BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Teori Himpunan

Himpunan adalah kumpulan dari suatu objek. Setiap objek dalam kumpulan tersebut disebut titik atau elemen. Keseluruhan dari titik-titik itu disebut ruang (space) atau himpunan universal yang dinotasikan dengan Ω .Misal ω adalah titik atau elemen dalam E dan E adalah subhimpunan dari Ω maka ditulis $\omega \in E$. Jika ω bukan elemen dari E maka ditulis $\omega \notin E$. Misalkan E dan F adalah subhimpunan dari Ω, maka ada beberapa operasi himpunan yaitu:

Definisi 2.1

(Gabungan atau union)

Misal E dan F adalah subhimpunan dari Ω ,maka himpunan yang mengandung semua titik di dalam E atau F atau keduanya didefinisikan dengan gabungan (union) dari E dan F,ditulis $E \cup F \equiv \{\omega;\ \omega \in E \text{ atau } \omega \in F\}$

Definisi 2.2

(Irisan atau intersection)

Misal E dan F adalah subhimpunan dari Ω ,maka himpunan yang mengandung semua titik dari E dan F didefinisikan dengan irisan atau intersection dari E dan

F,ditulis $E \cap F \equiv \{\omega;\ \omega \in E \text{ dan } \omega \in F\}$

Definisi 2.3

(Komplemen)

Komplemen dari himpunan E dinotasikan dengan E^c adalah semua titik-titik dalam Ω yang bukan dalam E , ditulis $E^c \equiv \{\omega;\ \omega \in \Omega \text{ dan } \omega \notin E\}$

Definisi 2.4

(Himpunan kosong atau null set)

Jika sebuah himpunan E tidak mengandung titik-titik disebut himpunan kosong atau null set atau empty set, dinotasikan dengan $\varnothing$ atau { }.

Definisi 2.5

(Disjoint atau Mutually exclusive atau Saling asing)

Himpunan E dan F dikatakan mutually exclusive (saling asing) jika $E \cap F = \varnothing$. Subset $E_1, E_2, \ldots$ didefinisikan mutually exclusive jika $E_i\ E_j = \varnothing$ untuk semua $i \neq j$

Contoh 2.1

Himpunan {1,-1} dan {0,2,3} adalah saling asing jika $\{1,-1\} \cap \{0,2,3\} = \varnothing$

Definisi 2.6

(Kejadian dan Ruang Kejadian)

Sebuah kejadian adalah subset dari ruang sampel. Kelas semua kejadian yang berkaitan dengan sebuah percobaan didefinisikan sebagai sebuah ruang kejadian.

Sebuah kejadian E dikatakan terjadi jika suatu percobaan menghasilkan sebuah titik (dalam ruang sampel) yang termasuk dalam E. Jika titik itu misal ω adalah sebuah subset (subset yang mengandung titik ω) dari ruang sampel Ω maka disebut kejadian, sehingga ω, ditulis $\{\omega\}$,atau disebut sebagai kejadian dasar. Juga $\varnothing$ dan Ω keduanya adalah subset dari Ω, dan keduanya adalah kejadian. Simbol Ω sering disebut kejadian pasti dan $\varnothing$ sering disebut kejadian tak mungkin dan ruang kejadian sering dinotasikan dengan $\mathcal{E}$.

Contoh 2.2

Misalkan dua dadu dilempar, maka akan menghasilkan sepasang bilangan bulat (i,j) dengan i,j =1,2,...,6 bila i adalah bilangan yang muncul pada dadu pertama dan j bilangan yang muncul pada dadu kedua. Jadi himpunan semestanya Ω adalah sebagai berikut:

$$\Omega=\left\{\begin{array}{c} (1,1),(2,1),(3,1),\ldots,(6,1) \\ (1,2),(2,2),(3,2),\ldots,(6,2) \\ ,\ldots, \\ (1,6),(2,6),(3,6),\ldots,(6,6) \end{array}\right\}$$

Misalkan kejadian E muncul dadu dengan jumlah 7 maka

E={(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)}

2.2. Probabilitas

Definisi 2.7

(Fungsi Probabilitas)

Sebuah fungsi probabilitas P(.) adalah sebuah himpunan fungsi dengan domain ε dan kodomain [0,1] dimana terpenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i) $P(E) \geq 0$ untuk setiap $E \in \varepsilon$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) jika $E_1, E_2, \ldots$ adalah kejadian mutually exclusive atau disjoint (saling asing) dalam ε ($E_i \cap E_j = \varnothing$ untuk $i \neq j$, $i,j = 1,2\ldots$) dan jika $E_1 \cup E_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \varepsilon$ maka $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$

Teorema 2.1

(Jumlahan Hingga)

Misal $E_1, \ldots E_n$ kejadian saling asing ,mak

$$P(E_1 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + \ldots + P(E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Bukti

Misal $E_{n+1} = E_{n+2} = \ldots = \varnothing$ maka $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{1=1}^{\infty} E_i \in \varepsilon$ dan $P(\bigcup_{i=1}^{n} E) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Definisi 2.8

(Ruang Probabilitas)

Sebuah ruang probabilitas adalah triplet $((\Omega, \varepsilon, P(.))$, dimana Ω adalah ruang sampel, ε adalah himpunan kejadian (masing-masing subhimpunan dari Ω), dan $P(.)$ adalah fungsi probabilitas dengan domain ε.

