightarrow r = s + l\delta} \ +$

$p + r = (q + k\delta) + (s + l\delta)$

$= (q + s) + (k + l)\delta$

sehingga $p + r = g + s \pmod{\delta}$.

(terbukti).

Dari (2.1) dan (2.2), maka :

$p - q = k\delta \Rightarrow p = q + k\delta$

$\underline{r - s = l\delta \Rightarrow r = s + l\delta} \ \times$

$pr = (q + k\delta) \times (s + l\delta)$

$= qs + q(l\delta) + s(k\delta) + (k + l)\delta$

$= qs + (ql + ks)\delta + (k + l)\delta$

$= qs + (ql + ks + k + l)\delta$

$pr = qs \pmod{\delta}$

(terbukti).

Contoh 2.3.

Misalkan $10 \equiv 3 \pmod 7$ dan $23 \equiv 2 \pmod 7$,

maka $(10 + 23) \equiv (3 + 2) \pmod 7$

dan $(10 \times 23) \equiv (3 \times 2) \pmod 7$.

2.2. Grup

Definisi 2.5. Operasi Biner

Operasi Biner $\oplus$ pada himpunan A adalah fungsi $\oplus : A \times A \rightarrow A$

Definisi 2.6. Grup

Grup merupakan pasangan berurutan himpunan tidak kosong S, dan operasi biner $\oplus$ yang dinotasikan $(S,\oplus)$ dan memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Tertutup terhadap operasi biner $\oplus$,

   sehingga untuk g_i, $g_j \in S$, maka $g_i \oplus g_j \in S$
2. $\oplus$ merupakan operasi biner assosiatif,

   sehingga untuk g_i, g_j, $g_k \in S$, maka $g_i \oplus (g_j \oplus g_k) = (g_i \oplus g_j) \oplus g_k$
3. S memiliki elemen identitas g_0,

   sehingga untuk g_0, $g_i \in S$, maka $g_i \oplus g_0 = g_0 \oplus g_i = g_i$
4. Setiap elemen S memiliki invers,

   sehingga untuk setiap $g_i, g_i^{-1} \in S$, maka $g_i^{-1} \oplus g_i = g_0$.

Selanjutnya grup $(S,\oplus)$ dinyatakan sebagai grup G.

Definisi 2.7. Grup Abelian

Misal $G=(S,\oplus)$ grup dengan operasi biner $\oplus$ dan himpunan tidak kosong S. Jika untuk seluruh $g_i, g_j \in S$, berlaku $g_i \oplus g_j = g_j \oplus g_i$, maka G disebut Grup Abelian.

Definisi 2.8. Grup Abelian Berhingga

Misal $G=(S,\oplus)$ merupakan grup abelian dengan S himpunan berhingga, maka G disebut Grup Abelian Berhingga .

Definisi 2.9. Order Grup

Jika $G=(S,\oplus)$ grup dengan $S = \{g_0, g_1, \ldots, g_{(\delta-1)}\}$, maka order G adalah banyaknya elemen S dan dinotasikan $|G|=|S|$.

Contoh 2.4.

$G=(S,\oplus)$ dan $S = \{g_0, g_1, g_2, g_3, g_4\}$, order G adalah 5 atau $|G|=5$.

Theorema 2.10.

Jika $S=\{g_0,g_1,\ldots,g_{(\delta-1)}\}$ dan untuk setiap $g_i,g_j \in S$, sehingga $i,j= 0,1,2,\ldots, (\delta-1)$, berlaku:

$$g_i \oplus g_j = g_{(i+j)\ (mod\ \delta)}$$

maka pasangan berurutan $(S,\oplus)$ merupakan grup dan dinotasikan $G(\delta)$.

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa $(S,\oplus)$ merupakan grup.

1. Ambil sembarang $g_i,g_j \in S$ maka $g_i \oplus g_j \in S$ karena dari definisi 2.1, $0 \le (i+j)\ (mod\ \delta) < \delta$, sehingga sifat tertutup terpenuhi.
2. Ambil sembarang $g_i, g_j, g_k \in S$ maka ,

$$\begin{aligned} g_k\oplus (g_i\oplus g_j) &= g_{(k+(i+j)(mod\ \delta))(mod\ \delta)} \\ &= g_{(k+(i+j))(mod\ \delta)} \\ &= g_{(k+i+j)(mod\ \delta)} \\ &= g_{((k+i)+j)(mod\ \delta)} \\ &= (g_k\oplus g_i) \oplus (g_j) \end{aligned}$$

memenuhi sifat assosiatif.

3. Ambil sembarang $g_i, g_j \in S$ maka,

$$g_i \oplus g_j = g_{(i+j)(mod\ \delta)}$$
$$= g_{(j+i)(mod\ \delta)}$$
$$= g_j \oplus g_i$$

sifat komutatif terpenuhi.

4. Ambil sembarang $g_i, g_0 \in S$ maka,

$$g_i \oplus g_0 = g_{(i+0)(mod\ \delta)}$$
$$= g_{i\ (mod\ \delta)}$$
$$= g_i$$

Jadi $G(\delta)$ mempunyai elemen identitas g_0

5. Ambil sembarang $g_i, g_{(\delta-i)} \in S$ maka ,

$$g_i \oplus g_{(\delta-i)} = g_{(i+(\delta-i))(mod\ \delta)}$$
$$= g_{(i+\delta-i)(mod\ \delta)}$$
$$= g_{(\delta)(mod\ \delta)}$$
$$= g_0$$

sehingga $g_{(\delta-i)}$ merupakan invers dari g_i dan dinotasikan g_i^{-1}

Karena memenuhi kelima syarat grup, maka terbukti bahwa $(S,\oplus)$ merupakan grup.

