BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab 2 ini akan diberikan beberapa konsep dasar yang diperlukan untuk mempermudah dalam pembahasan selanjutnya.

2.1. Program Linear

Program linear adalah perencanaan aktivitas-aktivitas untuk memperoleh suatu hasil optimum, yaitu suatu hasil yang mencapai tujuan terbaik

Formulasi model matematis dari program linear secara umum adalah :

Memaksimalkan/meminimalkan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ ....(2.1)

Dengan pembatas : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq d_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq d_2$

....(2.2)

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq d_m$

$x_j \geq 0$ ($i = 1,2,\ldots n$) ....(2.3)

Dalam membangun model dari formulasi persoalan di atas akan digunakan karakteristik-karakteristik yang biasa digunakan dalam persoalan program linear di atas, yaitu :

1. Variabel keputusan adalah variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan-keputusan yang akan dibuat.

   Pada formulasi program linear di atas x_1, $x_2 \ldots x_n$ disebut variabel keputusan

2. Fungsi tujuan merupakan fungsi dari variabel keputusan yang dimaksimumkan atau diminimumkan.

   Pada formulasi di atas $Z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ disebut fungsi tujuan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

3. Pembatas merupakan kendala yang dihadapi sehingga kita tidak bisa menentukan harga-harga dari variabel keputusan secara sembarangan.

   Pada formulasi program linear diatas persamaan (2.2) disebut pembatas

4. Pembatas tanda adalah pembatas yang menjelaskan apakah variabel keputusannya diasumsikan hanya berharga nonnegatif atau nonpositif.

   Pada formulasi program linear di atas persamaan (2.3) disebut pembatas tanda

2.2 Metode Simpleks

Metode simpleks merupakan prosedur aljabar yang bersifat iteratif, yang bergerak selangkah demi selangkah dimulai dari suatu nilai pada ruang atau daerah fisibel menuju nilai yang optimum. Model bagi program linear adalah

Maksimalkan /minimalkan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

Dengan pembatas : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le \text{atau} \ge d_1$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le \text{atau} \ge d_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le \text{atau} \ge d_m$$

$$x_j \ge 0 \; (j=1,2,\ldots n)$$

Jika didefinisikan :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \; ; \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \; ; \; D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

Maka pembatas dari model tersebut dapat dituliskan dalam bentuk AX = D, dengan m persamaan dan n variabel (n > m).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Untuk lebih memahami uraian selanjutnya berikut ini diberikan pengertian dari beberapa terminologi dasar yang digunakan dalam metode simpleks

1. Solusi basis untuk AX = D adalah solusi dimana terdapat sebanyak-banyaknya m variabel berharga bukan nol.

   Untuk mendapatkan solusi basis dari AX = D maka sebanyak (n-m) variabel harus dinolkan. Variabel yang dinolkan ini disebut **variabel non basis** (NBV). Selanjutnya akan diperoleh harga $n - (n - m) = m$ variabel yang memenuhi AX = D, yang disebut **variabel basis** (BV).
2. Solusi basis fisibel (BSF) adalah solusi dengan seluruh variabel pada suatu solusi basis berharga non negatif.
3. Solusi optimal adalah solusi dengan nilai fungsi tujuan terbesar.

Penyelesaian program linear dengan menggunakan metode simpleks, bentuk dasar yang digunakan harus dalam bentuk standar, yaitu bentuk formulasi yang mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

1. Seluruh pembatas harus berbentuk persamaan dengan ruas kanan nonnegatif.
2. Seluruh variabel harus merupakan variabel nonnegatif
4. Fungsi tujuan berupa maksimasi atau minimasi

Untuk mengubah bentuk formulasi yang belum dalam bentuk standar menjadi bentuk standar dilakukan cara-cara sebagai berikut :

1 a. Pembatas-pembatas yang bertanda $\leq$ atau $\geq$ dapat dijadikan suatu persamaan dengan menambahkan atau mengurangkan dengan suatu variabel slack pada ruas kiri pembatas tersebut.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh : $x_1 + 2x_2 \leq 6$ ditambahkan slack $S_3 \geq 0$ maka diperoleh persamaan $x_1 + 2x_2 + S_3 = 6$ atau $3x_1 + 2x_2 \geq 5$ dikurangi slack $S_4 \geq 0$ maka persamaan menjadi $3x_1 + 2x_2 - S_4 = 5$.