2.3. Probabilitas Bersyarat dan Kejadian Independen

Definisi 2.9

(Probabilitas Bersyarat)

Misal E dan F dua kejadian dalam ε dari ruang probabilitas $((\Omega, \varepsilon, P(.))$. Probabilitas bersyarat dari kejadian E dengan syarat kejadian F, dinotasikan oleh $P(E|F)$ didefinisikan oleh

$$P(E|F) = \frac{P(E)P(F)}{P(F)} \qquad \text{jika } P(F) > 0$$

Definisi 2.10

(Kejadian Independen)

Diberikan ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{E}, P(.))$, misal E dan F dua kejadian dalam $\mathcal{E}$. Kejadian E dan F didefinisikan menjadi independen jika dan hanya jika salah satu dari persyaratan berikut terpenuhi:

(i) $P(E \cap F) = P(E)\, P(F)$

(ii) $P(E|F) = P(E)$ jika $P(F) > 0$

(iii) $P(F|E) = P(F)$ jika $P(E) > 0$

Contoh 2.3

Sekeping mata uang dan dadu dilemparkan bersama-sama. E adalah kejadian muncul gambar pada mata uang, dan F adalah kejadian muncul mata dadu genap. Tunjukkan bahwa E dan F adalah saling bebas (independen).

Penyelesalan:

Ruang sampelnya adalah

{(G,1),(G,2),(G,3),(G,4),(G,5),(G,6),(A,1),(A,2),(A,3),(A,4),(A,5),(A,6)}

$E \cap F$ = {(G,2),(G,4),(G,6)}

$P(E \cap F) = 3/12$

Sedangkan $P(E) = 1/2$, $P(F) = 3/6$, $P(E) .P(F) = 1/2 .3/6 = 3/12$

Karena $P(E \cap F) = P(E).P(F)$ maka E dan F saling bebas.

Teorema 2.3

Jika E dan F dua kejadian independen yang didefinisikan pada ruang probabilitas $(\Omega,\mathcal{E},P(.))$, maka E dan F^c adalah independen, E^c dan F adalah independen, dan E^c dan F^c independen.

Bukti:

Jika $E = (E\cap F)\cup (E\cap F^c)$ maka karena $E \cap F$ dan $E \cap F^c$ adalah saling asing serta E dan F adalah independen didapat

$$\begin{aligned} P(E) &= P[(E\cap F)\cup (E\cap F^c)] \\ &= P(E\cap F) + P(E\cap F^c) \\ &= P(E).P(F) + P(E\cap F^c) \end{aligned}$$

jadi

$$\begin{aligned} P(E\cap F^c) &= P(E) - P(E).P(F) \\ &= P(E).(1 - P(F)) \\ &= P(E).P(F^c) \end{aligned}$$

terbukti bahwa E dan F^c independen

Analog untuk bukti yang lain.

2.4. Nilai Ekspektasi

Definisi 2.11

Jika X adalah variabel random diskrit dan $P(X=x_i)$ adalah distribusi probabilitas pada x, maka nilai ekspektasinya adalah

$E(X) = \sum_i x_j . P(X=x_j)$

Jika X adalah variabel random kontinue dan $f_x(x)$ adalah fungsi densitas pada x maka nilai ekspektasinya adalah

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x . f_x(x)\, dx.$$

Contoh 2.4

Perhatikan percobaan lemparan dua buah dadu pada contoh 2.2 di atas. Misal X adalah notasi dari jumlahan dua dadu dan Y adalah absolut selisihnya.Tentukan nilai ekspektasi dari Y.

Penyelesaian:

Fungsi diskrit untuk Y diberikan sebagai berikut:

Y	0	1	2	3	4	5
$P(Y=y_i)$	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

$E(Y) = \sum y_j . P(Y=y_i) = 0.\ 6/36 + 1.\ 10/36 + \ldots + 5.\ 2/36$

$= 70/36.$

Contoh 2.5

Misal X adalah variabel random kontinue dengan fungsi densiti probabilitas

$f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}\, I_{(0,\infty)}(x)$, maka nilai ekspektasi dari X adalah

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.\, f_X(x)\, dx. = \int_{0}^{\infty} x.\lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1/\lambda$$

2.5. Lotre Referensi

Dalam rangka memilih diantara alternatif tindakan yang tersedia dimana tidak semua dari kemungkinan kejadian diketahui maka seorang pengambil keputusan secara logika sama seperti memilih diantara sejumlah lotre-lotre yang berbeda. Lotre-lotre yang ada akan menghasilkan konsekuensi yang berbeda tergantung pada kejadian yang tidak dapat diramalkan.

Sebuah lotre L mempunyai sejumlah konsekuensi terbatas yang disimbolkan dengan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ dan himpunan semua konsekuensi disimbolkan dengan C.

Misalkan sebuah lotre L, untuk setiap kemungkinan kejadian E dapat menghasilkan satu dan hanya satu dari konsekuensi $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Dianggap bahwa himpunan bagian $E_1, E_2, \ldots E_k$ adalah mutually exclusive (saling asing) dan kolektif exhaustive (salah satu mesti terjadi). Lotre L yang menghasilkan konsekuensi c_i jika dan hanya jika $E \subset E_i$ dinotasikan dengan

$L \equiv \{(c_1 : E_1), (c_2 : E_2), \ldots, (c_i : E_i), \ldots, (c_k : E_k)\}$.

Dan dapat dilihat pada diagram 2.1

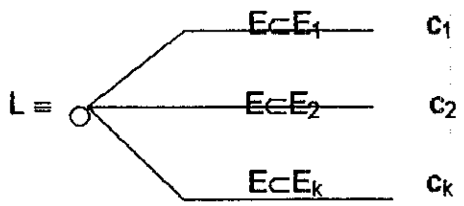

Diagram 2.1. Tipe Lotre sederhana

Dalam batasan pemilihan diantara dua lotre L_1 dan L_2 untuk:

$L_1 = \{(c_1:E_1),(c_2:E_2),\ldots,(c_i:E_i),\ldots(c_k:E_k)\}$,

$L_2 = \{(c_1:E_1),(c_1:E_2),\ldots,(c_i:E_i),\ldots(c_k:E_k)\}$

Seorang pengambil keputusan akan memilih diantara dua lotre tersebut dengan menyatakan preferensi untuk konsekuensi dan kejadian maka dapat ditentukan lotre mana yang lebih baik dari dua lotre tersebut (analisanya dibahas di bab III), dan secara sederhana dapat disajikan dengan pohon keputusan berikut ini:

