BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Himpunan Konveks

Definisi 2.1.1.

Misalkan $x_i \in R^n$, i = 1,2, ..., k dimana $0 < \lambda_i < 1$ dan $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. x disebut kombinasi linier konveks dari x_i jika x dapat dinyatakan sebagai

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

Definisi 2.1.2.

Suatu himpunan $K \subseteq R^n$ disebut himpunan konveks jika setiap kombinasi linier konveks di 2 titik di dalam K juga masuk di dalam K. Atau dengan kata lain, K disebut konveks jika $x_1, x_2 \in K$ maka $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ juga termuat di dalam K.

Definisi 2.1.3.

Titik ekstrim dari himpunan konveks K adalah titik di dalam K yang tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier konveks dari 2 titik yang lain yang berada di dalam K. Atau dengan kata lain, jika $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ dengan $0 < \lambda < 1$ dan $x_1, x_2 \in K$, maka $x = x_1 = x_2$.

2.2. Program Linier

Definisi 2.2.1.

Program linier adalah suatu cara untuk menyelesaikan persoalan pengalokasian sumber-sumber yang terbatas diantara beberapa aktivitas yang bersaing, dengan cara yang terbaik yang mungkin dilakukan.

Formulasi matematis masalah program linier secara umum adalah:

Memaksimalkan / Meminimalkan $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ ...(2.1)

Dengan kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ (\leq \text{ atau } \geq)\ b_1$$

$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \ (\leq \text{ atau } \geq)\ b_2 \quad \dots(2.2)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \ (\leq \text{ atau } \geq)\ b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \quad \dots(2.3)$$

Definisi 2.2.2.

Variabel keputusan yaitu variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan-keputusan yang akan dibuat.

Pada formulasi program linier di atas, $x_1, x_2, \dots, x_n$ disebut variabel keputusan.

Definisi 2.2.3.

Fungsi tujuan yaitu fungsi dari variabel keputusan yang akan dimaksimalkan atau diminimalkan.

Pada formulasi program linier di atas, $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ disebut fungsi tujuan.

Definisi 2.2.4.

Pembatas yaitu kendala yang dihadapi sehingga kita dapat menentukan harga-harga variabel keputusan secara sembarang.

Pada formulasi program linier di atas, persamaan (2.2) disebut pembatas.

Definisi 2.2.5.

Pembatas tanda yaitu pembatas yang menjelaskan apakah variabel keputusannya diasumsikan hanya berharga non negatif atau variabel keputusan itu boleh berharga positif boleh juga negatif.

Pada formulasi program linier di atas, persamaan (2.3) disebut pembatas tanda.

Definisi 2.2.6.

Solusi fisibel dari masalah program linier adalah suatu vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ yang memenuhi persamaan (2.2) dan (2.3).

Theorema 2.2.1.

Himpunan solusi-solusi fisibel SF adalah himpunan konveks.

Bukti :

Theorema diatas dibuktikan dengan menunjukkan bahwa setiap kombinasi linier konveks dari dua solusi fisibel adalah juga merupakan solusi fisibel.

Misalkan $x_1$dan x_2 adalah dua solusi fisibel sebarang dalam SF, maka berlaku :

$$x_1 \geq 0 \;, \; x_2 \geq 0 \qquad \dots (2.4)$$

dan $$Ax_1 = B \;, \; Ax_2 = B \qquad \dots (2.5)$$

Misalkan x merupakan kombinasi linier konveks dari x_1 dan x_2, maka :

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 ,\quad 0 \le \lambda \le 1$$

dan menurut persamaan (2.4), maka $x \ge 0$ ... (2.6)

Jadi, $Ax = A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$

$$= A\lambda x_1 + A(1-\lambda)x_2$$

$$= \lambda Ax_1 + (1-\lambda)Ax_2$$

$$= \lambda B + B - \lambda B$$

$$= B \quad \text{dari (2.5)} \qquad \text{... (2.7)}$$

dari persamaan (2.6) dan (2.7) menunjukkan bahwa x merupakan solusi fisibel. Maka kombinasi linier konveks dari setiap dua solusi fisibel adalah solusi fisibel. Oleh karena itu, himpunan solusi fisibel adalah sebuah himpunan konveks. (Terbukti)

Definisi 2.2.7.

Solusi basis adalah sebuah solusi dari persamaan (2.2) dimana (n-m) variabel diantaranya diberi nilai nol. Ke (n-m) variabel yang bernilai nol ini disebut variabel non basis, sedang yang lainnya sebanyak m variabel disebut variabel basis.