Jika pembatas diatas menyatakan batas panggunaan suatu sumber maka S_1 menyatakan banyaknya sumber yang tidak terpakai.

b. Ruas kanan dijadikan bilangan nonnegatif dengan mengalikan kedua sisi dengan –1 jika ruas kanan tersebut negatif.

Contoh : $2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = -5$ adalah sama dengan $-2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 5$.

c. Arah ketidaksamaan dapat berubah jika kedua ruas dikalikan dengan –1.

2. Fungsi tujuan

Walaupun model standar program linear ini dapat berupa maksimasi atau minimasi, kadang-kadang diperlukan perubahan dari satu bentuk ke bentuk lain. Dalam hal ini, maksimasi dari suatu fungsi adalah sama dengan minimasi dari negatif fungsi yang sama.

Contoh : Maksimalkan $Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$ adalah sama dengan

minimalkan $(-Z) = -5x_1 - 2x_2 - 3x_3$.

Langkah-langkah penyelesaian persoalan program linear dengan menggunakan metode simpleks adalah sebagai berikut :

1. Konversikan formulasi persoalan ke dalam bentuk standar.
2. Cari solusi basis fisibel (BSF)
3. Jika seluruh NBV mempunyai koefisien nonnegative pada baris fungsi tujuan, maka BSF optimal. Jika pada baris tersebut masih ada variabel dengan koefisien negatif, pilih salah satu variabel dengan koefisien paling negatif pada

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

baris itu. Variabel ini akan memasuki status variabel basis, karena itu variabel ini disebut variabel yang masuk basis (*entering variabel*, EV).

4. Hitung rasio antara ruas kanan dengan koefisien EV pada tiap baris pembatas dimana EV-nya mempunyai koefisien positif. Variabel basis pada baris pembatas dengan rasio positif. Variabel basis pada baris pembatas dengan rasio positif terkecil akan berubah status menjadi variabel non basis. Variabel ini kemudian disebut variabel yang meninggalkan basis (*leaving variabel*, LV).
5. Lakukan operasi baris elementer (ERO) untuk membuat koefisien EV pada baris dengan rasio positif terkecil ini menjadi berharga 1 dan berharga nol pada baris lainnya.

Contoh :

Maksimumkan $Z = 60\ x_1 + 30\ x_2$

Berdasarkan : $8\ x_1 + 6\ x_2 \leq 48$

$4\ x_1 + 2\ x_2 \leq 20$

Langkah 1 : Konversikan ke dalam bentuk standar

Maksimumkan $Z = 60\ x_1 + 30\ x_2$

Berdasarkan : $8\ x_1 + 6\ x_2 + S_3 = 48$

$4\ x_1 + 2\ x_2 \qquad + S_4 = 20$

atau dapat ditulis dalam bentuk kanonik sebagai berikut :

$Z - 60\ x_1 - 30\ x_2 = 0$

$8\ x_1 + 6\ x_2 + S_3 = 48$

$4\ x_1 + 2\ x_2 + S_4 = 20$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Langkah 2 : Menetukan BSF

Dari bentuk kanonik di atas jika kita tetapkan $x_1=x_2=0$, maka akan didapatkan harga S_3, S_4 yaitu sama dengan ruas kanan masing-masing baris. Dengan mengikutsertakan baris tujuan didapat :

BV = {Z, S_3,S_4} : NBV = {x_1,x_2}

BFS-nya adalah Z = 0, $S_3 = 48$, $S_4 = 20$ dan $x_1 = x_2 = 0$

Langkah 3 :

Dari formulasi kanonik di atas kita tahu bahwa seluruh NBV mempunyai koefisien yang berharga negatif sehingga pada iterasi ini BSF belum optimal. Karena x_1 mempunyai koefisien paling negatif,maka x_1 terpilih sebagai EV.

Langkah 4 : Menghitung rasio dan melakukan ERO.

Rasio dari baris 1 adalah 48/8 = 8.

