BAB II

GRUP

2.1. Operasi Biner

Definisi 2.1.1

Operasi biner adalah fungsi dengan daerah asal suatu himpunan pasangan-pasangan berurutan. Khususnya jika fungsi $* : A \times A \rightarrow A$, maka $*$ merupakan operasi biner pada A.

Contoh 2.1.1

Perkalian (.) dan penjumlahan (+) merupakan operasi biner pada Z,Q,R dan C.

Definisi 2.1.2.

Jika * operasi biner pada A

1). * disebut komutatif jika $a*b = b*a$, untuk semua $a,b \in A$

2). * disebut assosiatif jika $(a*b)*c = a*(b*c)$, $\forall\, a,b,c \in A$

Contoh 2.1.2

Pergandaan (.) dan penjumlahan (+) merupakan operasi biner komutatif dan assosiatif pada Z, Q, R, C.

Definisi 2.1.3

Misal * operasi biner pada A dan $e \in A$. Elemen $e \in A$ disebut elemen identitas kanan dari * jika $a*e = a$, $\forall a \in A$ dan disebut elemen identitas kiri, dari * jika $a * e = a$, $\forall a \in A$. Jika e merupakan elemen identitas kiri sekaligus kanan , maka e disebut elemen identitas dua sisi (disingkat : elemen identitas).

Definisi 2.1.4

Misalkan * operasi biner pada A. Jika $e \in A$ elemen identitas (kiri, kanan, atau dua sisi) dan misalkan $a, b \in A$.

i) Jika $b*a = e$, maka b disebut invers kiri dari a terhadap * dan e.

ii) Jika $a*b = e$, maka b disebut invers kanan dari a terhadap * dan e.

iii) Jika $b*a = e = a*b$, maka b disebut invers dua sisi (disingkat invers) dari a terhadap * dan e

Jika * komutatif , maka setiap invers kiri/kanan adalah invers dua sisi.

2.2. Pengertian Grup

Definisi 2.2.1

Misalkan G suatu himpunan tidak kosong dan $* : A \times A \rightarrow A$, G disebut *grup* dengan operasi biner *, jika :

i) * assosiatif.

ii) Terdapat sebuah elemen identitas (dua sisi) $e \in G$ untuk * ; $\forall a \in G$, $a*e = e*a = a$.

iii) Untuk setiap elemen G mempunyai invers (dua sisi) : $\forall a \in G, \exists b \in G$, $a*b = b*a = e$.

Catatan :

i) * disebut operasi grup G

ii) * tertutup, artinya ; $\forall a,b \in G \Rightarrow a*b \in G$ karena * operasi biner pada G.

iii) Jika * komutatif , maka G disebut grup Abelian .

iv) Elemen identitas pada G tunggal , secara umum elemen identitas diberi notasi e. Untuk operasi grup (+) elemen identitas adalah 0, dan untuk operasi grup (.) elemen identitas adalah 1.

v) Secara umum invers a diberi notasi a^{-1} ,. Untuk operasi grup + invers a diberi notasi –a dan untuk operasi grup (.) invers a diberi notasi a^{-1}.

Contoh 2.2.1

(Z_5, ⊕), Z_5 = himpunan bilangan bulat modulo5.

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

i. ⊕ operasi biner pada Z_5.

$\bar{a}$, $\bar{b} \in Z_5 \Rightarrow \bar{a} \oplus \bar{b} \in Z_5$.

ii. Elemen identitas $\bar{0}$.

iii. Assosiatif.

iv. Setiap elemen mempunyai invers.

$\bar{1} \to \bar{4}$ $\quad \bar{3} \to \bar{2}$

$\bar{2} \to \bar{3}$ $\quad \bar{4} \to \bar{1}$

v. Komutatif, sebab simetri terhadap diagonal utama.

Jadi (Z_5, ⊕) grup Abelian terhadap operasi ⊕.

2.3. Grup Berhingga & Subgrup

Definisi 2.3.1

Banyaknya elemen dari sebuah grup dinamakan orde dari grup dan dinotasikan dengan |G|.

Contoh 2.3.1

Grup U(10) = {1,3,7,9} dengan operasi perkalian modulo 10 memiliki orde 4.

Definisi 2.3.2

Orde elemen g di dalam grup G adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $g^n = e$. (Didalam operasi penjumlahan menjadi ng = 0). Jika tidak ada bilangan bulat demikian, maka g mempunyai orde tak berhingga. Orde dari elemen g dinotasikan dengan |g|.

Contoh 2.3.2

Pandang grup Z_{10}. Karena 1.2=2,2.2=4,3.2=6,4.2=8,5.2=0,maka |2| =5. Dengan cara yang sama diperoleh |0|=1, |7|=10, |5|=2, |6|=5.