Definisi 2.2.8.

Solusi basis fisibel adalah solusi yang memenuhi syarat kenonnegatifan persamaan (2.3).

Theorema 2.2.2.

Suatu solusi basis fisibel dari persoalan program linier merupakan titik ekstrim pada himpunan konveks dari solusi fisibel, atau ekuivalen dengan : jika suatu himpunan vektor $p_1, p_2, \ldots, p_m$ dapat membuat sifat bebas liner sedemikian hingga:

$$\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \ldots + \beta_m p_m = B \qquad \ldots (2.8)$$

dan $\beta_j \geq 0$, $j = 1,2, \ldots ,m$

maka $x_\beta = [\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_m\ 0\ \ 0 \ldots 0\ ]^1$

yang mana solusi basis fisibel merupakan titik ekstrim dari SF.

Bukti :

Telah jelas bahwa x_β ada di dalam SF. Andaikan x_β bukan merupakan titik ekstrim, maka akan ada dua titik x_1 dan x_2 yang berbeda dari x_β berada dalam SF sedemikian sehingga :

$$x_\beta = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \quad , \ 0 < \lambda < 1$$

dimana $\quad \beta_j = \lambda x_{j1} + (1-\lambda)x_{j2} \quad , j = 1,2, \ldots , m$

dan $\quad 0 = \lambda x_{j1} + (1-\lambda)x_{j2} \quad , j = m+1, \ldots , n$

Karena $x_1,x_2 \in$ SF, $\quad x_{j1},x_{j2} \geq 0$ dan $\quad 0 < \lambda < 1$, maka $x_{j1} = x_{j2} = 0$, $j = m+1, \ldots, n$.Jadi x_1 dan x_2 merupakan solusi basis fisibel dengan elemen masing-masing yaitu:

$$x_1 = [x_{11}\ \ x_{21}\ \ldots\ x_{m1}\ \ 0\ \ 0\ \ldots\ 0]^1$$

$$x_2 = [x_{12}\ \ x_{22}\ \ldots\ x_{m2}\ \ 0\ \ 0\ \ldots\ 0]^1$$

Karena x_1, x_2 merupakan solusi dari $Ax = B$, maka berlaku

$$x_{11}p_1 + x_{21}p_2 + \ldots + x_{m1}p_m = B \qquad \ldots(2.9)$$

$$x_{12}p_1 + x_{22}p_2 + \ldots + x_{m2}p_m = B \qquad \ldots(2.10)$$

Dari (2.8) dan (2.9), maka didapatkan

$$(\beta_1 - x_{11})p_1 + (\beta_2 - x_{21})p_2 + \ldots + (\beta_m - x_{m1})p_m = 0$$

tetapi karena dari hipotesis sebelumnya diketahui bahwa $p_1, p_2, \ldots, p_m$ adalah bebas linier, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa

$$\beta_1 - x_{11} = 0,\ \beta_2 - x_{21} = 0,\ \ldots,\ \beta_m - x_{m1} = 0$$

atau $\beta_1 = x_{11},\ \beta_2 = x_{21},\ \ldots,\ \beta_m = x_{m1}$

yang berarti bahwa $x_\beta = x_1$

yang mana hal ini adalah kontradiksi dengan pengandaian. Maka x_β merupakan titik ekstrim. (Terbukti)

Definisi 2.2.9.

Solusi optimum adalah solusi fisibel yang mengoptimumkan fungsi tujuan (2.1).

2.2.1. Metode Simpleks

Definisi 2.2.1.1.

Metode simpleks adalah prosedur aljabar yang bersifat iteratif yang bergerak selangkah demi selangkah dimulai dari titik ekstrim pada daerah fisibel menuju ke titik ekstrim yang diharapkan.

Langkah-langkah menyelesaikan persoalan program linier dengan menggunakan metode simpleks adalah :

1. Konversikan formulasi persoalan ke dalam bentuk standar yaitu dengan cara: apabila ada pembatas yang bertanda ≤ atau ≥ maka ditambahkan variabel kelonggaran (slack) pada pembatas.
2. Cari solusi basis fisibel (BFS)
3. Jika seluruh variabel non basis (NBV) mempunyai koefisien non negatif pada baris fungsi tujuan, maka BFS sudah optimal. Jika pada baris fungsi tujuan masih ada variabel dengan koefisien negatif, pilihlah salah satu variabel yang mempunyai koefisien paling negatif pada baris fungsi tujuan.
4. Hitung rasio dari (ruas kanan) / (koefisien dari variabel yang masuk basis (entering variabel (EV))) pada setiap baris pembatas dimana EV-nya mempunyai koefisien positif. Variabel basis pada baris pembatas dengan rasio positif terkecil akan berubah status menjadi variabel non basis.