Rasio dari baris 2 adalah 20/4 = 5 (rasio terkecil).

Hal ini menunjukkan bahwa x_1 akan menjadi variabel basis pada baris 2, menggantikan S_3 yang berubah statusnya menjadi LV.

Selanjutnya lakukan ERO agar koefisien x_1 berharga 1 pada baris 2 dan nol pada baris lain. Prosedur ini disebut *pivoting,* dan baris 2 dinamai baris pivot.

Langkah-langkah ERO adalah sebagai berikut :

ERO 1 : menjadikan koefisien x_1 berharga 1 pada baris 2.

Hasilnya : $x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}25S_4 = 5$.

ERO 2 : menjadikan koefisien x_1 berharga 0 pada baris 0.

Hasilnya : $Z + 16\ S_4 = 300$

ERO 3 : menjadikan koefisien $x_1$berharga 0 pada baris 1

Hasilnya : $2x_2 - 2S_2 + S_3 = 8$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Bentuk kanonik baru adalah :

Baris 0	Z	$+ 16\ S_3$	$= 300$
Baris 1	$2\ x_2$	$+ S_1 - 2\ S_4$	$= 8$
Baris 2	$x_1 + 0{,}5\ x_2$	$+ 0{,}25\ S_4$	$= 5$

Sekarang diperoleh : BV = $\{Z, S_3, x_1\}$; NBV = $\{S_4, x_2\}$

BSF nya : $Z = 300$, $S_3 = 8$, $x_1 = 5$, $S_4 = x_2 = 0$

Karena koefisien dari seluruh variabel pada baris 0 sudah berharga positif, maka BFS optimal.

Biasanya dalam menyelesaikan program linear digunakan tabel simpleks sebagai berikut :

Iterasi	BV	x_1	x_2	S_3	S_4	x_B	Rasio
0	S_3	8	6	1	0	48	6
	S_4	4	2	0	1	20	5
	Z	-60	-30	0	0	0	

Iterasi	BV	x_1	x_2	S_3	S_4	x_B
1	S_3	0	2	1	-2	8
	x_1	1	½	0	¼	5
	Z	0	0	0	16	300

Untuk menyelesaikan persoalan program linear dengan fungsi tujuan meminimumkan Z, ada dua cara yang dapat dilakukan yaitu :

1. Mengubah fungsi tujuan dan persamaan, kemudian menyelesaikan sebagai persoalan maksimasi.
2. Memodifikasi langkah 3 sehingga menjadi :

   Jika seluruh NBV pada baris 0 mempunyai koefisien yang berharga nonpositif, maka BFS optimal. Jika pada baris 0 masih ada variabel dengan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

koefisien positif, pilihlah variabel dengan koefisien paling positif untuk menjadi EV.

Contoh :

Minimumkan : $z = 2\ x_1 - 3\ x_2$

Berdasarkan : $x_1 + x_2 < 4$

$x_1 - x_2 < 6$

$x_1, x_2 > 0$

♦ Jika dilakukan cara I, maka fungsi tujuan akan menjadi :

Maksimumkan : $-Z = -2\ x_1 + 3\ x_2$

Dengan seluruh pembatas yang tidak berubah, persoalan ini dapat diselesaikan seperti cara di atas.

♦ Jika dilakukan cara II maka akan diperoleh hasil sebagai berikut :

Iterasi	BV	Z	x_1	x_2	S_3	S_4	x_B
0	Z	1	-2	3	0	0	0
	S_3	0	1	1	1	0	4
	S_4	0	1	-1	0	1	6

Iterasi	BV	Z	x_1	x_2	S_3	S_4	x_B
1	Z	1	-5	0	-3	0	-12
	x_2	0	1	1	1	0	4
	S_4	0	2	0	1	1	10

Solusi optimal : $x_1 = 0$; $x_2 = 4$; $Z = -12$

2.3. Dualitas Program Linear

Setiap persoalan program linier mempunyai suatu program linier lain yang saling berkaitan yang disebut **dual**, sedemikian sehingga solusi pada persoalan semula (yang disebut **primal**) juga memberi solusi pada dualnya.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Ketentuan untuk menuliskan bentuk dual dari suatu program linear adalah :

1. Koefisien fungsi tujuan primal menjadi konstanta ruas kanan bagi dual
2. Konstanta ruas kananpada primal menjadi koefisien fungsi tujuan bagi dual
3. Kasus maksimum pada primal menjadi kasus minimal pada dual atau sebaliknya
4. Setiap kolom pada primal berkorespondensi dengan baris pada dual dan setiap baris pada primal berkorespondensi dengan kolom pada dual.