Definisi 2.11.

Misal $G=(S,\oplus)$ dan $T \subseteq S$. Jika $H=(T,\oplus)$ grup, maka H disebut subgrup G.

Contoh 2.5.

Misal $T=\{g_0,g_2,g_4\}\subseteq G(6)$, dari hasil operasi setiap elemen G(6), terhadap operasi biner $\oplus$ (tabel 2.1), diketahui $H=(T,\oplus)$ grup, sehingga H merupakan subgrup G(6).

$\oplus$	g_0	g_2	g_4
g_0	g_0	g_2	g_4
g_2	g_2	g_4	g_0
g_4	g_4	g_0	g_2

Tabel 2.1.
Operasi Biner setiap elemen T

Teorema 2.12.

Misal $G=(S,\oplus)$ dan $T\subseteq S$. $H=(T,\oplus)$ merupakan subgrup dari G jika dan hanya jika :

1. Setiap $g_i,g_j \in T$, maka $g_i \oplus g_j \in H$
2. Jika g_0 merupakan elemen identitas G, maka $g_0 \in H$
3. Setiap $g_i^{-1} \in H$, maka $g_i \in H$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Dari definisi (2.11) , misalkan H subgrup G, maka $(T,\oplus)$ grup sehingga :

1) $\oplus$ merupakan operasi biner pada H, sehingga untuk setiap $g_i,g_j \in T$ maka $g_i \oplus g_j \in T$.
2) Jika g_k merupakan elemen identitas pada T.

   Akan dibuktikan bahwa $g_k = g_0$ dimana g_0 diketahui sebagai elemen identitas dalam G.

Apabila g_k elemen identitas H, maka:

$$g_k = g_k \oplus g_k \qquad (2.3)$$

$$g_k = g_k \oplus g_0 \qquad (2.4)$$

Dari (2.3) dan (2.4), diperoleh :

$$g_k = g_k$$

$$g_k \oplus g_k = g_k \oplus g_0$$

$$g^{-1}{}_k \oplus g_k \oplus g_k = g^{-1}{}_k \oplus g_k \oplus g_0$$

$$g_0 \oplus g_k = g_0 \oplus g_0$$

$$g_k = g_0$$

(terbukti).

Jadi elemen identitas dalam H adalah g_0, yang juga merupakan elemen identitas G.

3). Misal $g_i \in T$ dan g_i^{-1} adalah invers g_i dari H terhadap elemen identitas g_0 dan operasi biner $\oplus$ dan g_i^{-1} invers g_i pada G, terhadap elemen identitas g_0 dan operasi biner $\oplus$, maka harus dibuktikan bahwa $g_i^{-1} = g_i^{-1}$.

Apabila g_i^{-1} invers dari g_i dalam H dan g_0 elemen identitas, maka :

$$g_0 = g_i \oplus g_i^{-1} \qquad (2.5)$$

sedangkan g_i invers dari g_i didalam G dengan g_0 elemen identitas, maka :

$$g_0 = g_i \oplus g_i^{-1} \qquad (2.6)$$

Dari (2.5) dan (2.6) diperoleh:

$$g_i^{-1} = g_i^{-1} \in H$$

$$g_i \oplus g_i^{-1} = g_i \oplus g_i^{-1}$$

(terbukti).

($\Leftarrow$) Dari teorema (2.4), andaikan 1,2,3 terpenuhi, maka akan dibuktikan bahwa $(H,\oplus)$ adalah grup.

1. karena setiap $g_i, g_j \in H$, $g_i \oplus g_j \in H$, maka $\oplus$ adalah operasi biner didalam H.

   Untuk setiap $g_i, g_j, g_k \in H$, berlaku:

   $$(g_i \oplus g_j) \oplus g_k = g_i \oplus (g_j \oplus g_k)$$
   $$= g_i \oplus g_j \oplus g_k,$$

   sehingga $(H,\oplus)$ memenuhi sifat assosiatif.

2. Untuk setiap $g_i, g_j \in H$, berlaku $g_i \oplus g_j = g_j \oplus g_i$, maka $(H,\oplus)$ memenuhi sifat komutatif.

3. Karena $g_0 \in H$ maka untuk setiap $g_i \in H$, $g_i \oplus g_0 = g_0 \oplus g_i = g_i$, sehingga H mempunyai elemen identitas $g_0 \in H$.

4. Untuk setiap $g_i \in H$, maka terdapat $g_i^{-1} \in H$ sedemikian sehingga :

   $$g_i \oplus g_i^{-1} = g_i^{-1} \oplus g_i = g_0.$$

   Sehingga setiap elemen H mempunyai invers terhadap g_0 dan operasi biner $\oplus$.

Dari 1, 2, 3 dan 4 himpunan H memenuhi sifat - sifat grup, maka H grup.

Definisi 2.13

Jika $g_i \in S$ dengan $(S,\oplus)$ grup abelian dan m bilangan bulat positif, maka :

$$mg_i = g_i \oplus g_i \oplus \ldots \oplus g_i \quad (m \text{ suku})$$

$$0g_i = g_0$$

Lemma 2.14.