Lakukan operasi baris elementer (ERO) untuk membuat koefisien EV pada baris dengan rasio positif terkecil ini menjadi berharga 1 dan berharga 0 pada baris-baris lainnya.

Kembali ke langkah 3.

Contoh 2.2.1.1.

Pandang persoalan program linier berikut :

Meminimalkan $Z = 2x_1 - 3x_2$

Dengan kendala $x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 - x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

carilah solusi optimal untuk persoalan di atas.

Penyelesaian

Langkah 1 : Konversi ke dalam bentuk standart

Meminimalkan $Z = 2x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$

Dengan kendala

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = 6$$

Formulasi ini dapat juga ditulis dalam bentuk kanonik :

Baris 0 $Z - 2x_1 + 3x_2 - 0x_3 - 0x_4 = 0$

Baris 1 $x_1 + x_2 + x_3 = 4$

Baris 2 $x_1 - x_2 + x_4 = 6$

Langkah 2 : Menentukan solusi basis fisibel (BFS)

Dari bentuk kanonik di atas, jika kita tetapkan $x_1 = x_2 = 0$, maka akan kita dapatkan harga-harga x_3 dan x_4 yaitu sama dengan ruas kanan masing-masing baris. Dengan mengikutsertakan baris 0, maka kita dapatkan :

BV = $\{Z, x_3, x_4\}$; NBV = $\{x_1, x_2\}$

BFS-nya adalah : $Z = 0, x_3 = 4, x_4 = 6, x_1 = x_2 = 0$

Langkah 3.

Dari formulasi kanonik di atas, koefisien NBV ada yang berharga positif dan ada yang berharga negatif. Sehingga pada iterasi ini, BFS belum optimal karena variabel x_2 mempunyai koefisien yang positif, maka variabel x_2 terpilih sebagai variabel yang akan menjadi variabel basis (EV)

Langkah 4.

Menghitung rasio dan melakukan operasi baris elementer (ERO)

Rasio baris 1 adalah 1/4

2 adalah –1/6

Pilih rasio yang positif, abaikan yang negatif. Maka dipilih rasio baris pertama untuk menunjukkan bahwa x_2 akan menjadi variabel basis menggantikan x_3 yang berubah statusnya menjadi variabel non basis (NBV)

Selanjutnya melakukan ERO agar koefisien x_2 berharga 1 pada baris 1 dan berharga 0 pada baris-baris lainnya.

Langkah-langkah ERO adalah sebagai berikut :

ERO 1 : Menjadikan koefisien x_2 berharga 1 pada baris 1

Hasilnya : $x_1 + x_2 + x_3 = 4$

ERO 2 : Menjadikan koefisien x_2 berharga 0 pada baris 0

Hasilnya : $Z - 5x_1 - 3x_3 = -12$

ERO 3 : Menjadikan koefisien x_2 berharga 0 pada baris 2

Hasilnya : $2x_1 + x_3 + x_4 = 10$

Bentuk kanonik yang baru adalah :

Baris 0 : $Z - 5x_1 \quad - 3x_3 \quad = -12$

Baris 1 : $\quad x_1 + x_2 + x_3 \quad = 4$

2 : $\quad 2x_1 \quad + x_3 + x_4 = 10$

Sehingga diperoleh : BV = $\{Z, x_2, x_4\}$; NBV = $\{x_1, x_3\}$

BFS-nya adalah : $Z = -12$, $x_2 = 4$, $x_4 = 10$, $x_1 = x_3 = 0$

Karena koefisien dari seluruh variabel pada baris 0 sudah berharga negatif, maka BFS di atas sudah fisibel.

Biasanya, dalam menyelesaikan program linier ini digunakan tabel simpleks sebagai berikut :

Iterasi 0

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	BFS
Z	1	-2	3	0	0	0
x_3	0	1	1	1	0	4
x_4	0	1	-1	0	1	6

Iterasi 1

BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	BFS
Z	1	-5	0	-3	0	-12
x_2	0	1	1	1	0	4
x_4	0	2	0	1	1	10

Tabel 1. Tabel simpleks untuk contoh 2.2.1.1

2.2.2. Dualitas Program Linier

Definisi 2.2.2.1.