Bentuk umum masalah primal-dual adalah sebagai berikut :

Primal : Maksimumkan : $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

Dengan pembatas :

$$a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le d_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le d_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n \le d_m$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$$

Dual : Minimumkan : $W = d_1y_1 + d_2y_2 + \ldots\ldots + d_my_m$

Dengan pembatas : $a_{11}y_1 + a_{12}\,y_2 + \ldots\ldots + a_{m1}\,y_m \ge c_1$

$$a_{21}y_1 + a_{22}\,y_2 + \ldots\ldots + a_{m2}\,y_m \ge c_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}y_1 + a_{m2}\,y_2 + \ldots\ldots + a_{mn}\,y_m \ge c_n$$
$$y_1, y_2, \ldots\ldots y_m \ge 0$$

2.3.1. Metode Dual Simpleks

Apabila pada suatu iterasi didapatkan persoalan program linear yang sudah optimum , tetapi belum feasibel maka persoalan tersebut harus diselesaikan dengan menggunakan metode dual simpleks. Syarat digunakannya metode ini

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

adalah bahwa seluruh pembatas harus merupakan ketidaksamaan yang bertanda ($\leq$), sedangkan fungsi tujuan bisa berupa maksimasi atau minimasi. Pada dasarnya metode dual simpleks ini menggunakan tabel yang sama seperti metode simpleks pada primal, tetapi *leaving* dan *entering variable*-nya ditentukan sebagai berikut :

1. *Leaving variable* (kondisi fisibelitas)

   Yang menjadi *Leaving variable* pada dual simpleks adalah variabel basis yang memiliki harga negatif terbesar. Jika semua variabel basis telah berharga positif atau nol, berarti keadaan fesibel telah tercapai.

3. *Entering variable* (kondisi optimalitas)

   a. Menghitung rasio antara koefisien fungsi tujuan dengan koefisien *Leaving variable* dengan mengabaikan penyebut yang positif atau nol. Jika penyebut berharga positif atau nol, berarti persoalan tersebut tidak memiliki solusi fiasibel.

   b. Untuk kasus minimasi, *entering variable* adalah variabel dengan rasio terkecil, sedang untuk kasus maksimasi *entering variable* adalah variabel dengan rasio absolut terkecil.

Contoh :

Minimalkan Z : $2x_1 + x_2$

Pembatas $3x_1 + x_2 \geq 3$

$4x_1 + 3x_2 \geq 6$

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$x_1 , x_2 \geq 0$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

tabel simpleks awalnya sebagai berikut :

Iterasi	Basis	x_1	x_2	S_3	S_4	S_5	x_B	
0	Z	2	1	0	0	0	0	→ Optimal
	S_3	-3	-1	1	0	0	-3	→ Tidak fisibel
	S_4	-4	-3	0	1	0	-6	→ Tidak fisibel
	S_5	1	2	0	0	1	3	
Iterasi	Basis	x_1	x_2	S_3	S_4	S_5	x_B	
1	Z	-2/3	0	0	-1/3	0	2	
	S_3	-5/3	0	1	-1/3	0	-1	
	x_2	4/3	1	0	-1/3	0	2	
	S_5	5/3	0	0	2/3	1	-1	
Iterasi	Basis	x_1	x_2	S_3	S_4	S_5	x_B	
2	Z	0	0	-2/5	-1/5	0	12/5	
	x_1	1	0	-3/5	1/5	0	3/5	
	x_2	0	1	4/5	-3/5	0	5/6	
	S_5	0	0	-1	1	1	3	