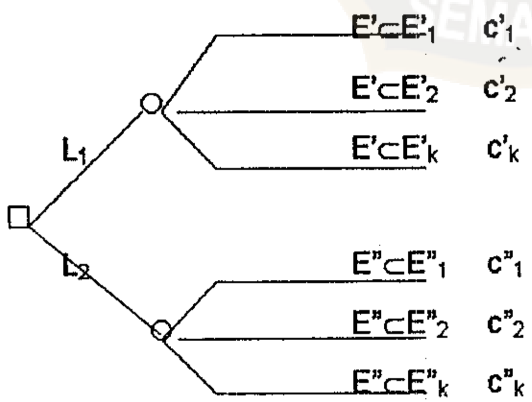

Diagram 2.2. Pohon Keputusan Untuk Pemilihan Diantara Dua Lotre

Dalam lotre-lotre yang paling sederhana hadiah adalah konsekuensi, pengambil keputusan berhak menerima 10,000 dolar jika lemparan koin keluar gambar dan akan kehilangan uangnya jika keluar angka. Atau pengambil keputusan yakin akan mendapatkan keuntungan 5,000 dolar. Jadi pengambil keputusan sedang dihadapkan pada dua alternatif pilihan, apakah dia akan menerima 5000 dolar secara pasti atau bermain gambling. Pemilihan diantara dua alternatif lotre tersebut disebut pemilihan dengan metode lotre referensi karena lotre yang dihadapi adalah bentuk lotre sederhana, yaitu:

Lotre I : menerima 5,000 dolar pasti

Lotre II : menerima 10,000 dolar dengan probabilitas p dan menerima 0 dolar dengan probabilitas (1-p).

2.6. Masalah Keputusan

Definisi 2.12

(Masalah Keputusan)

Sebuah masalah keputusan dinyatakan dengan elemen-elemen ($\varepsilon, C, Å, \leq$) dimana:

(i) ε adalah himpunan kejadian yang relevan E_k

(ii) C adalah himpunan konsekuensi yang mungkin c_k

(iii) Å adalah himpunan pilihan a_j , sebuah tindakan potensial, mengandung fungsi yang memetakan partisi-partisi terbatas dari Ω yaitu kejadian pasti dalam ε, ke dimensi yang sesuai, yaitu himpunan elemen dari C

(iv) $\leq$ adalah tingkat preferensi (kecenderungan) yang diambil dari bentuk relasi biner antara elemen dari Å

Elemen-elemen tersebut dapat disajikan dalam sebuah pohon keputusan sebagai berikut:

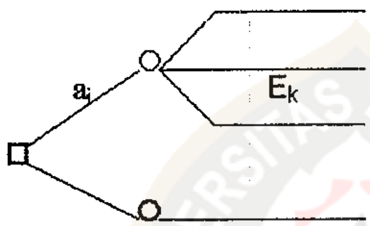

Diagram 2.3 Pohon Keputusan

Keterangan:

□ simbol dari himpunan tindakan keputusan

○ simbol dari himpunan kejadian tak pasti

Dalam skala kegagalan yang lebih besar seorang pengambil keputusan akan mempertimbangkan kejadian tak pasti menjadi relevan yang tergantung pada bentuk informasi awal, *Mo*. Meskipun demikian biasanya telah diasumsikan bahwa $E_1 \in \varepsilon$ dan $E_2 \in \varepsilon$ adalah relevan yang mungkin terjadi bersama atau minim salah satu dari kejadian-kejadian tersebut terjadi. Hal ini berarti bahwa $E_1 \cap E_2$ dan $E_1 \cup E_2$ diasumsikan termasuk dalam ε dan $E^c \in \varepsilon$. Dan jika skala kegagalannya masih lebih besar maka dalam $\mathcal{E}$ akan terdapat sebuah kejadian 'real world' (sesungguhnya) yaitu kejadian yang dipertimbangkan dalam masalah keputusan.bersama dengan kejadian hipothesis. Kelas $\mathcal{E}$ disebut sebagai *aljabar dari kejadian relevan*. Pengambil keputusan harus mengadakan perhitungan untuk menentukan preferensi diantara konsekuensi. Kelas C disebut sebagai *Himpunan dari konsekuensi (yang mungkin)*.

Dalam pembahasan ini sebuah pilihan mengandung suatu hubungan dari himpunan kejadian partisi $\{E_k, k \in K\}$dengan himpunan konsekuensi $\{c_k, k \in K\}$. Untuk menunjukkan pemetaan dinotasikan $\{c_k|E_k, k \in K\}$ dengan interprestasi bahwa kejadian E_k membawa konsekuensi c_k, $k \in K$. Kelas A dari pilihan , atau tindakan potensial, akan disebut sebagai '*ruang tindakan*'.

Dalam relasi biner preferensi $\leq$, seorang pengambil keputusan tidak menganggap bahwa semua pasangan pilihan $(a_1,a_2) \in Å \times Å$ perlu dihubungkan dengan $\leq$. Hubungan $a_1 \leq a_2$ atau $a_2 \leq a_1$ (atau keduanya) dikatakan bahwa a_1 tidak lebih dipilih dari a_2, atau a_2 tidak lebih dipilih dari a_1 .Dari relasi $\leq$, diturunkan sejumlah penggunaan relasi biner yang lain.