Setiap persoalan program linier mempunyai suatu program linier lain yang saling berkaitan yang disebut "dual" , sedemikian sehingga solusi pada persoalan semula (primal) juga memberi solusi pada dualnya.

Ketentuan untuk menuliskan bentuk dual dari suatu program linier adalah :

1. Koefisien fungsi tujuan primal menjadi konstanta pada dual
2. Konstanta pada primal menjadi fungsi tujuan pada dual

3. Kasus maksimum pada primal menjadi kasus minimum pada dual atau sebaliknya
4. Setiap kolom pada primal berkorespondensi dengan baris pada dual dan setiap baris pada primal berkorespondensi dengan kolom pada dual.

Dalam notasi matriks, masalah primal dual adalah sebagai berikut :

Primal : Meminimalkan cx ... (2.11)

Dengan kendala $Ax \geq b$

$x \geq 0$

Dual : Memaksimalkan wb

Dengan kendala $wA \leq c$

w tak terbatas

Untuk menentukan solusi optimal primal, maka permasalahan dual diselesaikan seperti biasa dengan menggunakan metode simpleks dimana nilai tujuan dual sama dengan nilai tujuan primal.

2.2.3. Metode Simpleks Yang Direvisi

Definisi 2.2.3.1.

Metode simpleks yang direvisi adalah prosedur yang sistematik untuk mengimplementasikan langkah-langkah dari metode simpleks dalam susunan yang lebih kecil.

Dalam metode simpleks yang direvisi, masalah dinyatakan dalam bentuk matriks, sehingga bentuk baku untuk model pemrograman linier adalah persamaan (2.11).

Untuk memperoleh masalah dalam bentuk standart, masukkanlah vektor kolom dari variabel-variabel slack atau variabel-variabel dasar yaitu:

$$x_s = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Sehingga kendala-kendalanya menjadi :

$$[A, I]\begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = b \qquad \text{dan} \qquad \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} \geq 0$$

Salah satu ciri pokok dari metode simpleks yang direvisi adalah setiap penyelesaian layak dasar baru diselesaikan setelah variabel-variabel dasar dan tidak dasar diketahui. Jika variabel-variabel ini sudah tertentu, penyelesaian dasar yang dihasilkannya merupakan penyelesaian dari ke-m persamaan $[A, I]\begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = b$, dimana ke-n variabel tidak dasar dari antara ke (n+m) unsur dari $\begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix}$ dibuat sama dengan nol. Jika ke-n variabel ini dieliminasi dengan membuatnya sama dengan nol, maka masih ada suatu himpunan m persamaan dengan m variabel yang tidak diketahui (variabel-variabel dasar). Himpunan persamaan ini dapat dinyatakan dengan :

$$Ix_B = b$$

$Bx_B = b$, dimana x_B merupakan vektor variabel-variabel dasar.

Dalam metode simpleks hanya diperkenalkan variabel-variabel dasar sedemikian hingga B tidak tunggal. Karena B adalah matriks koefisien dari variabel basis (matriks basis), maka B^{-1} akan selalu ada. Oleh karena itu, untuk menyelesaikan $Bx_B = b$ maka kedua ruas harus dikalikan terlebih dahulu dengan B^{-1} sehingga :

$$B^{-1}Bx_B = B^{-1}b$$

Karena $B^{-1}B = I$, maka penyelesaian yang diinginkan untuk variabel-variabel dasar adalah :

$$x_B = B^{-1}b$$

Andaikan c_B merupakan vektor yang unsur-unsurnya merupakan koefisien fungsi tujuan dengan unsur-unsur x_B yang bersesuaian, maka nilai fungsi tujuan untuk penyelesaian dasar ini adalah :

$$Z = c_B x_B = c_B B^{-1} b \qquad \text{... (2.12)}$$

Dalam permasalahan dual, tujuan primal = tujuan dual. Misalkan tujuan primal adalah Z dan tujuan dual adalah W, maka $Z = W$.

Menurut persamaan (2.12), maka :

$$Z = c_B B^{-1} b = W$$

$$c_B B^{-1} b = wb$$

$$c_B B^{-1} = w \qquad \text{... (2.13)}$$

dimana w merupakan multiplier simpleks.

Langkah-langkah metode simpleks yang direvisi :

1. Mencari solusi basis fisibel awal dengan terlebih dahulu mencari $B^{-1} = B = I$, kemudian menghitung multiplier simpleks $w = c_B B^{-1}$, $b = B^{-1}b$.