2.4. Bentuk Matriks Tabel Simpleks

Persoalan program linear bentuk kanonik, dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} \text{Maksimumkan} \\ \text{atau} \\ \text{Minimumkan} \end{pmatrix} \quad Z = CX \qquad \ldots\ldots(2.4.1)$$

Pembatas :

$$(A,I)\,X = D \qquad \ldots\ldots(2.4.2)$$

$$X \geq 0 \qquad \ldots\ldots(2.4.3)$$

Dimana : I adalah matriks identitas

$$X = [x_1, x_2, \ldots x_n]^T \,;\, C = [c_1, c_2, \ldots c_n]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,n-m} \end{bmatrix} ; D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Jika vektor X dipartisi menjadi X_I dan X_{II} sedemikian sehingga X_{II} berkorespondensi dengan variabel basis awal. Begitu pula vektor C dipartisi menjadi C_I dan C_{II} yang masing masing berkorespondensi dengan X_I dan X_{II}.

Sehingga persamaan (2.4.1) dan (2.4.2) dapat ditulis menjadi :

$$\begin{bmatrix} 1 & -C_I & -C_{II} \\ 0 & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ X_I \\ X_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} \qquad \text{.......(2.4.4)}$$

Pada setiap iterasi, x_B menunjukkan variabel basis baru dan misalkan B menunjukkan basis yang behubungan dengan x_B. Karena semua variabel-variabel nonbasis berharga nol maka solusi baru diperoleh dari

$$B\,x_B = D \quad \text{dan} \quad Z = C_B\,x_B$$

Dimana C_B adalah elemen-elemen C yang berkorespondensi dengan x_B

Persamaan solusi baru ditulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & -C_B \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} \qquad \text{.......(2.4.5)}$$

apabila kedua ruas dikalikan dengan $\begin{bmatrix} 1 & -C_B \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1}$ akan diperoleh :

$$\begin{bmatrix} Z \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_B B^{-1} D \\ B^{-1} D \end{bmatrix} \qquad \text{.......(2.4.6)}$$

Sehingga pada tabel simpleks yang baru diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -C_I & -C_{II} \\ 0 & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ X_I \\ X_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} A - C_I & C_B B^{-1} - C_{II} \\ 0 & B^{-1} A & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ X_I \\ X_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_B B^{-1} D \\ B^{-1} D \end{bmatrix}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dari keterangan di atas, dengan perhitungan matriks diperoleh tabel simpleks

Iterasi Awal

Basis	X_I	X_{II}	x_B
Z	$C_{II}A - C_I$	0	$C_{II}D$
X_{II}	A	I	D

Iterasi Selanjutnya

Basis	X_I	X_{II}	x_B
Z	$C_B B^{-1} A - C_I$	$C_B B^{-1} - C_{II}$	$C_B B^{-1} D$
x_B	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} D$

Dimana pada iterasi awal $X_B = X_{II}$, $C_B = C_{II}$, $B = I$ dan $B^{-1} = I$

Sehingga diperoleh $X_B = B^{-1}D$ dan $z_j = C_B B^{-1} A_j$

Contoh :

Maksimumkan : $Z = 60\ x_1 + 30\ x_2$

Pembatas : $8\ x_1 + 6\ x_2 \leq 48$

$4\ x_1 + 2\ x_2 \leq 20$

$x_1, x_2, \geq 0$

Persoalan program linear di atas dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\text{Maksimumkan : } Z = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pembatas : } \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$x_j \geq 0$ untuk $j = 1, 2$

dimana S_3, S_4 merupakan variabel slack. Tampak bahwa pada bentuk ini

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad S_3 \quad S_4]^T,\ C = [60 \quad 30 \quad 0 \quad 0]$$

$$D = [48 \quad 20]^T,\ A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika vektor X dipartisi menjadi X_I dan X_{II} sedemikian sehingga X_{II} berkorespondensi dengan variabel basis awal. Begitu pula vektor C menjadi C_1 dan C_2 yang masing masing berkorespondensi dengan X_I dan X_{II} maka persamaan fungsi tujuannya menjadi $Z - C_I X_I - C_{II} X_{II} = 0$

dengan : $X_I = [x_1 \quad x_2]$, $X_{II} = [S_3 \quad S_4]$

$C_I = [60 \quad 30]$, $C_{II} = [0 \quad 0]$

Iterasi	BV	x_1	x_2	S_3	S_4	x_B	Rasio
0	S_3	8	6	1	0	48	6
	S_4	4	2	0	1	20	5
	Z	-60	-30	0	0	0	
1	S_3	0	2	1	-2	8	
	x_1	1	½	0	¼	5	
	Z	0	0	0	16	300	