Definisi 2.13

(Induced Relasi Biner)

(i) $a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow a_1 \leq a_2$ dan $a_2 \leq a_1$

(ii) $a_1 < a_2 \Leftrightarrow a_1 \leq a_2$ dan tidak benar untuk $a_2 \leq a_1$

(iii) $a_1 \geq a_2 \Leftrightarrow a_2 \leq a_1$

(iv) $a_1 > a_2 \Leftrightarrow a_2 < a_1$

Definisi 2.13 difahami sebagai hubungan untuk beberapa pilihan a_1, a_2 dalam Å Relasi biner diartikan bahwa a_1 ekivalen pada a_2 yang dinotasikan dengan $a_1 \sim a_2$ jika dan hanya jika a_1 tidak lebih dipilih dari a_2 dan a_2 tidak lebih dipilih dari a_1 .Dan a_1 murni lebih dipilih dari a_2 yang dinotasikan dengan $a_1 > a_2$ jika dan hanya jika a_2 murni kurang dipilih dari a_1. Hubungan-hubungan ini cukup untuk menggambarkan semua kasus dimana pasangan pilihan dapat dibandingkan.

Dari setiap pilihan tindakan dapat diidentifikasi konsekuensinya dengan menuliskan $c = \{c|\Omega\}$, untuk beberapa $c \in C$ yang berarti bahwa $\{c|\Omega\}$ adalah elemen dari Å. Dan dapat ditulis $c_1 \leq c_2$ jika dan hanya jika $\{c_1 |\Omega\} \leq \{c_2 |\Omega\}$ yang berarti bahwa konsekuensi c_1 tidak lebih baik daripada konsekuensi c_2. Simbol lain $\sim$ dan $<$ digunakan pada relasi preferensi atas C x C untuk mengganti $\leq$, bila relasi $\leq$ sedang ditetapkan atas Å x Å. Untuk menghindari triviality (kesulitan) selanjutnya secara formal diasumsikan terdapat paling sedikit dua konsekuensi c_1 dan c_2 sedemikian sehingga $c_1 < c_2$.

Dasar relasi preferensi antar pilihan $\leq$, dapat juga digunakan untuk mendefinisikan relasi biner pada ε X ε yaitu sekumpulan semua pasangan kejadian relevan. Relasi tersebut menunjukkan bahwa satu kejadian menjadi "lebih mungkin" atau "more likely" daripada kejadian lain. Selanjutnya akan menggunakan simbol $\leq$ untuk preferensi diantara kejadian tak pasti.

Definisi 2.14

(Relasi Ketidakpastian)

$E \leq F \Leftrightarrow$ untuk semua $c_1 < c_2$ berlaku jika $\{c_2|E, c_1|E^c\} \leq \{c_2|F, c_1|F^c\}$ maka dikatakan bahwa E ***tidak lebih mungkin daripada*** F.

Jika ada perbandingan dua pilihan yang meliputi pasangan konsekuensi dalam batasan kejadian tak pasti maka seorang pengambil keputusan akan tertarik pada pilihan yang 'lebih mungkin' dimana pada pilihan tersebut terdapat konsekuensi yang lebih disukai.

Relasi biner yang diberikan dalam definisi 2.13 dapat juga digunakan untuk menggambarkan relasi ketidakpastian antar kejadian. Sehingga, $E \sim F$ jika dan hanya jika E dan F adalah equally likely (kemungkinan sama),dan $E > F$ jika dan hanya jika E murni lebih mungkin daripada F. Sementara, untuk semua $c_1 < c_2$,

$$c_1 \equiv \{c_2|\varnothing, c_1|\Omega\} < \{c_2|\Omega, c_1|\varnothing\} \equiv c_2$$

selalu benar,sebagaimana yang diharapkan, sehingga $\varnothing < \Omega$

Dalam semua tingkat relasi preferensi pada Å x Å, C x C dan ε x ε adalah bersifat subyektif dalam arti masing-masing personal bebas mengekspresikan preferensinya dalam acuan bentuk informasi awal, *Mo*.

Sehingga, jika ada sebuah pernyataan E > F maka akan dikatakan bahwa *"seorang pengambil keputusan akan menganggap bahwa kejadian E lebih mungkin daripada kejadian F dengan acuan bentuk informasi awal".* Bentuk informasi awal diambil sebagai suatu sumber yang berubah-ubah dimana seorang pengambil keputusan berfikir secara sistematik tentang kejadian. Sehingga bagaimanapun juga, seorang pengambil keputusan akan memasukkan perhitungan informasi selanjutnya, yang didapatkan dari kejadian yang sesungguhnya (real world) dengan asumsi sebuah kejadian mungkin G.Preferensi diantara pilihannya akan digambarkan oleh relasi biner baru $\leq_G$. Relasi diantara $\leq$ dan $\leq_G$ diberikan oleh definisi berikut:

Definisi 2.15

(Preferensi Bersyarat)

Untuk beberapa $G > \varnothing$,

(i) $a_1 \leq_G a_2 \Leftrightarrow$ untuk semua a, $\{a_1|G, a|G^c\} \leq \{a_2|G, a|G^c\}$

(ii) $E \leq_G F \Leftrightarrow$ untuk $c_1 \leq_G c_2$, $\{c_2|E, c_1|E^c\} \leq_G \{c_2|F, c_1|F^c\}$.

Relasi biner dalam definisi 2.13 dapat diterapkan untuk suatu pilihan yang bersyarat pada kejadian G yang dinotasikan dengan $\sim_G$ dan $<_G$. Relasi biner antara konsekuensi secara jelas didefinisikan oleh:

$$c_1 \leq_G c_2 \Leftrightarrow \{c_1 \mid \Omega\} \leq_G \{c_2 \mid \Omega\}$$

Bagaimanapun, dalam bagian 2.7, untuk membicarakan sifat-sifat yang diharapkan dari $\leq$ dan $\leq_G$ akan dibuat asumsi bahwa $c_1 \leq_G c_2$ jika dan hanya jika $c_1 \leq c_2$, sehingga preferensi diantara konsekuensi tidak dipengaruhi oleh informasi tambahan dari kejadian ketidakpastian dalam $\mathcal{E}$.