Jika $g_i \in G(\delta)$ dan m bilangan bulat positif, maka untuk setiap g_i dinyatakan sebagai berikut:

$$mg_i = g_{(mi)(\mathit{mod}\ \delta)}.$$

<u>Bukti:</u>

Pembuktian dengan induksi matematika, sebagai berikut:

untuk m=1, dari definisi 2.13.

$1g_i = g_i$, karena $g_i \in G(\delta)$ maka $0 \leq i < \delta$ sehingga $i = i(\text{mod } \delta)$

dengan hipotesa bahwa untuk m=k-1 memenuhi lemma diatas, sehingga $(k-1)g_i = g_{((k-1)i)(\text{mod } \delta)}$, maka untuk m=k,

$$\begin{aligned}
kg_i &= g_i \oplus g_i \oplus \ldots \oplus g_i \oplus g_i \quad (k \text{ suku}) && \text{Definisi 2.13} \\
&= (k-1)g_i \oplus g_i && \\
&= g_{((k-1)i)(\text{mod } \delta)} \oplus g_{i(\text{mod } \delta)} && \text{dari m=1 dan m=k-1} \\
&= g_{((k-1)i(\text{mod } \delta)+i(\text{mod } \delta))(\text{mod } \delta)} && \text{teorema 2.10} \\
&= g_{((ki-i)(\text{mod } \delta)+i(\text{mod } \delta))(\text{mod } \delta)} && \text{kongruensi modulo} \\
&= g_{(ki-i+i)(\text{mod } \delta)} && \text{kongruensi modulo} \\
&= g_{(ki)(\text{mod } \delta)} && \text{kongruensi modulo}
\end{aligned}$$

terbukti.

Definisi 2.15.

$T(g_i) = \{ g_j \mid g_j = mg_i, m \text{ bilangan bulat positif} \}$

Jika $H(g_i) = (T(g_i),\oplus)$, maka $H(g_i)$ disebut subgrup yang dibangun oleh g_i. Order $H(g_i)$ merupakan order g_i dan dinotasikan $|g_i|$.

Pada G(δ), berdasar Teorema (2.9) dan Lemma (2.14), order dari H, yaitu subgrup G didefinisikan sebagai $|g_i| = m_i$ sedemikian sehingga $(im_i)(\text{mod } \delta) = 0$. Secara umum, untuk sembarang grup abelian berhingga G, $|g_i| = m_i$ dengan m_i bilangan bulat positip terkecil sedemikian sehingga $m_i g_i = g_0$.

Contoh 2.6.

$(G(6),\oplus)$ pada Contoh (2.5) merupakan grup abelian, maka untuk $g_2 \in G$ dan $m=\{1,2,3, \dots\}$ diperoleh $mg_2=\{g_0,g_2,g_4\}$, sehingga $H(g_2)=\{g_0,g_2,g_4\}$ dan $|g_2|= 3$.

Definisi 2.16.

Jika $(S,\oplus)$ dengan $g_i \in S$, sehingga $|g_i|=|G|$, maka G disebut grup siklik, dan g_i disebut elemen pembangun G.

Contoh 2.7.

Tabel mg_i untuk $(G(5),\oplus)$ adalah:

g_i m	0	1	2	3	4	$\lvert g_i \rvert$
g_0	g_0	g_0	g_0	g_0	g_0	1
g_1	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	5
g_2	g_0	g_2	g_4	g_1	g_3	5
g_3	g_0	g_3	g_1	g_4	g_2	5
g_4	g_0	g_4	g_3	g_2	g_1	5

Tabel 2.2.
mg_i untuk $(G(5),\oplus)$

Dari tabel 2.2. untuk i = 1,2,3,4 , $|g_i|=|G|$ sehingga dapat dinyatakan G(5) siklik.

Definisi 2.17.

Jika terdapat himpunan $T_g(g_i) = \{h \mid h = g \oplus mg_i,\ 0 \leq m < |g_i|\}$, maka $T_g(g_i)$ disebut koset dari $T(g_i)$ yang memuat g.

2.3. Masalah Knapsack

Masalah Knapsack diformulasikan sebagai berikut:

Jika terdapat n jenis peralatan ilmuwan yang akan dibawa ke bulan menggunakan pesawat ruang angkasa, untuk $j = 1,2,3, \ldots , n$ dengan $c_j > 0$ merupakan nilai kegunaan setiap unit barang dan $a_j > 0$ merupakan berat tiap unit barang jenis ke - j dan diketahui kapasitas pesawat tersebut b, maka harus ditentukan banyaknya peralatan yang akan dibawa dengan pesawat tersebut sehingga nilai kegunaan barang maksimal.

Dari contoh tersebut, dapat diformulasikan Masalah Knapsack sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} & Z = \text{maksimum} \sum_{j=i}^{n} c_j x_j \\ & \sum_{j=i}^{n} a_j x_j \leq b \\ & x_j \geq 0 \text{ , bilangan bulat} \\ & j = 1,2,3,\ldots,n \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

dengan x_j jumlah peralatan tipe ke - j yang memaksimalkan Z.

