BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Matriks

2.1.1 Pengertian Matriks

Definisi 2.1.

Matriks adalah sistem angka atau bilangan yang disusun dalam bentuk empat persegi panjang yang ukurannya dinyatakan dalam banyaknya baris atau kolom.Suatu matriks dinotasikan dengan $A_{(mxn)}=(a_{ij})$, i= 1,2,...m dan j= 1,2,...n, m dan n masing-masing menyatakan jumlah baris dan kolom matriks sedangkan (mxn) adalah ordo (ukuran) matriks.

$$A_{(mxn)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Angka atau bilangan dalam matriks disebut sebagai elemen matriks.

Contoh 2.1.

$$A_{2x3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

elemen matriks $A_{(2x3)}$ adalah :

$a_{11}= 3$ $\quad$ $a_{12}= 1$ $\quad$ $a_{13}= 4$

$a_{21}= 2$ $\quad$ $a_{22}= 1$ $\quad$ $a_{23}= 1$

Terdapat beberapa jenis matriks khusus antara lain matriks persegi (bujursangkar), matriks diagonal, matriks Identitas, matriks segitiga atas, matriks segitiga bawah dan lain sebagainya. Namun demikian, disini hanya dibahas tiga matriks khusus saja, yaitu matriks bujursangkar dan matriks diagonal dan matriks Identitas.

2.1.2. Beberapa jenis matriks khusus

a. Matriks Persegi (Bujursangkar) : yaitu matriks yang ukuran baris dan kolomnya sama. Barisan elemen a_{11}, a_{22},... a_{nn} disebut diagonal utama dari matriks bujursangkar A.

Contoh 2.2.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ adalah matriks bujursangkar berukuran 2

$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks bujursangkar berukuran 3

b. Matriks Diagonal : adalah matriks bujursangkar yang semua elemen diluar diagonal utamanya ialah nol dan paling sedikit terdapat sebuah elemen tak nol pada diagonal utama.

Contoh 2.3.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. Matriks Identitas : yaitu matriks diagonal dimana semua elemen diagonal utamanya adalah = 1.

Contoh 2.4.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.3. Transformasi (Operasi) Elementer pada Baris dan Kolom Suatu Matriks

Suatu matriks dapat diubah menjadi matriks lain melalui serangkaian operasi terhadap baris atau kolom matriks. Operasi ini disebut sebagai transformasi (operasi) elementer pada baris atau kolom matriks, dan meliputi :

(a) Penukaran baris ke-i dengan baris ke-j, ditulis $R_{ij}(A)$.

Penukaran kolom ke-i dengan kolom ke-j, ditulis $C_{ij}(A)$.

Contoh 2.5.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{12}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C_{23}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Mengalikan semua elemen baris ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis $R_i^{(\lambda)}(A)$.

Mengalikan semua elemen kolom ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis $C_i^{(\lambda)}(A)$.

Contoh 2.6.

Dari contoh 2.5,

$$R_2^{(-2)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C_3^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Menambah baris ke-i dengan λ kali baris ke-j, ditulis $R_{ij}^{(\lambda)}(A)$.

Menambah kolom ke-i dengan λ kali kolom ke-j, ditulis $C_{ij}^{(\lambda)}(A)$.

Contoh 2.7.

Dari contoh 2.5,

$$R_{31}^{(1)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C_{23}^{(-2)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Apabila transformasi elementer baris atau kolom dilakukan terhadap matriks Identitas, maka hasil transformasi elementer itu disebut matriks elementer.

Contoh 2.8.

Matriks-matriks elementer dari I_3 , misalnya :

$$C_{12}(I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C_{31}^{(k)}(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.4. Rank Matriks

Definisi 2.2.

Rank baris matriks A adalah *dimensi dari ruang baris matriks A*, dan rank kolom matriks A adalah *dimensi dari ruang kolom matriks A*, dimana dimensi menyatakan banyaknya vektor-vektor baris/kolom yang bebas linear. Apabila rank baris matriks A sama dengan rank kolom matriks A, maka rank matriks A adalah harga rank baris yang sama dengan rank kolom dari A.

Untuk mencari rank dari suatu matriks digunakan transformasi elementer dengan mengubah sebanyak mungkin baris/ kolom menjadi vektor nol. Nilai rank matriks A dinotasikan dengan r (A).

Definisi 2.3.

Himpunan vektor $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ dikatakan bebas linear jika persamaan vektor,

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_mx_m = 0 \tag{2.2}$$

hanya dipenuhi oleh $k_1, k_2, \ldots, k_m = 0$ dan dikatakan tidak bebas linear jika terdapat konstanta k_I, $i=1,2,\ldots,m$ yang tidak semua nol yang memenuhi (2.2)

Contoh 2.9.