2.7. Koherensi dan Kuantifikasi

2.7.1 Kejadian, Pilihan dan Preferensi.

Bentuk secara umum $a_j = \{c_k|E_k, k\in K, j\in J\}$ dengan $\{E_k, k\in K\}$ adalah partisi terbatas dari kejadian pasti Ω , $E_k \in \mathcal{E}$, $c_k \in C$, $a_j \in Å$. Himpunan Åx Å dilengkapi dengan kumpulan relasi biner $\leq_G$, dimana $G > \varnothing$ yang menyatakan bahwa satu tindakan lebih disukai dari tindakan yang lain dengan menganggap ada kejadian mungkin G

Seorang pengambil keputusan hendak membuat asumsi-asumsi tentang elemen-elemen dari masalah keputusan dengan sebuah pendekatan rasional untuk memilih diantara pilihan. Asumsi-asumsi yang disajikan dalam bentuk serangkaian aksioma, untuk menjawab pertanyaan 'aturan-aturan apa yang harus relasi preferensi ikuti? dan kejadian-kejadian apa yang harus termasuk dalam $\mathcal{E}$?

Aksioma-aksioma yang akan disajikan bersifat presciptive (bersifat menentukan) dan aksioma-aksioma tersebut menyatakan cara-cara dimana seseorang harus punya sikap.

2.7.2. Koherensi Preferensi.

Aksioma 1

(Perbandingan Konsekuensi dan pilihan dikotomi)

(i) Ada konsekuensi c_1, c_2 sedemikian hingga $c_1 < c_2$

(ii) Untuk semua konsekuensi c_1, c_2, c_3, c_4 dan kejadian E,F salah satu terpilih

$\{c_2|E, c_1|E^c\} \leq \{c_2|F, c_1|F^c\}$ atau $\{c_2|E, c_1|E^c\} \geq \{c_2|F, c_1|F^c\}$

Jika semua konsekuensi adalah ekivalen, maka semua pilihan harus ekivalen. Persyaratan (ii) diikatakan bahwa: *" Jika seorang pengambil keputusan ingin membuat pilihan secara rasional diantara alternatif tindakan maka dia harus paling sedikit mau menyatakan preferensi diantara pilihan yang dikotomi sederhana".* Aksioma berikut menyatakan tentang cara-cara dimana preferensi harus dapat bersama atau kohere (menyatu) dalam batasan tingkat relasi Åx Å

Aksioma 2

(Kelengkapan Preferensi)

(i) $a \leq a$

(ii) Jika $a_1 \leq a_2$ dan $a_2 \leq a_3$, maka $a_1 \leq a_3$

Kondisi (i) menyatakan bahwa sebuah pilihan secara murni dipilih untuk dirinya sendiri. Dari definisi 2.13(i), jika $a \leq a$, maka $a \sim a$. Untuk kelengkapan kondisi (ii) memerlukan preferensi.

Dalil 2.1

(Kelengkapan Ketidakpastian)

(i) $E \sim E$

(ii) Jika $E_1 \leq E_2$ dan $E_2 \leq E_3$ maka $E_1 \leq E_3$

Bukti :

(i) Dari definisi 2.14 dan aksioma 2 $E \leq E \Leftrightarrow$ untuk semua $c_1 < c_2$, $\{c_2|E, c_1|E^c\} \leq \{c_2|E, c_1|E^c\}$ dikatakan E tidak lebih mungkin dari E itu sendiri . Jadi jika $E \leq E$ maka $E \sim E$

(ii) Dan untuk kelengkapan kondisi (ii) memerlukan preferensi-preferensi untuk setiap kejadian, dan dengan cara yang sama dapat ditentukan untuk kejadian-kejadian dengan menggunakan dalil 2.1 (i).

Dalil 2.2

(Sifat-sifat kelengkapan yang diturunkan)

(i) Jika $a_1 \sim a_2$ dan $a_2 \sim a_3$ maka $a_1 \sim a_3$

Jika $E_1 \sim E_2$ dan $E_2 \sim E_3$ maka $E_1 \sim E_3$

(ii) Jika $a_1 < a_2$ dan $a_2 \sim a_3$ maka $a_1 < a_3$

Jika $E_1 < E_2$ dan $E_2 \sim E_3$ maka $E_1 < E_3$

Bukti:

(i) Misal $a_1 \sim a_2$ dan $a_2 \sim a_3$ sehingga dengan definisi 2.13 ,$a_1 \leq a_2$, $a_2 \leq a_1$ dan $a_2 \leq a_3$, $a_3 \leq a_2$. Kemudian dengan aksioma 2 (ii) didapat $a_1 \leq a_3$ dan $a_3 \leq a_1$, sehingga $a_1 \sim a_3$.

Untuk membuktikan (ii) sifat-sifat kelengkapan terhadap kejadian-kejadiannya menggunakan dalil 2.1.

(ii) Misal $a_1 < a_2$ dan $a_2 \sim a_3$ maka $a_1 < a_3$. Dari definisi 2.13 $a_1 \leq a_2$ dan $a_2 \leq a_3$,$a_3 \leq a_2$. Dengan aksioma 2(ii) didapat $a_1 \leq a_2$ sehingga $a_1 \leq k a_3$. Jadi terbukti. Dan untuk Kejadian-kejadian jika $E_1 < E_2$ dan $E_2 \sim E_3$ maka $E_1 < E_3$.

Aksioma 3

(Konsistensi Preferensi)

(i) Jika $c_1 \leq c_2$ maka untuk semua $G > \varnothing$,$c_1 \leq_G c_2$

(ii) Jika untuk beberapa $c_1 < c_2$, $\{c_2|E, c_1|E^c\} \leq \{c_2|F, c_1|F^c\}$ maka $E \leq F$

(iii) Jika untuk beberapa c dan $G > \varnothing$, $\{a_1|G, c|G^c\} \leq \{a_2|G, c|G^c\}$ maka $a_1 \leq_G a_2$.

