Lampiran 1 Perhitungan solusi basis fisibel awal persoalan aliran tiga komoditas

Untuk mendapatkan solusi basis fisibel awal dari persoalan multicommodity flows, yaitu dengan cara menyelesaikan sistem persamaan linier $Ax_i = b_i$ dan $0 \le x_i \le u_i$, untuk i = 1,2,3 dan A adalah matriks insident antara node dan busur.

Komoditas 1

Mencari pemecahan dari persamaan linier berikut dengan menggunakan eliminasi gauss yaitu :

$$x_{112} - x_{141} = 3$$

$$-x_{112} + x_{123} = -2$$

$$-x_{123} + x_{134} - x_{153} = 0$$

$$-x_{134} + x_{145} + x_{141} = -2$$

$$-x_{145} + x_{153} = 1$$

di dalam bentuk matriks, persamaan tersebut menjadi : $Ax_1 = b_1$,dimana

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} x_{112} \\ x_{123} \\ x_{134} \\ x_{145} \\ x_{141} \\ x_{153} \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari pemecahan dari persamaan linier di atas, yaitu dengan melakukan operasi baris terhadap $A_{b1} = [A \mid b_1]$ sehingga A berubah menjadi I = matriks identitas.

Dari persamaan linier di atas, maka :

$$A_{b1}=\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$ tambahkan baris kedua dengan 1x baris pertama

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$ tambahkan baris ketiga dengan 1x baris kedua

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$ tambahkan baris keempat dengan 1x baris ketiga

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$ tambahkan baris kelima dengan 1x baris keempat

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

setelah melakukan operasi baris, maka A = [B,N] dimana B adalah matriks basis dengan ukuran 4x4 dan N adalah matriks non basis dengan ukuran 4x (6-4).

Maka solusi dari persamaan Ax = b adalah $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$, dimana $x_B = B^{-1}b$ dan $x_N = 0$.

Untuk komoditas I, $x_B = \begin{bmatrix} x_{112} \\ x_{123} \\ x_{134} \\ x_{153} \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\text{Jadi } x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dan } x_N = \begin{bmatrix} x_{145} \\ x_{141} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi } x_{11} = \begin{bmatrix} x_{112} \\ x_{123} \\ x_{134} \\ x_{145} \\ x_{141} \\ x_{153} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Komoditas 2

Seperti pada komoditas 1, maka setelah dilakukan operasi baris terhadap A_{b2}, akan didapatkan $A_{b2} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ Untuk komoditas 2, $x_B = \begin{bmatrix} x_{212} \\ x_{223} \\ x_{241} \\ x_{253} \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\text{Jadi } x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dan } x_N = \begin{bmatrix} x_{234} \\ x_{245} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi } x_{21} = \begin{bmatrix} x_{212} \\ x_{223} \\ x_{234} \\ x_{245} \\ x_{241} \\ x_{253} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Komoditas 3

Seperti pada komoditas 1 dan 2, setelah dilakukan operasi baris terhadap A_{b3}, maka akan didapatkan

$$A_{b3} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\text{Untuk komoditas 3, } x_B = \begin{bmatrix} x_{312} \\ x_{323} \\ x_{334} \\ x_{353} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi } x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dan } x_N = \begin{bmatrix} x_{345} \\ x_{341} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi } x_{31} = \begin{bmatrix} x_{312} \\ x_{323} \\ x_{334} \\ x_{345} \\ x_{341} \\ x_{353} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lampiran 2 Perhitungan sub masalah 1 untuk iterasi 1

Memaksimalkan $Z = -x_{12} + x_{23} - 3x_{34} - x_{45} - 7x_{53} + 15$

Dengan kendala
$$\begin{aligned}
x_{12} - x_{41} &= 3\\
-x_{12} + x_{23} &= -2\\
-x_{23} + x_{34} - x_{53} &= 0\\
-x_{34} + x_{45} + x_{41} &= -2\\
-x_{45} + x_{53} &= 1
\end{aligned}$$

formulasi di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan program komputer LINDO dengan input :

Max $-x_{12} + x_{23} - 3x_{34} - x_{45} - 7x_{53}$

Subject to

$x_{12} - x_{41} = 3$

$-x_{12} + x_{23} = -2$

$-x_{23} + x_{34} - x_{53} = 0$

$-x_{34} + x_{45} + x_{41} = -2$

$-x_{45} + x_{53} = 1$

End

sehingga output yang dihasilkan adalah :

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      4

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)    -15.000000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X12        3.000000           .000000
      X23        1.000000           .000000
      X34        2.000000           .000000
      X45         .000000         11.000000
      X53        1.000000           .000000
      X41         .000000          3.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         .000000         -3.000000
       3)         .000000         -2.000000
       4)         .000000         -3.000000
       5)         .000000           .000000
       6)         .000000        -10.000000

NO. ITERATIONS=        4
```

dari output di atas maka dihasilkan solusi optimal yaitu :

$x = (x_{12}, x_{23}, x_{34}, x_{45}, x_{41}, x_{53})^t = (3,1,2,0,0,1)^t$

dengan nilai tujuan Z = -15 + 15 = 0

Lampiran 3 Perhitungan sub masalah 2 untuk iterasi 1

Memaksimalkan $Z = 2x_{12} - 2x_{23} - 2x_{34} - x_{45} - x_{41} - 2x_{53} + 3$

Dengan kendala

$$
\begin{aligned}
x_{12} - x_{41} &= 1 \\
-x_{12} + x_{23} &= -1 \\
-x_{23} + x_{34} - x_{53} &= -3 \\
-x_{34} + x_{45} + x_{41} &= 1 \\
-x_{45} + x_{53} &= 2
\end{aligned}
$$

formulasi di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan program komputer LINDO dengan input :

Max $2x_{12} - 2x_{23} - 2x_{34} - x_{45} - x_{41} - 2x_{53}$

Subject to

$x_{12} - x_{41} = 1$

$-x_{12} + x_{23} = -1$

$-x_{23} + x_{34} - x_{53} = -3$

$-x_{34} + x_{45} + x_{41} = 1$

$-x_{45} + x_{53} = 2$

End

sehingga output yang dihasilkan adalah :

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP        4

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)     -3.0000000

 VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
      X12        2.000000            .000000
      X23        1.000000            .000000
      X34         .000000           3.000000
      X45         .000000           2.000000
      X41        1.000000            .000000
      X53        2.000000            .000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
       2)         .000000            .000000
       3)         .000000          -2.000000
       4)         .000000            .000000
       5)         .000000          -1.000000
       6)         .000000          -2.000000

NO. ITERATIONS=        4
```