2.4. Program Dinamis

Program Dinamis merupakan suatu tekhnik matematis tentang optimasi banyak tahap. Ide dasarnya adalah membagi persoalan menjadi beberapa tahap dan keputusan dibuat pada masing-masing tahap.

Suatu hubungan rekursif digunakan untuk menghubungkan kebijaksanaan optimum pada tahap n dan n-1. Hubungan rekursif ini disajikan dalam bentuk persamaan rekursif. Persamaan rekursif sendiri dibentuk dari permasalahan yang ada dengan membaginya menjadi n tahap. Penyelesaian persamaan rekursif dilakukan dari tahap ke tahap sehingga tujuan optimum tahap terakhir terpenuhi.

Pada subbab selanjutnya akan di formulasikan persamaan rekursif untuk Masalah Knapsack. Dari Masalah Knapsack dapat diformulasikan dua persamaan rekursif, yaitu Persamaan Rekursif I dan Persamaan Rekursif II.

2.4.1. Persamaan Rekursif I

Misal $f_k(y)$ merupakan nilai maksimum dari Masalah Knapsack dengan ukuran y pada k jenis pertama untuk $y = 0, 1, 2, \ldots, b$ dan $k = 1, 2, \ldots, n$. Misal $f_n(b) = Z$ merupakan nilai optimal persamaan (2.7), maka untuk menentukan Z dapat dilakukan perhitungan secara rekursif dengan persamaaan rekursif yang diformulasikan sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} & f_k(y) = \text{maksimum} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^{k} a_j x_j \le y \\ & x_j \ge 0, \text{ bilangan bulat dan } j = 1, \ldots, k \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Dengan menyendirikan x_k maka untuk $k = 2, 3, \ldots, n$ dan $y = 0, 1, 2, \ldots, b$, persamaan (2.8) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f_k(y) = \underset{x_k = 0,\ldots,[\frac{y}{a_k}]}{\text{maksimum}} \; c_k x_k + \begin{bmatrix} \text{maksimum} \quad \sum_{j=1}^{k-1} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{k-1} a_j x_j \leq y - a_k x_k \\ x_j \geq 0, \text{ bilangan bulat dan } j = 1,\ldots,k-1 \end{bmatrix} \qquad (2.9)$$

Pada persamaa (2.9), suku kedua ruas kanan mempunyai nilai optimal $f_{k-1}(y-a_k x_k)$, sehingga untuk $k = 2, 3, \ldots, n$ dan $y = 0, 1, 2, \ldots, b$, dapat ditulis sebagai :

$$f_k(y) = \underset{x_k = 0,1,\ldots,[\frac{y}{a_k}]}{\text{maksimum}} \left(c_k x_k + f_{k-1}(y - a_k x_k)\right) \qquad (2.10)$$

Persamaan (2.10) selanjutnya disebut Persamaan Rekursif I (*Recursive Equations I*) dan akan dikembangkan menjadi Persamaan Rekursif II, sebagai alternatif dalam penyelesaian Masalah Knapsack.

Perhitungan secara rekursif dengan persamaan (2.10) dapat dilakukan untuk k=1 atau tahap I, sebagai berikut:

$$f_1(y) = \underset{x_1 = 0,1,\ldots,[\frac{y}{a_1}]}{\text{maksimum}} c_1 x_1$$

$$= c_1 [\tfrac{y}{a_1}]$$

dengan $c_1 \geq 0$

sehingga persamaan (2.10) untuk k=1 dapat diselesaikan dengan menggunakan kondisi awal $f_0(y) = 0$ untuk $y = 0,1,2,\ldots,b$.

Perhitungan secara rekursif dari persamaan (2.10) disajikan dalam tabel untuk masing - masing tahap. Pada tahap n akan diperoleh nilai optimal untuk Masalah Knapsack yaitu Z. Selanjutnya untuk menentukan x_k dengan k=1,2,3,...,n sehingga diperoleh nilai optimal Z, dilakukan lacak balik. Lacak balik dapat dilakukan karena nilai optimai suatu tahap dipengaruhi oleh nilai optimal tahap sebelumnya.

Lacak balik dimulai dari tahap terakhir, k=n, hingga tahap pertama, k=1. Pada tahap n, dari tabel perhitungan diperoleh Z dan x_n. Nilai x_k yang lain akan ditentukan selanjutnya dengan mempertimbangkan persamaan rekursif pada tahap n, $f_n(y)$ = maksimum ($c_n x_n + f_{n-1}(y-a_n x_n)$), dari persamaan ini diketahui $f_n(y)$ maksimal pada nilai maksimal $f_{n-1}(y-a_n x_n)$ dan untuk mengetahui nilai maksimal $f_{n-1}(y-a_n x_n)$ dapat dilihat pada tabel perhitungan tahap n-1, sehingga diperoleh x_{n-1} yang mengoptimalkan $f_{n-1}(y-a_n x_n)$, hingga diperoleh x_1.

Contoh 2.11.

Penyelesaian Masalah Knapsack dengan Persamaan Rekursif I

maksimum $11x_1 + 7x_2 + 5x_3 + x_4$

$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 2$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$, bilangan bulat.