Preferensi-preferensi diantara konsekuensi murni tidak dipengaruhi oleh tambahan dari informasi selanjutnya tentang kejadian tidak pasti dalam ε. .Secara sama, (iii) menyatakan bahwa jika seorang pengambil keputusan mempunyai preferensi $\{a_1|G, c|G^c\} \leq \{a_2|G, c|G^c\}$untuk beberapa c maka, dengan G, a_1 tidak harus dipilih dari a_2, sehingga untuk a, $\{a_1|G,a|G^c\} \leq \{a_2|G,a|G^c\}$

Dalil 2.3

(Invarian Preferensi diantara Konsekuensi)

$c_1 \leq c_2$ jika dan hanya jika ada $G > \varnothing$ sedemikian sehingga $c_1 \leq_G c_2$

Bukti :

$\Rightarrow$ Jika $c_1 \leq c_2$ maka oleh aksioma 3 (i), $c_1 \leq_G c_2$ untuk beberapa kejadian G.

$\Leftarrow$ Sebaliknya dengan definisi 2.15(i) untuk beberapa $G > \varnothing$,jika $c_1 \leq_G c_2$ maka untuk beberapa pilihan a salah satunya mempunyai $\{c_1|G,a|G^c\} \leq \{c_2|G,a|G^c\}$. Jika ambil $a = \{c_1|G,c_2|G^c\}$ maka $\{c_1|G,c_2|G^c\} \leq \{c_1|\varnothing,c_2|\Omega\}$. Jika $c_1 > c_2$ maka oleh aksioma 3(ii), $G \leq \varnothing$ dan kontradiksi dengan $G > \varnothing$. Dengan demikian, oleh aksioma 3(ii) maka $c_1 \leq c_2$.

Definisi 2.16

(Kejadian signifikan)

Sebuah kejadian E signifikan dengan syarat $G > \varnothing$ jika $c_1 <_G c_2$ maka $c_1 <_G \{c_2|E,c_1|E^c\} <_G c_2$. Jika $G = \Omega$ maka secara sederhana dikatakan bahwa E adalah signifikan.

Kejadian-kejadian signifikan dengan syarat G adalah kejadian yang mungkin tapi tidak pasti,diberikan informasi yang disediakan oleh G. kemudian diberikan $G>\varnothing$ dan asumsi $c_1 <_G c_2$, jika E ditetapkan menjadi signifikan oleh G, maka akan memilih $\{c_2|E, c_1|E^c\}$ daripada c_1 pasti. Dan jika kemudian disediakan tambahan kemungkinan konsekuensi c_2 yang diinginkan maka dengan cara yang sama akan lebih memilih c_2 pasti daripada pilihan di atas.

Definisi 2.17

(Pasangan Kejadian Independen)

E dan F adalah pasangan kejadian independen yang dinotasikan dengan $E \perp F$ jika dan hanya jika untuk semua c, c_1, c_2

(i) $c \bullet \{c_2|E,c_1|E^c\} \Rightarrow c \bullet_F \{c_2|E,c_1|E^c\}$

(ii) $c \bullet \{c_2|F,c_1|F^c\} \Rightarrow c \bullet_E \{c_2|F,c_1|F^c\}$

dimana $\bullet$ adalah salah satu dari hubungan $<$, $\sim$ atau $>$.

Definisi diberikan untuk situasi sederhana dari preferensi antara konsekuensi dan pilihan dikotomi. Sementara oleh dalil 2.3 preferensi tentang konsekuensi tidak dipengaruhi oleh informasi tambahan. Jadi $E \perp F$ dikatakan E independen dari F

2.7.3. Kuantifikasi

Preferensi diantara pilihan, disajikan oleh relasi biner $\leq$, yang menyediakan dasar-dasar kualitatif untuk membandingkan pilihan , konsekuensi dan kejadian. Seorang pengambil keputusan akan membuktikan bahwa gambaran kualitatif ini tidak cukup untuk serangkaian perbandingan pilihan sistematik.

Tepatnya, pada akhir kuantifikasi, preferensi dicapai dengan memperkenalkan beberapa bentuk dari standar numerik yang ditetapkan dengan sebuah tingkatan relasi kualitatif yang koheren.

Seorang pengambil keputusan akan melihat hal tersebut di atas sebagai dasar dari beberapa macam ukuran kuantitatif dalam perbandingan pilihan. Sebagai langkah pertama seorang pengambil keputusan membuat asumsi tentang aljabar dari kejadian ,$\mathcal{E}$.

Aksioma 4

(Adanya Kejadian Standar)

Ada subaljabar ***S*** dari $\mathcal{E}$ dan sebuah fungsi μ : ***S*** $\rightarrow$[0,1] sedemikian sehingga :

(i) $S_1 \leq S_2$ jika dan hanya jika $\mu(S_1) \leq \mu(S_2)$

(ii) Jika $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ maka $\mu(S_1 \cup S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2)$

(iii) Untuk beberapa bilangan α dalam [0,1] dan kejadian-kejadian E,F terdapat kejadian standar S sedemikian sehingga $\mu(S) = \alpha$, $E \perp S$ dan $F \perp S$

(iv) Jika $S_1 \perp S_2$ maka $\mu(S_1 \cap S_2) = \mu(S_1)\mu(S_2)$

(v) Jika $E \perp S$, $F \perp S$ dan $E \perp F$, maka $E \sim S \Rightarrow E \sim_F S$

Kondisi (i) dan (ii) jelas. Kondisi (iii), bahwa untuk $\alpha \in [0,1]$ dapat membangun sebuah S dengan $\mu(S) = \alpha$. Catat bahwa ***S*** diperlukan menjadi sebuah aljabar dan kemudian $\varnothing$ dan Ω adalah kejadian standar. Dari dalil 2.4 dan aksioma (iii) bahwa $\mu(\varnothing) = 0$ dan $\mu(\Omega) = 1$. Dasar pemikiran dari permainam roda rolet dianggap bahwa setiap permainan pada sebuah roda adalah permainan independent yang dibangun kejadian independent S dalam *S* dengan $\mu(S) = \alpha$ untuk α yang berharga dalam [0,1]. Kondisi (v) jika E adalah independen dari F dan S , dan F adalah independen dari S, pernyataan ekivalen antara E dan S harus tidak dipengaruhi oleh kejadian F.