   Kemudian membuat tabel metode simpleks yang direvisi sebagai berikut :

INVERS BASIS	RHS
(w)	$c_B \bar{b}$
B^{-1}	$\bar{b}$

2. Kemudian menguji apakah solusi di atas sudah optimal atau belum yaitu dengan cara : untuk setiap variabel non basis, hitung $z_j - c_j = wa_j - c_j$.

   Misalkan $z_k - c_k$ = maksimum $z_j - c_j$.

   Jika $z_k - c_k \leq 0$, maka berhenti dan solusi basis fisibel di atas adalah optimal.

   Jika $z_k - c_k > 0$, maka hitung $y_k = B^{-1}a_k$.

   Jika $y_k \leq 0$, maka berhenti dan nilai solusi optimal adalah tak terbatas.

   Jika $y_k \leq 0$, masukkan kolom $\begin{bmatrix} z_k - c_k \\ y_k \end{bmatrix}$ di sebelah kanan tabel simpleks yang direvisi di atas yaitu :

INVERS BASIS	RHS		x_k
(w)	$c_B \bar{b}$		z_k-c_k
B^{-1}	$\bar{b}$		y_k

Menentukan indeks r dengan cara sebagai berikut :

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{minimum}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} ; y_{ik} > 0 \right\}$$

pivot terletak pada y_{rk}. Kemudian memperbaharui tabel simpleks di atas dengan cara melakukan operasi baris elementer. Setelah itu kolom x_k dihilangkan dari tabel. Kembali ke langkah 2.

Contoh 2.2.3.1.

Selesaikan contoh 2.2.1.1. dengan menggunakan metode simpleks yang direvisi.

Penyelesaian :

Langkah 1.

Bentuk standart dari contoh 2.2.1.1. adalah :

Meminimalkan $Z = 2x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$

Dengan kendala $x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$x_1 - x_2 + x_4 = 6$

dengan variabel slack sekaligus menjadi variabel basis adalah x_3 dan x_4. Basis awal = $B = [a_3, a_4] = I_2$, $c_B = [0,0]$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\overline{b} = B^{-1}b$.

$B^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Kemudian menghitung multiplier simpleks $w = c_B B^{-1} = [\,0,0\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\,0,0\,]$.

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad c_B \overline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 0$$

Iterasi 1.

Membuat tabel simpleks yang direvisi :

	INVERS BASIS		RHS
z	0	0	0
x_3	1	0	4
x_4	0	1	6

Langkah 2.

Menghitung $z_j - c_j = wa_j - c_j$

$$z_1 - c_1 = wa_1 - c_1 = 0 - 2 = -2$$

$$z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = 0 - (-3) = 3$$

$z_k - c_k$ = maksimum $z_j - c_j = 3$. Maka $k = 2$ dan x_2 masuk menjadi basis. Selanjutnya menghitung $y_k = B^{-1}a_k$. karena $k = 2$ maka $y_2 = B^{-1}a_2$ $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .masukkan vektor $\begin{bmatrix} z_2 - c_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ di sebelah kanan tabel simpleks di atas dan pivot terletak pada y_{12} sedemikian sehingga :

	INVERS BASIS		RHS	x_2
Z	0	0	0	3
x_3	1	0	4	1
x_4	0	1	6	-1

Setelah dilakukan operasi baris elementer, maka tabel simpleks yang direvisi menjadi :

	INVERS BASIS		RHS
z	-3	0	-12
x_2	1	0	4
x_4	1	1	10

Dari sini terlihat bahwa w = (-3,0).