Penyelesaian:

Diketahui y=0,1,2,. . . ,25, n=4 dan k={1,2,3,4}, sehingga untuk memperoleh solusi optimal $f_4(25)$ dan {x_1, x_2, x_3, x_4}, dilakukan perhitungan secara rekursif dengan Persamaan Rekursif I. Perhitungan dilakukan untuk setiap tahap yang dapat dilihat pada tabel-tabel berikut:

Tahap I (k=1),

$$f_1(y) = \text{maksimum } (11x_1 + f_0(y - 6x_1))$$
$$x_1 = 0,\ldots,[\frac{y}{6}]$$
$$y = 0,1,2,\ldots,25$$

y	$11x_1+f_0(y-6x_1)$					Penyelesaian optimal	
	x_1= 0	x_1=1	x_1=2	x_1=3	x_1=4	$f_1(y)$	x_1
0	0	-	-	-	-	0	0
1	0	-	-	-	-	0	0
2	0	-	-	-	-	0	0
3	0	-	-	-	-	0	0
4	0	-	-	-	-	0	0
5	0	-	-	-	-	0	0
6	0	11	-	-	-	11	1
7	0	11	-	-	-	11	1
8	0	11	-	-	-	11	1
9	0	11	-	-	-	11	1
10	0	11	-	-	-	11	1
11	0	11	-	-	-	11	1
12	0	11	22	-	-	22	2
13	0	11	22	-	-	22	2
14	0	11	22	-	-	22	2
15	0	11	22	-	-	22	2
16	0	11	22	-	-	22	2
17	0	11	22	-	-	22	2
18	0	11	22	33	-	33	3
19	0	11	22	33	-	33	3
20	0	11	22	33	-	33	3
21	0	11	22	33	-	33	3
22	0	11	22	33	-	33	3
23	0	11	22	33	-	33	3
24	0	11	22	33	44	44	4
25	0	11	22	33	44	44	4

Tabel 2.3.
Perhitungan Rekursif Tahap I

Tahap II (k=2)

$$f_2(y) = \text{maksimum } (7x_2 + f_1(y - 4x_2))$$
$$x_2 = 0, \ldots, [\frac{y}{4}]$$
$$y = 0,1,2,\ldots,25$$

y	$7x_2 + f_1(y - 4x_2)$							Penyelesaian optimal	
	x_2=0	x_2=1	x_2=2	x_2=3	x_2=4	x_2=5	x_2=6	$f_2(y)$	x_2
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0
1	0	-	-	-	-	-	-	0	0
2	0	-	-	-	-	-	-	0	0
3	0	-	-	-	-	-	-	0	0
4	0	7	-	-	-	-	-	7	1
5	0	7	-	-	-	-	-	7	1
6	11	7	-	-	-	-	-	11	0
7	11	7	-	-	-	-	-	11	0
8	11	7	14	-	-	-	-	14	2
9	11	7	14	-	-	-	-	14	2
10	11	18	14	-	-	-	-	18	1
11	11	18	14	-	-	-	-	18	1
12	22	18	14	21	-	-	-	22	0
13	22	18	14	21	-	-	-	22	0
14	22	18	25	21	-	-	-	25	2
15	22	18	25	21	-	-	-	25	2
16	22	29	25	21	28	-	-	29	1
17	22	29	25	21	28	-	-	29	1
18	33	29	25	32	28	-	-	33	0
19	33	29	25	32	28	-	-	33	0
20	33	29	36	32	28	35	-	36	2
21	33	29	36	32	28	35	-	36	2
22	33	40	36	32	39	35	-	40	1
23	33	40	36	32	39	35	-	40	1
24	44	40	36	43	39	35	42	44	0
25	44	40	36	43	39	35	42	44	0

Tahap 2.4.
Perhitungan Rekursif Tahap II

Tahap III (k=3)

$$f_3(y) = \text{maksimum}\,(5x_3 + f_2(y - 3x_3))$$
$$x_3 = 0,\ldots,[\frac{y}{3}]$$
$$y = 0,1,2,\ldots,25$$

y	$5x_3+f_2(y-3x_3)$									Penyelesaian optimal	
	x_3=0	x_3=1	x_3=2	x_3=3	x_3=4	x_3=5	x_3=6	x_3=7	x_3=8	$f_3(y)$	x_3
0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0
1	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0
2	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0
3	0	5	-	-	-	-	-	-	-	5	1
4	7	5	-	-	-	-	-	-	-	7	0
5	7	5	-	-	-	-	-	-	-	7	0
6	11	5	10	-	-	-	-	-	-	11	0
7	11	12	10	-	-	-	-	-	-	12	1
8	14	12	10	-	-	-	-	-	-	14	0
9	14	16	10	15	-	-	-	-	-	16	1
10	18	16	17	15	-	-	-	-	-	18	0
11	18	19	17	15	-	-	-	-	-	19	1
12	22	19	21	15	20	-	-	-	-	22	0
13	22	23	21	22	20	-	-	-	-	23	1
14	25	23	24	22	20	-	-	-	-	25	0
15	25	27	24	26	20	25	-	-	-	27	1
16	29	27	28	26	27	25	-	-	-	29	0
17	29	30	28	29	27	25	-	-	-	30	1
18	33	30	32	29	31	25	30	-	-	33	0
19	33	34	32	33	31	32	30	-	-	34	1
20	36	34	35	33	34	32	30	-	-	36	0
21	36	38	35	37	34	36	30	35	-	38	1
22	40	38	39	37	38	36	37	35	-	40	0
23	40	41	39	40	38	39	37	35	-	41	1
24	44	41	43	40	42	39	41	35	40	44	0
25	44	45	43	44	42	43	41	42	40	45	1