Dalil 2.4

(Kumpulan Kejadian Standar saling asing)

Untuk beberapa kumpulan terbatas $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ dari bilangan riil sedemikian sehingga $\alpha_i > 0$ dan $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n \leq 1$ ada sebuah korespondensi kumpulan $\{S_1,\ldots,S_n\}$ dari kejadian standar saling asing sedemikian sehingga $\mu(S_j)=\alpha_j$, j $=1,\ldots,n$

Bukti:

Dengan aksioma 4(iii) ada S_1 sedemikian sehingga $\mu(S_1) = \alpha_1$. Untuk $1 < j \leq n$, andaikan secara induksi $S_1,\ldots,S_{j-1}$ saling asing, $B_j = S_1 \cup \ldots S_{j-1}$ dan menetapkan $\beta_j = \alpha_1+\ldots+\alpha_{j-1} = \mu(B_j)$. Dengan aksioma 4(iii),(iv) ada T_j dalam ***S*** sedemikian sehingga

$$\mu(B_j \cap T_j) = \mu(B_j)\{\alpha_j / (1-\beta_j)\}.$$

Menetapkan $S_j = T_j \cap B_j^{\,c}$, Sehingga $S_j \cap S_i = \varnothing$, i=1,...,j-1. Kemudian $T_j = S_j \cup (T_j \cap B_j)$ dan dengan aksioma 4(ii) $\mu(T_j) = \mu(S_j) + \mu(T_j \cap B_j)$. Jadi

$$\mu(S_j) = \alpha_j / (1-\beta_j) - \alpha_j \beta_j / (1-\beta_j) = \alpha_j$$

Aksioma 5

(Ukuran Tepat dari Preferensi dan Ketidakpastian)

(i) Jika $c_1 \le c \le c_2$ ada kejadian standar S sedemikian sehingga $c \sim \{ c_2 | S, c_1 | S^c \}$

(ii) Untuk setiap kejadian E, ada kejadian standar S sedemikian sehingga E ~ S.

2.8. Kepercayaan dan Probabilitas

2.8.1 Kepercayaan dan Probabilitas

Preferensi pengambil keputusan antara pilihan dalam masalah keputusan tergantung pada derajat kepercayaan dari suatu kejadian tak pasti.

Prinsip -prinsip koherensi dan kuantifikasi oleh perbandingan dengan standar dinyatakan dalam bentuk aksioma aksioma di atas, akan memungkinkan untuk memberi definisi formal dari derajat kepercayaan, yaitu ukuran numerik dari ketidakpastian yang diberikan untuk setiap kejadian.

Definisi 2.18

(Ukuran Derajat Kepercayaan)

Diberikan relasi ketidakpastian $\leq$, probabillitas P(E) dari kejadian E adalah bilangan riil $\mu(S)$ yang berkaitan dengan kejadian standar S sedemikian sehingga E~S.

Dengan operasional definisi, arti dari pernyataan probabilitas adalah jelas. Misalkan statemen P (E) = 0.5 secara tepat berarti bahwa E ditetapkan menjadi kemungkinan sama seperti kejadian standar dari ukuran 0.5

Definisi 2.15, probabilitas adalah derajat kepercayaan personal, karena probabilitas- probabilitas adalah sebuah numerik yang mewakili relasi ketidakpastian diantara kejadian dari seorang pengambil keputusan.

Definisi 2.19

(Kesesuaian)

Sebuah fungsi $f : \mathcal{E} \rightarrow R$ dikatakan sesuai dengan tingkat relasi $\leq$ pada $\mathcal{E} X \mathcal{E}$ jika untuk semua kejadian $E \leq F \Leftrightarrow f(E) \leq f(F)$

Dalil 2.5

(Kesesuaian Probabilitas dan Derajat Kepercayaan)

Fungsi probabilitas P(.) adalah sesuai dengan relasi ketidakpastian $\leq$.

Bukti:

Dengan aksioma 5(ii) ada kejadian standar S_1 dan S_2 sedemikian sehingga $E \sim S_1$

dan $F \sim S_2$. Kemudian dengan dalil 2.2 (ii), $E \leq F$ jika dan hanya jika $S_1 \leq S_2$ dan dengan aksioma 4(i) jika dan hanya jika $\mu(S_1) \leq \mu(S_2)$. Hasil mengikuti definisi 2.18

Dalil 2.6

(Karakteristik independen)

$$E \perp F \Leftrightarrow P(E \cap F) = P(E)\,P(F)$$

Bukti :

$\Rightarrow$ Diandaikan $E \perp F$. Oleh aksioma 4(iii), ada S_1 sedemikian sehingga $P(S_1) = P(E)$, $E \perp S_1$ dan $F \perp S_1$. Dengan demikian, oleh aksioma 4(v), $E \sim_F S_1$, sehingga untuk beberapa konsekuensi $c_1 \leq c_2$, dan beberapa tindakan a,

$$\{c_2|E \cap F, c_1|E^c \cap F, a|F^c\} \sim \{c_2|S_1 \cap F, c_1|S^c{}_1 \cap F, a|F^c\}$$

Ambil $a = c_1$, didapat

$$\{c_2|E \cap F, c_1|(E \cap F)^c\} \sim \{c_2|S_1 \cap F, c_1|(S_1 \cap F)^c\},$$

sehingga $E \cap F \sim S_1 \cap F$. Dan dengan aksioma 4(iii), diberikan F, S_1, ada S_2 sedemikian sehingga $P(S_2) = P(F)$, $F \perp S_2$ dan $S_1 \perp S_2$. Dengan demikian, oleh argumen sama diatas dan definisi 2.17 simetri dari $\perp$ didapat :

$$S_1 \cap F \sim S_1 \cap S_2.$$

Dengan dalil 2.1, 2.5 dan aksioma 4(iv),

$$P(E \cap F) = P(S_1 \cap S_2) = P(S_1)P(S_2),$$

dan dengan demikian $P(E \cap F) = P(E)P(F)$.