Pada contoh soal, diketahui variabel basis pada iterasi terakhir adalah

$$X_{BV} = [S_3 \quad x_1]^T \text{ maka } B = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

dan untuk masing-masing elemen pada iterasi terakhir dapat diperoleh dengan menggunakan rumus yang sudah ada.

2.5 Transformasi Simpleks

Pada tabel simpleks awal memberikan informasi untuk menyelesaikan suatu permasalahan.Setelah menentukan *entering variable* dan *leaving variable* dari tabel simpleks awal ini dapat dibentuk tabel simpleks selanjutnya dengan proses

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

transformasi simpleks. Dengan menotasikan tabel simpleks pertama dengan T_1, kedua dengan T_2, dan seterusnya maka pada tabel simpleks T_{n+1} dapat dibentuk secara langsung dari tabel simpleks T_n dengan proses transformasi simpleks.

Dalam sub bab ini notasi elemen pada T_{n+1} ditandai dengan penambahan tanda asteriks (*).

2.5.1 Hubungan antara x_{ij} dan x_{ij}^*

Misal vektor A_j didefinisikan

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} B_i$$

Jika notasi dari *leaving vektor* dari basis lama adalah B_g maka persamaan diatas dapat dituliskan dengan :

$$A_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq g}}^{m} x_{ij} B_i + x_{gj} B_g \text{ untuk j = 1,..., n} \qquad \text{.......(2.5.1.1)}$$

Asumsikan bahwa A_h merupakan vektor basis baru yang akan menggantikan basis lama B_g maka

$$A_h = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq g}}^{m} x_{ih} B_i + x_{gh} B_g \qquad \text{.......(2.5.1.2)}$$

Karena A_h menjadi vektor basis baru yang dinotasikan dengan B_g^*, maka ada vektor A_j yang menjadi vektor basis baru sedemikian sehingga

$$A_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq g}}^{m} x_{ij}^* B_i + x_{gj}{}^* B_g{}^* \text{ untuk j = 1,..., n} \qquad \text{.......(2.5.1.3)}$$

Dengan mensubtitusi persamaan (2.6.2.2) ke persamaan (2.6.2.3) maka

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$A_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq g}}^{m} x_{ij}^* B_i + x_{gj}^* \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq g}}^{m} x_{ih} B_i + x_{gh} B_g \right] \text{untuk j} = 1,\ldots, n \quad \ldots\ldots(2.5.1.4)$$

$$A_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq g}}^{m} (x_{ij}^* + x_{gj}^* x_{ih}) B_i + x_{gj}^* x_{gh} B_g \ \text{untuk j} = 1,\ldots, n \quad \ldots\ldots(2.5.1.5)$$

dengan mengganti A_j pada (2.5.1.5) dengan A_j pada (2.5.1.1) diperoleh

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq g}}^{m} x_{ij} B_i + x_{gj} B_g = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq g}}^{m} (x_{ij}^* + x_{gj}^* x_{ih}) B_i + x_{gj}^* x_{gh} B_g \quad \ldots\ldots(2.5.1.6)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$x_{ij} = x_{ij}^* + x_{gj}^* x_{ih} \ \text{untuk i} = 1,\ldots, g-1, g+1, \ldots m \quad \ldots\ldots(2.5.1.7)$$

$$j = 1,\ldots, n$$

dan

$$x_{gj} = x_{gj}^* x_{gh} \ \text{untuk j} = 1,\ldots, n \quad \ldots\ldots(2.5.1.8)$$

$$x_{gj}^* = \frac{x_{gj}}{x_{gh}}$$

sehingga persamaan (2.5.1.7) menjadi :

$$x_{ij}^* = x_{ij} - x_{gj}^* x_{ih} = x_{ij} - x_{ih} \frac{x_{gj}}{x_{gh}}. \quad \ldots\ldots(2.5.1.9)$$