dari output di atas maka dihasilkan solusi optimal yaitu :

$x = (x_{12}, x_{23}, x_{34}, x_{45}, x_{41}, x_{53})^t = (2,1,0,0,1,2)^t$

dengan nilai tujuan Z = -3 + 3 = 0

Lampiran 4 Perhitungan sub masalah 3 untuk iterasi 1

Memaksimalkan $Z = -3x_{12} - 4x_{23} + 4x_{34} + x_{45} - 5x_{41} - x_{53} + 8$

Dengan kendala

$$\begin{array}{llll} x_{12} - x_{41} = 1 & & -x_{34} + x_{45} + x_{41} = 0 \\ -x_{12} + x_{23} = 0 & & -x_{45} + x_{53} = 1 \\ -x_{23} + x_{34} - x_{53} = -2 & & \end{array}$$

bentuk standart dari formulasi di atas adalah :

$$\begin{array}{ll} x_{12} - x_{41} + R_1 = 1 & -x_{34} + x_{45} + x_{41} + R_4 = 0 \\ -x_{12} + x_{23} + R_2 = 0 & -x_{45} + x_{53} + R_5 = 1 \\ -x_{23} + x_{34} - x_{53} + R_3 = -2 & \end{array}$$

karena ruas kanan baris ketiga pada kendala bernilai negatif , maka kendala pada baris ketiga harus dikalikan dengan -1 sehingga formulasi di atas menjadi :

$$\begin{array}{lll} x_{12} - x_{41} + R_1 & = & 1 \\ -x_{12} + x_{23} + R_2 & = & 0 \\ x_{23} - x_{34} + x_{53} - R_3 + R_6 & = & 2 \\ -x_{34} + x_{45} + x_{41} + R_4 & = & 0 \\ -x_{45} + x_{53} + R_5 & = & 1 \end{array}$$

$Z = -3x_{12} - 4x_{23} + 4x_{34} + x_{45} - 5x_{41} - x_{53} + 8 - MR_1 - MR_2 - MR_3 - MR_4 - MR_5 - MR_6$

$Z + 3x_{12} + 4x_{23} - 4x_{34} - x_{45} + 5x_{41} + x_{53} + MR_1 + MR_2 + MR_3 + MR_4 + MR_5 + MR_6 = 8$

$Z + 3x_{12} + 4x_{23} - 4x_{34} - x_{45} + 5x_{41} + x_{53} + M(1 - x_{12} + x_{41}) + M(x_{12} - x_{23}) + M(x_{23} - x_{34} + x_{53} + R_6 - 2) + M(x_{34} - x_{45} - x_{41}) + M(1 + x_{45} - x_{53}) + M(2 - x_{23} + x_{34} - x_{53} + R_3) = 8$

$Z + 3x_{12} + (4-M)x_{23} + (-4+M)x_{34} - x_{45} + 5x_{41} + (1-M)x_{53} + MR_3 + MR_6 = 8 - 2M$

Permasalahan di atas diselesaikan dengan menggunakan metode simpleks sebagai berikut :

BV	Z	x_{12}	x_{23}	x_{34}	x_{45}	x_{41}	x_{53}	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	BSF
Z	1	3	4-M	-4+M	-1	5	1-M	0	0	M	0	0	M	8-2M
R_1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	1
R_2	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
R_3	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	2
R_4	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
R_5	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
R_6	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	2
Z	1	3	4-M	-4+M	-M	5	0	0	0	M	0	-1+M	M	7-M
R_1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	1
R_2	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
R_3	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	-1	0	-1	1	1
R_4	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
x_{53}	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
R_6	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	-1	0	-1	1	1
Z	1	3	4-M	-4	0	5+M	0	0	0	M	M	-1+M	M	7-M
R_1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	1
R_2	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
R_3	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	-1	-1	-1	1	1
x_{45}	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
x_{53}	0	0	0	-1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
R_6	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	-1	-1	-1	1	1
Z	1	7-M	0	-4	0	5+M	0	0	-4+M	M	M	-1+M	M	7-M
R_1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	1
x_{23}	0	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
R_3	0	1	0	0	0	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	1	1
x_{45}	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
x_{53}	0	0	0	-1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
R_6	0	1	0	0	0	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	1	1
Z	1	0	0	-4	0	12	0	-7+M	-4+M	M	M	-1+M	M	0
x_{12}	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	1
x_{23}	0	0	1	0	0	-1	0	1	1	0	0	0	0	1

R_3	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	1	0
x_{45}	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
x_{53}	0	0	0	-1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
R_6	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	1	0

Dari tabel simpleks di atas dihasilkan solusi optimal yaitu :

$x = (x_{12}, x_{23}, x_{34}, x_{45}, x_{41}, x_{53})^t = (1,1,0,0,0,1)^t$

Dengan nilai tujuan $Z = 0$