BAB II

TEORI DASAR

2.1. Program Linier

2.1.1. Pengertian Program Linier

Program Linier adalah suatu cara untuk menyelesaikan persoalan pengalokasian sumber-sumber yang terbatas di antara beberapa aktivitas yang bersaing, dengan cara terbaik yang mungkin dilakukan. Persoalan pengalokasian ini akan muncul manakala seseorang harus memilih tingkat aktivitas-aktivitas tertentu yang bersaing dalam hal penggunaan sumber daya langka yang dibutuhkan untuk menyelesaikan aktivitas-aktivitas tersebut.

Program linier ini menggunakan model matematis untuk menjelaskan persoalan yang dihadapi. Sifat linier di sini memberi arti bahwa seluruh fungsi matematis dalam model ini merupakan fungsi linier, sedang kata "program" merupakan sinonim untuk perencanaan. Dengan demikian Program Linier adalah perencanaan aktivitas-aktivitas untuk memperoleh suatu hasil yang optimum, yaitu suatu hasil yang mencapai tujuan terbaik di antara seluruh alternatif yang fisibel.

Model perumusan dan pemecahan berbagai model matematis yang mengandung suatu fungsi tujuan dan satu himpunan kendala dinamakan model program matematis. Kata program di sini berbeda dengan program pada "program komputer", karena program di sini lebih menekankan pada "memilih serangkaian tindakan". Model program linier merupakan jenis khusus model program matematis dimana fungsi tujuan dan semua fungsi kendalanya linier.

2.12. Karakteristik Program Linier

Untuk mempermudah suatu persoalan ke dalam program linier biasa digunakan karakteristik-karakteristik sebagai berikut :

a. Variabel keputusan

   Variabel keputusan adalah variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan-keputusan yang akan dibuat, dinotasikan dengan **x** dengan

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

b. Fungsi tujuan (fungsi obyektif)

   Fungsi tujuan merupakan fungsi dari variabel keputusan yang akan dimaksimalkan atau diminimalkan. Semua program linier mempunyai fungsi tujuan yang akan digunakan untuk mengukur laba atau biaya dari suatu solusi tertentu.

   Fungsi tujuan dinotasikan dengan:

$$z = \mathbf{cx}$$

   dengan **c** = vektor baris (1 x n) yang dinotasikan dengan $[\, c_1, c_2, \ldots, c_n \,]$

   x = vektor kolom (n x 1)

c. Pembatas

   Pembatas merupakan kendala yang harus dihadapi sehingga dalam menentukan harga-harga variabel keputusan tidak bisa sembarang.

Koefisien dari variabel keputusan pada pembatas dinamakan koefisien teknologis, sedangkan di sisi kanan setiap pembatas disebut ruas kanan pembatas.Himpunan dari pembatas dinotasikan dengan :

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

A merupakan matriks koefisien teknologis berukuran m x n, dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

b merupakan matrik ruas kanan berukuran m x 1, dengan $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

d. Pembatas tanda

Pembatas tanda adalah pembatas yang menjelaskan apakah variabel keputusan yang diasumsikan hanya berharga non negatif atau tidak terbatas dalam tanda. Untuk variabel keputusan berharga non negatif dinotasikan dengan :

$$x_i \geq 0 \qquad , i = 1, 2, ..., n$$

sedangkan variabel yang tidak terbatas dalam tanda berarti bahwa semua harga variabel keputusan bisa negatif ataupun non negatif.

Ciri-ciri persoalan Program Linier adalah suatu persoalan optimasi dimana dilakukan hal-hal sebagai berikut :

1. Memaksimalkan / meminimalkan suatu fungsi linier dari variabel-variabel keputusan yang disebut sebagai fungsi tujuan.

2. Harga / besaran dari variabel-variabel keputusan itu harus memenuhi suatu himpunan pembatas. Setiap pembatas harus merupakan persamaan linier atau pertidaksamaan linier.
3. Suatu pembatas tanda dikaitkan dengan setiap variabel. Untuk setiap variabel x_i, pembatas tanda akan menunjukkan apakah x_i harus non negatif atau tidak terbatas dalam tanda.

Definisi 2.1.