Misal $x_{gj}^* = G_j^*$,$x_{ih}^* = H_i$ $x_{ij} = E_{ij}$ dan $x_{ij}^* = E_{ij}^*$ maka persamaan (2.5.1.9) dapat dituliskan

$$E_{ij}^* = E_{ij} - H_i G_j^* \quad \ldots\ldots..(2.5.1.10)$$

Nampak bahwa persamaan (2.5.1.8) dan (2.5.1.9) menyatakan hubungan antara x_{ij} dan x_{ij}^*. Persamaan-persamaan ini merupakan langkah tranformasi simpleks dari elemen x_{ij} pada tabel T_n menjadi elemen x_{ij}^* pada T_{n+1}.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.5.2 Hubungan antara $z_j - c_j$ dengan $z_j^* - c_j^*$

Misal didefinisikan

$$z_j^* = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}^* x_{ij}^* \text{ untuk } j = 1,\dots, n \qquad \text{.......(2.5.2.1)}$$

dimana : c_{Bi}^* menyatakan harga pada vektor basis T_{n+1}. Karena dalam memperoleh basis baru dengan menghapus vektor ke-j pada basis sebelumnya dan menambahkannya dengan vektor ke-h, maka sebanyak m-1 vektor pada basis yang lama akan tetap menjadi basis pada basis baru. Oleh karenanya diperoleh :

$$z_j^* = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} x_{ij}^* + c_{Bg}^* x_{gj}^* \text{ untuk } j = 1,\dots, n \qquad \text{.......(2.5.2.2)}$$

dimana $c_{Bg}^* = c_h$ merupakan harga vektor yang akan menjadi basis. Dengan mensubtitusikan persamaan (2.5.1.8) dan persamaan (2.5.1.9) maka diperoleh :

$$z_j^* = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq g}}^{m} c_{Bi}\left[x_{ij} - \left[\frac{x_{gj}}{x_{gh}}\right]x_{ih}\right] + c_{Bg}^*\left[\frac{x_{gj}}{x_{gh}}\right]$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq g}}^{m} c_{Bi}x_{ij} - \sum_{\substack{i=1 \\ i= g}}^{m} c_{Bi}\left[\frac{x_{gj}}{x_{gh}}\right]x_{ih} + c_{Bg}^*\left[\frac{x_{gj}}{x_{gh}}\right] \text{ untuk } j = 1,\dots, n$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}x_{ij} - \left[\frac{x_{gj}}{x_{gh}}\right]\left[\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq g}}^{m} c_{Bi}x_{ih} - c_{Bg}^*\right] \qquad \text{.......(2.5.2.3)}$$

Karena $c_{Bg}^* = c_h$ dan $c_j^* = c_j$ maka

$$z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) - \left[\frac{x_{gj}}{x_{gh}}\right](z_h - c_h) \qquad \text{.......(2.5.2.4)}$$

Nampak bahwa persamaan (2.5.2.4) menyatakan hubungan z_j-c_j dan z_j^*-c_j^*.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.5.3. Hubungan antara x_{Bi} dan x_{Bi}^*

Dengan cara yang sama seperti pada sub sub bab (2.5.1) yang menghasilkan persamaan (2.5.1.9). Dengan mengganti x_{ij}^* dengan x_{Bi}^*, x_{ij} dengan x_{Bi} , x_{gj} dengan x_{Bg}^* maka hubungan x_{Bi} dengan x_{Bi}^* dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$x_{Bi}^* = x_{Bi} - x_{Bg}^* \, x_{ih} \qquad \text{.....(2.5.3.1)}$$

dengan $x_{Bg}^* = \dfrac{x_{Bg}}{x_{gh}}$

2.5.4 Interpretasi dari Transformasi Simpleks

Misalkan $B = [\, B_1 \; B_2 \; . \; . \; . \; B_g \; . \; . \; . \; B_m \,]$ adalah matrik dari solusi basis dimana B_g adalah vektor yang akan meninggalkan basis dan akan digantikan oleh vektor nonbasis yang masuk basis, sebut A_h. Misalkan A_h dinotasikan dengan B_g^*, maka

$$B_g^* = \sum_{i=1}^{m} x_{ih} B_i \qquad \text{.......(2.5.4.1)}$$

dan

$$B^* = [B_1 \; B_2 \; . \; . \; . \; B_g^* . \; . \; . \; B_m] \qquad \text{.......(2.5.4.2)}$$

dengan B^* merupakan matrik dari vektor baris pada solusi baru.