Definisi 2.3.3

Misalkan G grup dengan operasi biner * dan H⊆ G, H disebut subgrup G, jika * merupakan operasi biner pada H (* tertutup pada H) dan H merupakan grup dengan operasi *. H subgrup dari G dinotasikan dengan H ≤G atau G≥ H, dan H< G atau G >H berarti $H \leq G$ tetapi $H \neq G$.Setiap grup G mempunyai subgrup G dan {e},di mana e adalah elemen identitias dari G.

Contoh 2.3.3

$(Z,+)<(R,+)$.

2.4 Grup Siklik

Definisi 2.4.1

Sebuah grup G dinamakan siklik jika ada sebuah elemen a didalam G sedemikian sehingga $G = \{a^n \mid n \in Z\}$. elemen a tersebut dinamakan generator dari G. Notasi $G = \langle a \rangle$ menunjukkan bahwa G adalah grup Siklik dengan generator a.

Contoh 2.4.1

$Z_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

Diperoleh

$\langle 1 \rangle = \{1, (1+1) \bmod 8, (1+1+1) \bmod 8 ,\ldots,\{1+1+1+1+1+1+1+1 \bmod 8\}$

$= \{1,2,3,4,5,6,7,0\}$

$= Z_8$

$\langle 2 \rangle = \{0,2,4,6\} \neq Z_8$

$\langle 3 \rangle = \{3,6,1,4,7,2,5,0\}$

$= Z_8$

$\langle 5 \rangle = \{5,2,7,4,1,6,3,0\}$

Jadi 1,3 dan 5 adalah generator dari Z_8, sedangkan 2 bukan generator dari Z_8.

Theorema 2.4.1

Diberikan G adalah sebuah grup,dan $a \in G$. Jika a mempunyai orde tak berhingga, maka semua pangkat berbeda dari a adalah elemen-elemen yang berlainan dari grup G. Jika a mempunyai orde berhingga, katakanlah n, maka $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ dan $a^i = a^j$ jika hanya jika n membagi habis i-j.

Bukti :

1. Jika a mempunyai orde tak berhingga, tidak ada $n \neq 0$ sedemikian sehingga a^n adalah identitas. Andaikan $a^i = a^j$ dengan $i > j$ maka $a^{i-j} = e$. Jadi terdapat $i - j \in Z^+$ sedemikian sehingga $a^{i-j} = e$. Hal ini bertentangan dengan orde a atau $|a| = n$.

2. Sekarang, asumsikan $|a| = n$,akan dibuktikan $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$.Dapat dibuktikan, elemen $e, a, \dots, a^{n-1}$adalah berbeda. Karena andaikan $a^i = a^j$, untuk suatu i,j dengan $0 \leq j < i \leq n-1$, maka $a^{i-j} = e$. Tetapi ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa n adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga a^n adalah identitas.

Ambil a^k sebarang anggota dari $\langle a \rangle$. Dengan Algoritma Pembagian, ada bilangan bulat q dan r sedemikian sehingga

$$k = qn + r \text{ dengan } 0 \leq r < n.$$

Maka $a^k = a^{qn+r} = a^{qn} . a^r = (a^n)^q . a^r = e . a^r = a^r$ dan $a^k \in \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$, sehingga $\langle a \rangle \subseteq \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$. Sebaliknya, jelas $\{e, a, \dots, a^{n-1}\} \subseteq \langle a \rangle$. Ini membuktikan bahwa $\langle a \rangle = \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$.

3. Selanjutnya, anggap bahwa $a^i = a^j$ dan akan dibuktikan bahwa n membagi habis i-j. Dimulai dengan mengamati bahwa $a^i = a^j$ berarti $a^{i-j} = e$. Dengan algoritma pembagian, ada bilangan bulat q dan r sedemikian sehingga

$i-j = qn + r$ dengan $0 \leq r < n$

Kemudian $a^{i-j} = a^{qn+r}$, dan oleh karena itu, $e = ea^r = a^r$. Karena n adalah bilangan bulat terkecil sedemikian sehingga $a^n = e$, maka haruslah $r = 0$. Jadi $i-j = qn$ atau $n \mid i-j$.

Sebaliknya, misalkan n membagi habis i-j, Maka $(i-j) = nq$, untuk suatu $q \in Z^+$. Dengan demikian, $a^{(i-j)}=a^{nq}=(a^n)^q=e^q=e$.

(Terbukti)

2.5 Generator Suatu Grup

Misalkan G adalah grup, dan $a \in G$, maka dapat digambarkan subgrup siklik <a> dari G, yang merupakan subgrup terkecil dari G yang memuat a. Diandaikan ada sebuah subgrup yang memuat a dan untuk elemen lain $b \in G$, maka subgrup tersebut harus memuat a^n dan b^n untuk semua $m,n \in Z$, dan memuat semua perkalian berhingga dari pangkat a dan b. Sebagai contoh, persamaan $a^2b^4a^{-3}b^2a^5$. Persamaan ini tidak dapat disederhanakan dengan menulis semua pangkat dari a lebih dahulu, dilanjutkan dengan pangkat dari b, karena G mungkin tidak Abelian. Selanjutnya, $e=a^0$ dan invers dari persamaan demikian merupakan tipe yang sama. Sebagai contoh, invers dari $a^2b^4a^{-3}b^2a^5$ adalah $a^{-5}b^{-2}a^3b^{-4}a^{-2}$. Sehingga semua perkalian seluruh pangkat a dan b yang membentuk sebuah subgrup dari G pasti merupakan subgrup terkecil yang memuat a dan b. Elemen a dan b ini, dinamakan generator dari subgrup tersebut.