Kemudian menghitung $z_j - c_j = wa_j - c_j$

$$z_1 - c_1 = wa_1 - c_1 = -3 - 2 = -5$$

$$z_3 - c_3 = wa_3 - c_3 = -3 - 0 = -3$$

$$z_k - c_k = \text{maksimum } z_j - c_j = -3.$$

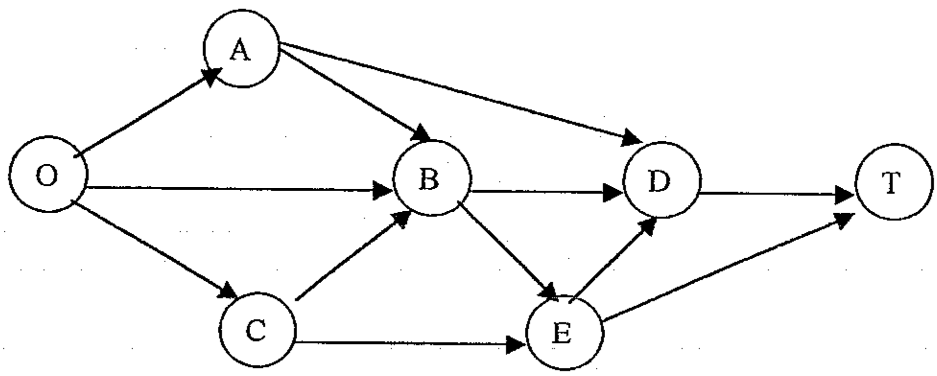
Karena $z_k - c_k = -3$, maka berhenti dan solusi basis fisibel dari tabel simpleks yang direvisi di atas adalah optimal. Sehingga solusi basis fisibel yang optimal adalah :

$$Z = -12 \; ; \; x_1 = 0 \; ; \; x_2 = 4 \; ; \; x_3 = 0 \; ; \; x_4 = 10.$$

2.3. Aliran Jaringan Kerja

Definisi 2.3.1.

Jaringan kerja adalah suatu kumpulan titik dan garis yang menghubungkan pasangan titik tertentu dan garis-garis tersebut mempunyai arah. Titik-titik tersebut dinamakan node dan garis-garis yang menghubungkan node-node tersebut dinamakan busur.



Gambar 2.3.1. Contoh jaringan kerja berarah dengan 7 node dan 12 busur.

Definisi 2.3.2.

Lintasan diantara node i dengan node j adalah urutan-urutan busur yang menghubungkan kedua node tersebut.

Definisi 2.3.3.

Siklus adalah lintasan yang menghubungkan suatu node dengan node itu sendiri.

Pada gambar 2.3.1. lintasan dari A ke D, D ke B dan B ke A disebut siklus.

Definisi 2.3.4.

Kapasitas aliran suatu busur dengan arah tertentu yaitu batas aliran (atau jumlah aliran total) yang fisibel pada busur tersebut.

Definisi 2.3.5.

Sumber suatu jaringan yaitu node yang menjadi awal bagi busur-busurnya, dimana aliran bergerak meninggalkannya.

Pada gambar 2.3.1. node O merupakan sumber jaringan.

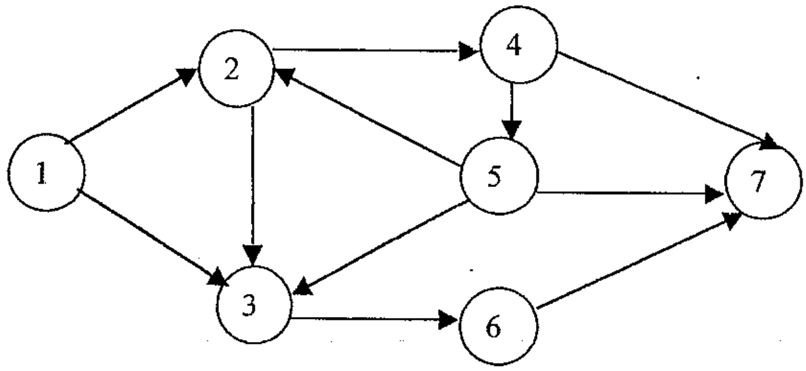
Definisi 2.3.6.

Tujuan suatu jaringan adalah node yang dituju oleh busur-busurnya dan aliran masuk ke node tersebut.

Pada gambar 2.3.1. node T merupakan tujuan jaringan.

Definisi 2.3.7.

Suatu graph berarah G = (N,A) terdiri dari himpunan node N dan himpunan busur A yang mana elemen-elemennya terdiri dari pasangan berurut dari node-node yang berbeda dan busur-busurnya mempunyai arah.



Gambar 2.3.2. Contoh graph berarah

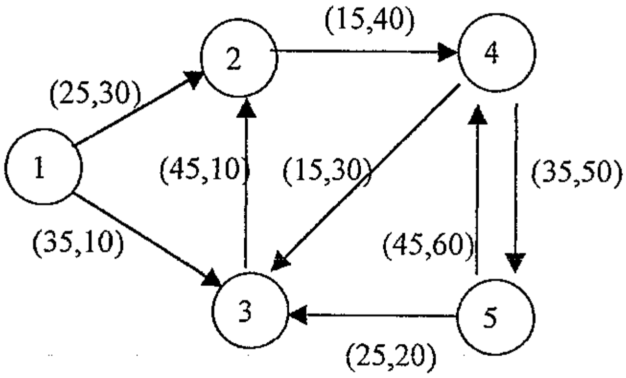
Pada contoh 2.3.2. di atas, N = {1,2,3,4,5,6,7}, A = {(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,6), (4,5), (4,7), (5,2), (5,3), (5,7), (6,7)}.