Tabel 2.5.
Perhitungan Rekursif Tahap III

Tahap IV (k=4)

$$f_4(y) = \text{maksimum } (x_4 + f_3(y - x_4))$$

$$x_4 = 0, \ldots, [\frac{y}{1}]$$

$$y = 0, \ldots, 25$$

y	$x_4 + f_3(y - x_4)$																										Penyelesaian optimal	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	$f_4(x_4)$	x_4
0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0
1	0	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1
2	0	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2
3	5	1	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	0
4	7	6	2	3	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7	0
5	7	8	7	3	4	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	1
6	11	8	9	8	4	5	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11	0
7	12	12	9	10	9	5	6	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	12	0,1
8	14	13	13	10	11	10	6	7	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	14	0
9	16	15	14	14	11	12	11	7	8	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	16	0
10	18	17	16	15	15	12	13	12	8	9	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	18	0
11	19	19	18	17	16	16	13	14	13	9	10	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	19	0,1
12	22	20	20	19	18	17	17	14	15	14	10	11	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	22	0
13	23	23	21	21	20	19	18	18	15	16	15	11	12	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	23	0,1
14	25	24	24	22	22	21	20	19	19	16	17	16	12	13	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	25	0
15	27	26	25	25	23	23	22	21	20	20	17	18	17	13	14	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	27	0
16	29	28	27	26	26	24	24	23	22	21	21	18	19	18	14	15	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	29	0
17	30	30	29	28	27	27	25	25	24	23	22	22	19	20	19	15	16	17	-	-	-	-	-	-	-	-	30	0,1
18	33	31	31	30	29	28	28	26	26	25	24	23	23	20	21	20	16	17	18	-	-	-	-	-	-	-	33	0
19	34	34	32	32	31	30	29	29	27	27	26	25	24	24	21	22	21	17	18	19	-	-	-	-	-	-	34	0,1
20	36	35	35	33	33	32	31	30	30	28	28	27	26	25	25	22	23	22	18	19	20	-	-	-	-	-	36	0
21	38	37	36	36	34	34	33	32	31	31	29	29	28	27	26	26	23	24	23	19	20	21	-	-	-	-	38	0
22	39	39	38	37	37	35	35	34	33	32	32	30	30	29	28	27	27	24	25	24	20	21	22	-	-	-	39	0,1
23	41	40	40	39	38	38	36	36	35	34	33	33	31	31	30	29	28	28	25	26	25	21	22	23	-	-	41	0
24	44	42	41	41	40	39	39	37	37	36	35	34	34	32	32	31	30	29	29	26	27	26	22	23	24	-	44	0
25	45	45	43	42	42	41	40	40	38	38	37	36	35	35	33	33	32	31	30	30	27	28	27	23	24	25	45	0,1

Menentukan solusi optimal Z dan$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$.

Pada tahap IV diperoleh $f_4(25) = 45$ dengan $x_4=\{0,1\}$ dan $f_3(25-x_4)$, sehingga dapat ditentukan nilai x_3 sebagai berikut:

$x_4 = 0$ maka $f_3(25) = 45$ dengan $x_3 = 1$ dan $f_2(25 - 3x_3)$,

$x_4 = 1$ maka $f_3(24) = 44$ dengan $x_3 = 0$ dan $f_3(24 - 3x_3)$.

Selanjutnya dapat ditentukan nilai $\{x_1,x_2,x_3\}$, sebagai berikut:

Menentukan nilai x_2,

$x_3 = 1$ maka $f_2(25 - 3)=f_2(22) = 39$ dengan $x_2 = 1$ dan $f_1(22 - 4x_2)$,

$x_3 = 0$ maka $f_2(24 - 0)=f_2(24) = 44$ dengan $x_2 = 0$ dan $f_1(24 - 4x_2)$.

Menentukan nilai x_1,

$x_2 = 1$ maka $f_1(22 - 4)=f_1(18)=33$ dengan $x_1=3$ dan $f_0(18 - 6x_1)$,

$x_2 = 0$ maka $f_1(24 - 0)=f_1(24)=44$ dengan $x_1=4$ dan $f_0(24 - 6x_1)$.

Perhitungan tersebut dapat disajikan dalam bentuk tabel berikut:

jika $y_4=25$, $y_3 = y_4 - x_4$, $y_2 = y_3 - 3x_3$ dan $y_1= y_2 - 4x_2$ maka,

y_4	x_4	y_3	x_3	y_2	x_2	y_1	x_1
25	0	25 - 0 = 25	1	25 - 3 = 22	1	22 - 4 = 18	3
	1	25 - 1 = 24	0	24 - 0 = 24	0	24 - 0 = 24	4

Tabel 2.7.
Lacak Balik

Solusi optimal untuk masalah diatas adalah $f_4(25)=Z=45$

dengan$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}=\{3,1,1,0\}$ dan solusi alternatif $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}=\{4,0,0,1\}$.