Persamaan (2.5.4.2) dapat dinyatakan

$$B^* = [B_1 \; B_2 \; . \; . \; . \; B_g . \; . \; . \; B_m] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_{1h} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_{gh} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_{mh} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{......(2.5.4.3)}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Misal

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_{1h} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_{gh} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_{mh} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Maka

$$B^* = B.E \qquad \ldots\ldots(2.5.4.4)$$

Persamaan (2.5.4.3) menunjukkan bahwa matriks basis untuk solusi yang diberikan equivalen dengan matriks basis pada solusi awal yang dikalikan dengan matriks E. Jika pada ruas kanan dikalikan dengan B^{*-1} dan ruas kiri dengan $E^{-1}B^{-1}$ maka

$$B^*B^{*-1} = I = B\,E\,E^{-1}B^{-1} = B\,I\,B^{-1} = B\,B^{-1} = I$$

yang berarti

$$B^{*-1} = E^{-1}B^{-1} \qquad \ldots\ldots.(2.5.4.5)$$

dengan B^{*-1} adalah invers dari matrik-matrik pada matrik basis baru, E^{-1} invers matrik elementer E, dan B^{-1} invers dari matrik basis awal.

Jika Det. $E = x_{gh}$

$$\text{dan Adj. } E = \begin{bmatrix} x_{gh} & 0 & \cdots & -x_{1h} & \cdots & 0 \\ 0 & x_{gh} & \cdots & -x_{2h} & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x_{mh} & \cdots & x_{gh} \end{bmatrix}$$

maka invers dari matrik elementer E adalah

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$E^{-1} = \frac{1}{Det.E} \text{ Adj. E} \qquad \text{.......(2.5.4.6)}$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -{x_{1h}}/{x_{gh}} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & -{x_{2h}}/{x_{gh}} & & \vdots \\ 0 & 0 & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & {1}/{x_{gh}} & & \vdots \\ 0 & 0 & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -{x_{mh}}/{x_{gh}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{.......(2.5.4.7)}$$

Misalkan elemen B^{-1} dinotasikan dengan $[\beta_{ij}]$, B^{*-1} dengan $[\beta_{ij}{}^{*}]$, E^{-1} dinotasikan $[e_{ij}]$ untuk i = 1,. . . ,m dan j = 1, . . .,m maka

$$\beta_{ij}{}^{*} = \sum_{j=1}^{m} e_{ij}\beta_{ij} \qquad \text{.......(2.5.4.8)}$$

pada saat j = h, pada persamaan (2.5.4.7) diperoleh

$$e_{ij} = \frac{1}{x_{gh}} \text{ untuk i = g} \qquad \text{dan} \qquad e_{ij} = -\frac{x_{ih}}{x_{gh}} \text{ untuk i} \neq \text{g}$$

dan pada saat $j \neq h$

$e_{ij} = 1$ untuk i = g dan $e_{ij} = 0$ untuk i≠g

Oleh karenanya

$$\beta_{gj}{}^{*} = \frac{\beta_{gj}}{x_{gh}} \text{ untuk j =1,...,m} \qquad \text{.......(2.5.4.9)}$$

dan

$$\beta_{ij}{}^{*} = \beta_{ij} - \left[\frac{x_{ih}}{x_{gh}}\right]\beta_{gj} = \beta_{ij} - \beta_{gj}{}^{*}\, x_{ih} \qquad \text{.......(2.5.4.10)}$$

sementara vektor $x_j = B^{-1} A_j$ maka

$$x_j^{*} = B^{*-1} A_j = B^{*-1} B x_j = E^{-1} B^{-1} B x_j = E^{-1} x_j$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)