Definisi 2.3.8.

Jaringan kerja berarah adalah suatu graph berarah yang mempunyai node-node atau busur-busur yang dihubungkan dengan nilai-nilai numerik atau mempunyai bobot.

Definisi 2.3.9.

Insident matriks (matriks insident) dari suatu jaringan kerja dengan n node dan m busur berarah adalah matriks N yang berukuran nxm yang memuat satu baris untuk setiap node dan satu kolom untuk setiap busur pada jaringan kerja. Kolom yang berkorespondensi dengan busur (i,j) hanya mempunyai dua elemen tidak nol yaitu : +1 pada baris yang berkorespondensi dengan node i dan –1 pada baris yang berkorespondensi dengan node j.



Gambar 2.3.3. Contoh jaringan kerja

Maka insident matriks node-busur dari gambar 2.3.3. di atas adalah :

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c}
(1,2)(1,3)(2,4)(3,2)(4,3)(4,5)(5,3)(5,4) \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

2.4. Multicommodity Flows

Definisi 2.4.1.

Multicommodity flows pada jaringan kerja adalah salah satu model pada program linier untuk menentukan biaya minimal beberapa komoditas dari sumber (s) ke tujuan (t) sehingga terpenuhi permintaan setiap node.

Andaikan dalam suatu jaringan kerja G terdapat m node dan n busur dimana terdapat t aliran komoditas yang berbeda. Perbedaan komoditas dalam hal ini terletak pada perbedaan sifat-sifat fisik komoditas, tetapi masih dalam jenis komoditas yang sama. Misalkan u_i menyatakan vektor limit atas aliran komoditas i dalam busur-busur jaringan kerja, maka u_{ipq} merupakan limit atas aliran komoditas i dalam busur (p,q). Misalkan u menyatakan vektor limit atas sejumlah aliran komoditas dalam busur-busur jaringan kerja, maka u_{pq} merupakan limit atas sejumlah aliran komoditas dalam busur (p,q). Misalkan c_i menyatakan vektor biaya pada busur jaringan kerja untuk komoditas i, maka c_{ipq} merupakan biaya per unit komoditas i pada busur (p,q). c merupakan biaya yang masuk ke node p jika $c_{ipq} < 0$ dan c merupakan biaya yang keluar dari node p jika $c_{ipq} > 0$. Misalkan b_i menyatakan vektor persediaan (atau permintaan) komoditas i dalam jaringan kerja, maka b_{iq} merupakan persediaan (jika $b_{iq} > 0$) atau permintaan (jika $b_{iq} < 0$) komoditas i pada node q.

Formulasi program linier untuk masalah multicommodity flows dengan biaya minimal adalah sebagai berikut :

$$\text{Meminimalkan} \quad Z = \sum_{i=1}^{t} c_i x_i \qquad \ldots(2.4.1)$$

$$\text{Dengan kendala} \quad \sum_{i=1}^{t} x_{ipq} \leq u_{pq} \qquad \ldots(2.4.1.1)$$

$$Ax_i = b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,t \qquad \ldots(2.4.1.2)$$

$$0 \leq x_i \leq u_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,t \qquad \ldots(2.4.1.3)$$

Dimana x_{ipq} menyatakan aliran komoditas i pada busur (p,q)

x_i menyatakan vektor aliran komoditas i

c_i menyatakan vektor biaya per unit pada komoditas i

A menyatakan matriks insident antara node dan busur

b_i menyatakan vektor persediaan atau permintaan pada komoditas i

u_{pq} menyatakan batas aliran total semua komoditas pada setiap busur (p,q)

Dalam memecahkan masalah multicommodity flows, diambil beberapa asumsi, yaitu :

1. Setiap node tidak bisa memenuhi kebutuhannya sendiri, artinya antara node yang satu dengan node yang lain saling membutuhkan sehingga tidak ada node yang terasing.
2. Setiap komoditas pada masalah multicommodity flows mempunyai sumber dan tujuan yang tunggal.

Dalam persoalan multicommodity flows dapat menggunakan kondisi optimal program linier untuk memperoleh solusi optimal permasalahan yaitu dengan menggunakan variabel dual w_{pq} dan π_i (p).

Definisi 2.4.2.