$\Leftarrow$ Diandaikan $P(E \cap F) = P(E)P(F)$. Oleh aksioma 4(iii), terdapat S sedemikian sehingga $P(S) = P(F)$ dan $F \perp S, E \perp S$. Dengan demikian, oleh bukti bagian pertama,

$$P(E \cap S) = P(E)P(S) = P(E)P(F) = P(E \cap F),$$

sehingga $E \cap F \sim E \cap S$.

Sekarang diandaikan $c \leq \{c_2 | E \cap F, c_1 | E^c\}$. Kemudian oleh definisi 2.20,

$$\{c | S, c_1 | S^c\} \leq \{c_2 | E \cap S, c_1 | (E \cap S)^c\}.$$

Tetapi $\{c | S, c_1 | S^c\} \sim \{c | F, c_1 | F^c\}$ dan

$$\{c_2 | E \cap S, c_1 | (E \cap S)^c\} \sim \{c_2 | E \cap F, c_1 | (E \cap F)^c\};$$

Dengan demikian oleh dalil 2.2,

$$\{c | F, c_1 | F^c\} \leq \{c_2 | E \cap F, c_1 | (E \cap F)^c\}$$

sehingga $c \leq_F \{c_2 | E, c_1 | E^c\}$. Dengan cara sama dapat diberikan untuk sebaliknya, dengan demikian menetapkan bahwa $E \perp F$.

2.8.2. Perbaikan Kepercayaan

Sebuah kejadian dianggap terjadi akan mengubah preferensi antara pilihan dengan memodifikasi derajat kepercayaan yang diberikan oleh seorang pengambil keputusan, untuk kejadian yang menjelaskan pilihan-pilihan. Langkah awal untuk menganalisa tingkat hubungan antara kejadian, diberikaan asumsi kejadian dari sebuah kejadian mungkin G, yaitu relasi ketidakpastian $\leq_G$. Dan untuk $G > \varnothing$, $c_2 \leq c_1$ jika dan hanya jika $c_2 \leq_G c_1$.

Dalil 2.7

(Sifat-Sifat Kepercayaan Bersyarat)

(i) $E \leq_G F \Leftrightarrow E \cap G \leq F \cap G$

(ii) Jika ada $c_1 < c_2$ sedemikian sehingga $\{c_2|E, c_1|E^c\} \leq_G \{c_2|F, c_1|F^c\}$, maka

$E \leq_G F$.

Bukti:

Dengan definisi 2.15 dan dalil 2.3 $E \leq_G F$ jika dan hanya jika untuk semua $c_2 \geq c_1$,

$$\{c_2|E,, c_1|E^c\} \leq_G \{c_2|F, c_1|F^c\},$$

jika dan hanya jika untuk semua a,

$$\{c_2|E \cap G, c_1|E^c \cap G, a|G^c\} \leq \{c_2|F \cap G, c_1|F^c \cap G, a|G^c\},$$

Ambil $a = c_1$,

$$E \leq_G F \Leftrightarrow \{c_2|E \cap G, c_1|(E \cap G)^c\} \leq \{c_2|F \cap G, c_1|(F \cap G)^c\},$$

dan ini benar jika dan hanya jika $E \cap G \leq F \cap G$.

selain itu, jika ada $c_2 > c_1$ sedemikian sehingga $\{c_2|E, c_1|E^c\} \leq_G \{c_2|F, c_1|F^c\}$ maka dengan definisi 2.18 dengan $a = c_1$,

$$\{c_2|E \cap G, c_1|E^c \cap G, c_1|G^c\} \leq \{c_2|F \cap G, c_1|F^c \cap G, c_1|G^c\},$$

sehingga

$$\{c_2|E \cap G, c_1|(E \cap G)^c\} \leq \{c_2|F \cap G, c_1|(F \cap G)^c\}.$$

Dan hasil mengikuti dari aksioma 3(iii) dan bagian (i) dari dalil ini.

Definisi 2.20

(Ukuran derajat kepercayaan bersyarat)

Jika diberikan relasi ketidakpastian bersyarat $\leq_G$, $G > \varnothing$,maka probabilitas bersyarat $P(E|G)$ dari kejadian E dengan syarat G terjadi adalah bilangan riil μ (S) sedemikian sehingga $E \sim_G S$

Dalil 2.8

(probabilitas bersyarat)

Untuk beberapa $G > \varnothing$, $P(E|G) = \dfrac{P(E \cap G)}{P(G)}$

Bukti:

Dengan aksioma 4(iii) dan dalil 2.6, ada $S \perp G$ sedemikian sehingga $\mu(S) = P(E \cap G)/P(G)$. Dengan dalil 2.6 $P(S \cap G) = P(S)P(G) = \mu(S)P(G) = P(E \cap G)$. Kemudian dengan dalil 2.5 $S \cap G \sim E \cap G$ dan dengan dalil 2.7, $S \sim_G E$. Kemudian dengan definisi 2.20

$$P(E|G) = \mu(S) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)}$$

Dalil 2.9

(Kesesuaian probabilitas bersyarat dan derajat kepercayaan bersyarat)

$$E \leq_G F \Leftrightarrow P(E|G) \leq P(F|G)$$

Bukti:

Dengan dalil 2.7 (i), $E \leq_G F$ jika dan hanya jika $E \cap G \leq F \cap G$, dimana dengan dalil 2.5 terpenuhi jika dan hanya jika $P(E \cap G) \leq P(F \cap G)$; hasilnya mengikuti dari dalil 2.8.