Suatu fungsi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dari **x** disebut fungsi linier jika dan hanya jika untuk sejumlah himpunan konstanta $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$ berlaku :

$$f(x) = \mathbf{cx} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

2.1.3. Jenis Program Linier

Berdasarkan banyaknya fungsi tujuan (obyektif) maka Program Linier dibedakan menjadi dua macam yaitu :

2.1.3.1. Program Linier Single Objektif (PLSO)

PLSO merupakan program linier yang hanya memiliki satu fungsi tujuan, atau biasa disebut Program Linier saja. Sebuah permasalahan PLSO diformulasikan dalam persamaan model matematika sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Fungsi tujuan :max / min} & z = \mathbf{cx} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ \text{Pembatas :} & \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ \quad\text{Pembatas tanda} & x_i \ge 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots.(2.1)$$

$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ jika dijabarkan menjadi :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

2.1.3.2. Program Linier Multi Objektif (PLMO)

Program Linier Multi Objektif (PLMO) merupakan program linier dimana terdapat lebih dari satu fungsi tujuan. Sehingga fungsi tujuan yang harus dioptimalkan bukan hanya satu fungsi saja, melainkan beberapa fungsi tujuan dengan masing-masing fungsi tujuan memiliki target yang berbeda-beda. Untuk lebih jelasnya model PLMO diformulasikan dalam persamaan 2.2 berikut :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Fungsi tujuan} & z_1 = \mathbf{c}_1\mathbf{x} \\ & z_2 = \mathbf{c}_2\mathbf{x} \\ & \quad \vdots \\ & z_k = \mathbf{c}_k\mathbf{x} \\ \text{Pembatas} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \text{Pembatas tanda} & x_i \geq 0 \end{array}\right\} \qquad \text{............(2.2)}$$

dengan $\mathbf{c}_i$ adalah koefisien fungsi tujuan ke i

k adalah banyaknya fungsi tujuan

z_i adalah fungsi tujuan ke i

Beberapa metode telah dikembangkan untuk menyelesaikan masalah optimasi PLMO dan dasar dari penyelesaian PLSO sangat membantu penyelesaian PLMO. Di antara metode yang dikembangkan untuk menyelesaikan permasalahan PLMO diantaranya metode Fungsi Kegunaan (*Utility Function Method*), metode Invers Kegunaan (*Inverted Utility Function Method*), metode Kriteria Global (*Global Criterion Method*), metode Fungsi Tujuan Terbatas (*Bounded Objective Function Method*), metode *Lexicographic*, dan metode *Goal Programming*. Akan tetapi yang akan dibahas dalam bab III hanya metode *Goal Programming* dan metode *Lexicographic* saja.

2.2. Penyelesaian PLSO

2.2.1. Solusi Grafik

Setelah PLSO dirumuskan diformulasikan seperti pada model (2.1), maka langkah selanjutnya adalah mengetahui teknik pemecahannya. Ada dua cara terbaik pemecahan permasalahan PLSO, yaitu solusi grafis dan solusi simpleks.

Masalah program linier yang hanya mengandung dua variabel keputusan dapat diselesaikan dengan menggunakan solusi grafik. Sedangkan untuk variabel keputusan lebih dari dua, solusi grafik ini tidak digunakan. Walaupun demikian cara grafik ini telah memberikan satu petunjuk penting bahwa untuk memecahkan permasalahan PLSO, hanya diperhatikan titik sudut pada ruang solusi / daerah fisibel.

Langkah-langkah solusi grafik untuk masalah maksimasi dan minimasi diikhtisarkan sebagai berikut :

1. Membuat grafik titik-titik solusi yang fisibel untuk masing-masing kendala

2. Menentukan daerah yang fisibel dengan mengidentifikasikan titik-titik solusi yang memenuhi semua kendala sekaligus.
3. Menggambar garis fungsi tujuan yang menunjukkan nilai variabel x_1 dan x_2 yang menghasilkan nilai fungsi tujuan.
4. Pencarian titik optimal
   a. Masalah Maksimasi

   Secara sejajar garis fungsi tujuan tersebut digeserkan ke arah nilai fungsi tujuan yang lebih besar sampai pada saat pergeseran yang lebih jauh akan menyebabkan garis tersebut sepenuhnya berada di luar daerah yang fisibel.

   b. Masalah Minimasi

   Secara sejajar garis fungsi tujuan tersebut digeserkan ke arah nilai fungsi tujuan yang lebih kecil sampai pada saat pergeseran yang lebih jauh akan menyebabkan garis tersebut sepenuhnya berada di luar daerah yang fisibel.
5. Solusi optimal
   a. Masalah Maksimasi

   Titik solusi fisibel yang terletak pada garis fungsi tujuan yang memberikan nilai fungsi tujuan terbesar merupakan solusi optimal

   b. Masalah Minimasi

   Titik solusi fisibel yang terletak pada garis fungsi tujuan yang memberikan nilai fungsi tujuan terkecil merupakan solusi optimal.