Misalkan setiap node p $\in$ N berhubungan dengan bilangan π (p), maka π (p) disebut potensial dari node p dimana potensial node $\pi = (\pi (1), \pi (2), \dots , \pi (n))$.

Definisi 2.4.3.

Reduced costs (penurunan biaya) c^{π}_{ipq} pada busur (p,q) yang berkenaan dengan komoditas i didefinisikan sebagai :

$$c^{\pi}_{ipq} = c_{ipq} + w_{pq} - \pi_i (p) + \pi_i (q)$$

dalam notasi matriks, definisi diatas ditulis :

$$c^{\pi}_{i} = c_i + w - \pi_i A$$

Dalam menggunakan teori dualitas program linier untuk mendapatkan solusi optimal masalah multicommodity flows, terlebih dahulu menuliskan dualdari masalah multicommodity flows (persamaan (2.4.1.)), yaitu :

Memaksimalkan $W = -\sum_{(p,q)\in A} u_{pq} w_{pq} + \sum_{i=1}^{t} b_i \pi_i$ ...(2.4.2)

Dengan kendala $c^{\pi}_{ipq} = c_{ipq} + w_{pq} - \pi_i(p) + \pi_i(q) \geq 0$, $\forall (p,q)\in A$

$\forall i = 1,2,..,t$

$w_{pq} \geq 0$, $\forall (p,q)\in A$

Definisi 2.4.4.

Kondisi optimal pada program linier disebut kondisi slackness (optimal) yang saling melengkapi yang didefinisikan sebagai suatu keadaan dimana solusi fisibel primal x dan solusi fisibel dual (w, π_i) adalah optimal untuk masing-masing persoalan jika dan hanya jika hasil dari setiap variabel primal (dual) dan slack dalam korespondensi pembatas dual (primal) adalah nol.

Definisi 2.4.5.

Dalam kondisi slackness multicommodity flows yang saling melengkapi terdapat aliran-aliran komoditas y_{ipq}. Aliran-aliran komoditas y_{ipq} dalam masalah multicommodity flows adalah optimal dengan setiap $u_{ipq} = +\infty$ jika dan hanya jika aliran-aliran komoditas y_{ipq} adalah fisibel dan w_{pq} non negatif serta π_i (p) tidak dibatasi oleh tanda, dimana penurunan ongkos dan busur aliran memenuhi kondisi slackness yang saling melengkapi sebagai berikut :

a. $w_{pq} \left(\sum_{i=1}^{t} y_{ipq} - u_{pq}\right) = 0$, $\forall (p,q) \in A$ ...(2.4.3)

b. $c^{\pi}_{ipq} \geq 0$, $\forall$ (p,q) $\in$ A dan $\forall$ i = 1,2, ... , t ... (2.4.4)

c. $c^{\pi}_{ipq} y_{ipq} = 0$, $\forall$ (p,q) $\in$ A dan $\forall$ i = 1,2, ... , t ... (2.4.5)

Jika busur harga dan potensial node memenuhi kondisi-kondisi di atas, maka busur harga dan potensial node adalah optimal.

Theorema 2.4.1. (Nilai Dual Sebagian)

Misalkan y_{ipq} adalah aliran-aliran optimal dan misalkan w_{pq} adalah busur harga optimal untuk masalah multicommodity flows (persamaan (2.4.1)), maka untuk setiap komoditas i, variabel-variabel aliran y_{ipq} untuk (p,q) $\in$ A memecahkan masalah aliran dengan biaya minimal (tak berkapasitas) berikut

$$\text{Minimal} \left\{ \sum_{(p,q)\in A} (c_{ipq} + w_{pq}) x_{ipq} \ : \ Ax_i = b,\ x_{ipq} \geq 0 \ , \forall (p,q) \in A \right\}$$

Bukti.

Karena y_{ipq} adalah aliran-aliran optimal dan misalkan w_{pq} adalah busur harga optimal untuk masalah multicommodity flows, maka variabel-variabel ini bersama dengan beberapa himpunan potensial node π_i (p) memenuhi kondisi slackness yang saling melengkapi (persamaan (2.4.3) – (2.4.5)) di atas. Sekarang ingat bahwa kondisi (2.4.4) dan (2.4.5) merupakan kondisi optimal untuk masalah aliran dengan biaya minimal yang tidak berkapasitas untuk komoditas i dengan busur biaya ($c_{ipq} + w_{pq}$). Pengamatan ini menunjukkan bahwa aliran y_{ipq} untuk (p,q) $\in$ A memecahkan masalah aliran dengan biaya minimal. (Terbukti)