2.4.2. Persamaan Rekursif II

Jika pada y dan k persamaan (2.10) mempunyai nilai optimal dengan $x_k = 0$, maka $f_k(y) = f_{k-1}(y)$. Tetapi jika $x_k > 0$, dapat dinyatakan $f_k(y) = c_k + f_k(y - a_k)$, sehingga untuk setiap y, dapat dituliskan:

$$x_k = 0 \;\Rightarrow\; f_k(y) = f_{k-1}(y) \tag{2.11}$$

$$x_k > 0 \;\Rightarrow\; f_k(y) = c_k + f_k(y - a_k) \tag{2.12}$$

kombinasi persamaan (2.11) dan (2.12) dengan kondisi awal $f_0(y)=0$ untuk $y = 0, 1, 2, \ldots, b$ diperoleh

$$f_k(y) = \text{maksimum}\{f_{k-1}(y);\, c_k + f_k(y - a_k)\} \tag{2.13}$$

untuk $a_k \le y$ dan $k=1,2, \ldots, n$. Persamaan (2.13) selanjutnya disebut Persamaan Rekursif II (*Recursive Equations II*)

Seperti halnya pada rekursif I, perhitungan dengan rekursif II disajikan dalam tabel dan untuk menentukan solusi optimal dapat dilakukan lacak balik dari k=n hingga k=1. Lacak balik pada perhitungan dengan rekursif II hampir sama dengan lacak balik yang dilakukan pada rekursif I.

Lacak balik dilakukan dengan mempertimbangkan formulasi persamaan rekursif II. Ide dasar dari pembentukan persamaan rekursif II adalah adanya dua kemungkinan nilai x_k yang mengoptimalkan $f_k(y)$. Kedua kemungkinan tersebut adalah $x_k = 0$ atau $x_k > 0$. Pada tahap n dapat diperoleh nilai maksimal Z dan dapat ditentukan nilai x_n. Selanjutnya dapat ditentukan nilai x_k yang lain dan untuk lebih jelasnya diberikan Contoh 2.7.

Definisi 2.18.

Suatu indikator $P_k(y)$ dihitung untuk seluruh y dan k yang akan digunakan dalam menentukan solusi optimal setelah $f_n(b)$ terhitung. Indikator tersebut didefinisikan sebagai berikut :

$$p_k(y) = \begin{cases} 0 & jika\ f_k(y) = f_{k-1}(y) \\ 1 & jika\ f_k(y) > f_{k-1}(y) \end{cases}$$

Seperti halnya pada formulasi persamaan rekursif I, formulasi persamaan rekursif II dari Masalah Knapsack diatas mendasari formulasi persamaan rekursif untuk Masalah Knapsack yang selanjutnya disebut Rekursif Grup II (*Group Recursion II*).

Contoh 2.7. Penyelesaian Masalah Knapsack dengan Persamaan Rekursif II

Tentukan solusi optimal untuk Masalah Knapsack berikut.

$$\text{maksimum } 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 + x_4$$

$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 25$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \text{ bilangan bulat.}$$

Penyelesaian:

Perhitungan dengan Persamaan Rekursif II untuk $y = 0,\ldots,25$ pada tahap k=1 hingga k=4, dengan persamaan sebagai berikut:

$$f_k(y) = \text{maksimum } \{f_{k-1}(y); c_k + f_k(y - a_k)\}$$

Tanda negatif dituliskan mengikuti nilai fungsi untuk menunjukkan bahwa $P_k(y)=1$ (definisi 2.19). Perhitungan dengan persamaan rekursif II untuk masalah diatas terdapat pada tabel berikut:

y	$f_0(y)$	$11+f_1(y-6)$	$f_1(y)$	$7+f_2(y-4)$	$f_2(y)$	$5+f_3(y-3)$	$f_3(y)$	$1+f_4(y-1)$	$f_4(y)$
0	0	-	0	-	0	-	0	-	0
1	0	-	0	-	0	-	0	1 + 0 = 1	1-
2	0	-	0	-	0	-	0	1 + 1 = 2	2-
3	0	-	0	-	0	5 + 0 = 5	5-	1 + 2 = 3	5
4	0	-	0	7 + 0 = 7	7-	5 + 0 = 5	7	1 + 5 = 6	7
5	0	-	0	7 + 0 = 7	7-	5 + 0 = 5	7	1 + 7 = 8	8-
6	0	11 + 0 = 11	11-	7 + 0 = 7	11	5 + 5 = 10	11	1 + 8 = 9	11
7	0	11 + 0 = 11	11-	7 + 0 = 7	11	5 + 7 = 12	12-	1 + 11 = 12	12
8	0	11 + 0 = 11	11-	7 + 7 = 14	14-	5 + 7 = 12	14	1 + 12 = 13	14
9	0	11 + 0 = 11	11-	7 + 7 = 14	14-	5 + 11 = 16	16-	1 + 14 = 15	16
10	0	11 + 0 = 11	11-	7 + 11 = 18	18-	5 + 12 = 13	18	1 + 16 = 17	18
11	0	11 + 0 = 11	11-	7 + 11 = 18	18-	5 + 14 = 19	19-	1 + 18 = 19	19
12	0	11 + 11 = 22	22-	7 + 14 = 21	22	5 + 16 = 21	22	1 + 19 = 20	22
13	0	11 + 11 = 22	22-	7 + 14 = 21	22	5 + 18 = 23	23-	1 + 22 = 23	23
14	0	11 + 11 = 22	22-	7 + 18 = 25	25-	5 + 19 = 24	25	1 + 23 = 24	25
15	0	11 + 11 = 22	22-	7 + 18 = 25	25-	5 + 22 = 27	27-	1 + 25 = 26	27
16	0	11 + 11 = 22	22-	7 + 22 = 29	29-	5 + 23 = 28	29	1 + 27 = 28	29
17	0	11 + 11 = 22	22-	7 + 22 = 29	29-	5 + 25 = 30	30-	1 + 29 = 30	30
18	0	11 + 22 = 33	33-	7 + 25 = 32	33	5 + 27 = 32	33	1 + 30 = 31	33
19	0	11 + 22 = 33	33-	7 + 25 = 32	33	5 + 29 = 34	34-	1 + 33 = 34	34
20	0	11 + 22 = 33	33-	7 + 29 = 36	36-	5 + 30 = 35	36	1 + 34 = 35	36
21	0	11 + 22 = 33	33-	7 + 29 = 36	36-	5 + 33 = 38	38-	1 + 36 = 37	38
22	0	11 + 22 = 33	33-	7 + 33 = 40	40-	5 + 34 = 39	40	1 + 38 = 39	40
23	0	11 + 22 = 33	33-	7 + 33 = 40	40-	5 + 36 = 41	41-	1 + 40 = 41	41
24	0	11 + 33 = 44	44-	7 + 36 = 43	44	5 + 38 = 43	44	1 + 41 = 42	44
25	0	11 + 33 = 44	44-	7 + 36 = 43	44	5 + 40 = 45	45-	1 + 44 = 45	45