Definisi 2.2

1. Daerah fisibel dari PLSO adalah himpunan dari seluruh titik yang memenuhi seluruh pembatas, termasuk pembatas tanda.
2. Untuk persoalan Maksimasi, solusi optimal dari persoalan PLSO adalah suatu titik pada daerah fisibel dengan nilai fungsi tujuan terbesar.

   Pada persoalan Minimasi, solusi optimal adalah suatu titik pada daerah fisibel dengan nilai fungsi tujuan terkecil.

2.2.2. Solusi dengan Metode Simpleks

Pada pemecahan permasalahan PLSO dengan solusi grafik hanya melibatkan dua variabel keputusan. Namun banyak masalah program linier yang melibatkan lebih dari dua variabel keputusan. Untuk itu diperlukan prosedur solusi aljabar. Prosedur solusi aljabar yang digunakan adalah metode simpleks. Metode simpleks merupakan prosedur aljabar yang bersifat iteratif, yang bergerak selangkah demi selangkah, dimulai dari suatu titik ekstrem pada daerah fisibel (ruang solusi) menuju ke titik ekstrem yang optimum. Algoritma simpleks diterangkan dengan menggunakan logika secara Aljabar matriks, sedemikian sehingga operasi perhitungan dapat dibuat lebih efisien.

Di dalam menyelesaikan persoalan PLSO dengan menggunakan metode Simpleks, bentuk dasar yang harus digunakan adalah bentuk standar, yaitu bentuk formulasi yang memiliki sifat-sifat sebagai berikut :

a. Seluruh pembatas harus berbentuk persamaan (bertanda =) dengan ruas kanan yang non negatif.

b. Seluruh variabel harus merupakan variabel non negatif.

c. Fungsi tujuannya dapat berupa maksimasi atau minimasi.

Berikut cara memformulasikan ke dalam bentuk standar :

1. Pembatas
   a. Pembatas yang bertanda ≤ atau ≥ dapat dijadikan suatu persamaan (bertanda =) dengan menambahkan variabel *slack* (untuk kasus ≤) dan mengurangkan variabel surplus (untuk kasus ≥)
   b. Ruas kanan dari suatu persamaan dapat dijadikan bilangan non negatif dengan cara mengalikan kedua ruas dengan –1.
   c. Arah ketidaksamaan dapat berubah apabila kedua ruas dikalikan dengan negatif 1 (–1).
   d. Pembatas dengan ketidaksamaan yang ruas kirinya berada dalam tanda mutlak dapat diubah menjadi 2 ketidaksamaan.
2. Variabel

   Suatu variabel yaitu yang tidak terbatas dalam tanda dapat dinyatakan sebagai dua variabel non negatif dengan menggunakan substitusi.Substitusi ini harus dilakukan pada seluruh pembatas dan fungsi tujuannya.
3. Fungsi Tujuan

   Walaupun model standar program linier ini dapat berupa maksimasi atau minimasi, kadang-kadang diperlukan perubahan dari satu bentuk ke bentuk lainnya. Dalam hal ini maksimasi dari suatu fungsi adalah sama dengan minimasi dari negatif fungsi yang sama.

Jika pada persamaan (2.1) yaitu persamaan model linier single obyektif, fungsi kendala dapat dibentuk dalam persamaan matriks yaitu :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

dan matriks **A** terdiri dari m persamaan linier dalam n variabel keputusan (n > m) maka ada tiga macam solusi dengan pengertian sebagai berikut :

1. Solusi basis

   Solusi basis untuk **Ax** = **b** adalah solusi dimana terdapat sebanyak-banyaknya m variabel berharga bukan nol. Untuk mendapatkan solusi basis, maka sebanyak (n-m) variabel harus dinolkan (variabel non basis = NBV) dan m variabel lainnya disebut variabel basis (BV)

2. Solusi basis fisibel

   Jika seluruh variabel pada suatu solusi basis berharga non negatif, maka solusi ini disebut solusi basis fisibel.

3. Solusi fisibel titik ekstrem

   Yang dimaksud dengan solusi fisibel titik ekstrem atau titik sudut adalah solusi fisibel yang tidak terletak pada suatu segmen garis yang menghubungkan dua solusi fisibel lainnya. Apabila n < 3 maka pengertian ini tidak cocok lagi untuk mengidentifikasi solusi fisibel titik ekstrem.