Jika subgrup ini sama dengan G, maka <a,b> adalah generator dari G. Banyaknya elemen generator ini, dapat juga berjumlah tiga, empat atau sebanyak eleman dari g.

Contoh 2.5

Generator dari grup Z_6 adalah <1> dan <5>. Maka, <2,3> juga generator dari Z_6, karena 2+3=5, sehingga sembarang subgrup yang memuat 2 dan 3 pasti memuat 5. Oleh karena itu, <3,4>,<2,3,4>,<1,3>, dan <3,5> juga merupakan generator dari $Z_{6.}$

Definisi 2.5.1

Misalkan G adalah grup, dan $a \in G$ untuk $i \in I$. Subgrup terkecil dari G yang memuat $\{a_i \mid i \in I\}$ adalah *subgrup yang dibangun oleh* $\{a_i \mid i \in I\}$. Jika subgrup ini adalah G sendiri, maka $\{a_i \mid i \in I\}$ membangun G dan a_i adalah *generator* dari G.

2.6 External Direct Product

Definisi 2.6

Diberikan $G_1, G_2, \ldots G_n$ adalah kumpulan grup. *External direct product* dari $G_1, G_2, \ldots G_n$ ditulis $G_1 \oplus G_2 \ldots \oplus G_n$, adalah himpunan semua pasangan n tupel yang mana komponen ke-i adalah elemen dari G_i, dan operasinya dengan cara bagian, didefinisikan sebagai berikut:

Jika $G_1 \oplus G_2 \ldots \oplus G_n = \{(g_1, g_2, \ldots g_n) | g_i \in G_i\}$, maka $(g_1, g_2, \ldots g_n)(g_1', g_2', \ldots g_n') = (g_1g_1', g_2g_2', \ldots, g_ng_n')$. Dengan g_1g_1' dilakukan dengan operasi pada Gi.

Di dalam kejadian H dan K adalah grup Abelian dengan operasi penjumlahan, notasi H⊕ K, disebut *direct sum* dari H dan K.

Contoh 2.6.1

U(8)⊕U(10) = {(1,1), (1,3), (1,7), (1,9), (3,1), (3,3), (3,7), (3,9), (5,1), (5,3), (5,7), (5,9), (7,1), (7,3), (7,7), (7,9)}

Hasil (3,7)(7,9) = (5,3), karena dua komponen pertama digabungkan dengan perkalian modulo 8, sementara dua komponen kedua digabungkan dengan perkalian modulo 10.

Contoh 2.6.2

$Z_2 \oplus Z_3$ = {(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)}

Ini adalah grup Abelian dengan order 6. Elemen (1,1) adalah generator dari $Z_2 \oplus Z_3$. Didapatkan (1,1)=(1,1), 2(1,1)=(0,2), 3(1,1)=(1,0), 4(1,1)=(0,1), 5(1,1)= (1,2) dan 6(1,1) = (0,0). Karena perkalian dengan komponen pertama dalam modulo 2, dan perkalian dengan komponen kedua dalam modulo 3.

Theorema 2.6.1

Orde sebuah elemen pada direct product pada grup-grup berhingga adalah kelipatan persekutuan terkecil dari orde-orde komponen pada elemen. Di notasikan dengan

$|(g1, g2,\ldots,gn)| = \text{kpk}\{|g_1|, |g_2|, \ldots, |g_n|\}$

Bukti:

Untuk menyederhanakan persoalan, pertama pandang kasus khusus untuk direct product hanya pada dua faktor. Diberikan (g1, g2) adalah elemen sembarang pada $G_1 \oplus G_2$ dan s = kpk { $|g_1|$,$|g_2|$}, dan t = $|(g_1, g_2|$ dengan jelas maka $(g_1, g_2)^s$ = $(g1^s, g2^s)$ = (e,e).

Juga sebagai akibat teorema 2.4.1,t harus membagi habis s. Khususnya, $t \leq s$ tetapi $(g1^t, g2^t) = (g1, g2)^t$ = (e,e) ,dan selanjutnya, untuk alasan yang sama, bahwa $|g_1|$ dan $|g_2|$ pasti membagi t. Jadi , t kelipatan persekutuan dari $|g_1|$ dan $|g_2|$,oleh karena itu , $s \leq t$,karena s adalah kelipatan persekutuan terkecil dari $|g_1|$ dan $|g_2|$. Mengambil informasi ini dari s dan t bersama-sama, diperoleh s= t.

(Terbukti)