Tabel 2.8.
Perhitungan dengan Rekursif II

Dari tabel perhitungan dengan rekursif II dapat ditentukan solusi optimal untuk Masalah Knapsack diatas, yaitu:

Pada Tahap IV diketahui nilai maksimal $f_4(25) = 45$ dan untuk menentukan nilai $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, maka dilakukan lacak balik, yang dilakukan dari k=4 hingga k=1 sebagai berikut:

Pada $k = 4 \rightarrow f_4(25) = 45$ dan diperoleh dari $f_4(25) = \{f_3(25);1+ f_4(24)\}=\{45;1+44\}$, sehingga diperoleh nilai $x_4 = 0$ atau $x_4 \geq 1$. Sepertihalnya penyelesaian dengan rekursif I, akan diperoleh dua alternatif solusi optimal untuk masalah diatas. Selanjutnya akan ditentukan $\{x_1,x_2,x_3\}$ pada $x_4 = 0$ dan lacak balik dilakukan sebagai berikut :

Pada $k=3 \rightarrow f_3(25) = 45$ mempunyai tanda negatif, sehingga $x_3 \geq 1$ dan

untuk $y = 25 - 3 = 22$, $f_3(22)=40$ tidak memiliki tanda negatif,

sehingga $x_3 = 1$.

Pada $k = 2 \rightarrow f_2(22) = 40$ mempunyai tanda negatif, sehingga $x_2 \geq 1$ dan

untuk $y = 22 - 4 =18$, $f_2(18)=33$ tidak mempunyai tanda negatif,

sehingga $x_2 =1$.

Pada $k =1 \rightarrow f_1(18)=33$ mempunyai tanda negatif, sehingga $x_1 \geq 1$,

untuk $y = 18 - 6 =12$, $f_1(12)=22$ mempunyai tanda negatif, sehingga $x_1 \geq 2$,

untuk $y = 12 - 6 = 6$, $f_1(6) =11$ mempunyai tanda negatif, sehingga $x_1 \geq 3$

dan untuk $y = 6 - 6 = 0$, $f_1(0) = 0$ tidak mempunyai tanda negatif,

sehingga $x_1 = 3$.

Solusi optimal untuk Masalah Knapsack diatas adalah $f_4(25)=45$ dengan $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}=\{3,1,1,0\}$.

Pada $x_4 \geq 1$, lacak balik untuk menentukan $\{x_1,x_2,x_3\}$ dilakukan sebagai berikut:

Pada k=4 $\rightarrow f_4(25)$=45 dengan $x_4 \geq 1$ dan untuk y = 25 - 1 = 24, $f_4(24)$=44 tidak mempunyai tanda negatif sehingga x_4=1.

Pada k=3 $\rightarrow f_3(24)$=44 tidak mempunyai tanda negatif, sehingga x_3=0.

Pada k=2 $\rightarrow f_2(24)$=40 tidak mempunyai tanda negatif, sehingga x_2=0.

Pada k=1 $\rightarrow f_1(24)$=44 mempunyai tanda negatif, sehingga $x_1 \geq 1$,

untuk y = 24 - 6 =18, $f_1(18)$=33 mempunyai tanda negatif, sehingga $x_1 \geq 2$,

y = 18 - 6 = 12, $f_1(12)$=22 mempunyai tanda negatif, sehingga $x_1 \geq 3$

y = 12 - 6 = 6, $f_1(6)$=11 mempunyai tanda negatif, sehingga $x_1 \geq 4$

dan untuk y = 6 - 6 = 0, $f_1(0)$ = 0 tidak mempunyai tanda negatif, sehingga x_1= 4.

Solusi optimal untuk Masalah Knapsack diatas adalah $f_4(25)$=45 dengan $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$={4,0,0,1}.

Penyelesaian Masalah Knapsack dengan Persamaan Rekursif II diperoleh solusi optimal $f_4(25)$=45 dengan $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$={4,0,0,1}atau $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$={3,1,1,0}.