Misalkan terdapat vektor $x_1=[2,3,1]$, $x_2=[2,1,2]$, $x_3=[4,4,3]$. Jika diambil X=[0,0,0] maka :

$$k_1[2,3,1] + k_2[2,1,2] + k_3[4,4,3] = [0, 0, 0]$$

penyelesaian yang diperoleh adalah $-k_3=k_2=k_1$. Sehingga x_1, x_2, dan x_3 tidak bebas linear.

Contoh 2.10.

Apabila matriks A disusun oleh vektor-vektor x_1, x_2, dan x_3 maka,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \text{ adalah:}$$

Rank matriks A dapat dicari sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_{21}^{(-2)} \\ \sim \\ R_{31}^{(-3)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_{32}^{(-1)} \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris ke-3 dari hasil transformasi elementer baris pada matriks A adalah vektor nol, jadi r (A) = 2.

2.1.6. Bentuk Normal Suatu Matriks

Bentuk Normal dari matriks merupakan matriks dengan bentuk salah satu dari matriks berikut ini :

$$I_r, \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}$$

yang diperoleh dengan transformasi elementer baris/kolom pada suatu matriks dengan r > 0.

Contoh 2.11.

Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ dapat diubah menjadi bentuk normal :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{R_{31}^{(-3)}}{\overset{R_{21}^{(-2)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 7 \\ 0 & -6 & -5 & 7 \end{bmatrix} \overset{R_{32}^{(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_{2}^{(-1/6)}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_{12}^{(-2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 & -13/3 \\ 0 & 1 & 5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{C_{41}^{(13/3)}}{\overset{C_{21}^{(-4/3)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{C_{42}^{(-7/6)}}{\overset{C_{32}^{(-5/6)}}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2. Program Linear

2.2.1. Pengertian Umum

Program Linear merupakan teknik untuk menentukan keputusan dari suatu perencanaan yang bersifat analitis yang menggunakan model matematika dengan tujuan menemukan suatu kombinasi alternatif untuk memecahkan masalah. Dari beberapa alternatif pemecah masalah yang ada, dipilih variasi terbaik yang mampu mendukung penyelesaian suatu strategi guna mencapai tujuan yang optimal. Kondisi optimal tersebut terlihat dari fungsi tujuan yang mencakup kasus memaksimalkan ataupun meminimalkan yang memenuhi persyaratan yang dinyatakan sebagai kendala/pembatas dalam bentuk persamaan dan pertidaksamaan. Perlu ditekankan bahwa semua fungsi yang digunakan dalam Program Linear berupa fungsi-fungsi linear.

Bentuk umum suatu Program Linear ditulis sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(Maksimum / Minimum)} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k \\ \text{Pembatas} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k \leq b_2 \\ & \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k \leq b_m \end{array}\right\} \quad (2.3)$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots\ldots k$$

Untuk Program Linear yang memiliki kendala dengan pembatas tanda "≥" dan "=" akan dibahas tersendiri.

2.2.2. Metode Simpleks

Untuk menyelesaikan Program Linear, digunakan metode Simpleks, yang merupakan prosedur aljabar yang bersifat iteratif, yang bergerak selangkah demi selangkah dimulai dari titik ekstrim pada daerah fisibel menuju titik ekstrim yang optimum.

Langkah pertama yang dilakukan adalah mengubah fungsi tujuan dan pembatas bentuk pertidaksamaan ke dalam bentuk persamaan yang ekuivalen. Untuk pembatas dalam bentuk pertidaksamaan "≤", ruas kiri ditambah dengan variabel slack. Dengan adanya penambahan variabel slack ini, akan diperoleh suatu bentuk standar dari Program Linear, yaitu :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(Maksimum / Minimum)} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k + \ldots + c_nx_n \\ \text{Pembatas} & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mk}x_k + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots\ldots n. \\ & c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n = 0 \end{array}\right\} \quad (2.4)$$

Dalam hal ini $n = k+m$

(2.4) memiliki m persamaan dan n variabel sehingga dalam pemecahan awal, variabel non basis harus mencakup (n-m) variabel yang bernilai nol.

Langkah kedua adalah membentuk tabel simpleks yang merupakan pemecahan awal Program Linear dan melakukan operasi dalam tabel.

Tabel 2.1. Tabel Simpleks

BV	x_1		x_k	x_{k+1}		x_n	Solusi
Z	$-c_1$	...	$-c_k$	$-c_{k+1}$	...	$-c_n$	0
$(x_B)_i$	A				I		$\hat{b}_i$

Operasi dalam Tabel Simpleks :

1) Menentukan variabel masuk yaitu variabel non basis dengan koefisien paling negatif pada baris Z untuk kasus maksimum dan koefisien paling positif untuk kasus minimum. Andaikan variabel non basis yang menjadi variabel masuk tersebut adalah x_k maka α^k yaitu kolom ke-k dari matriks (A,I) disebut kolom pivot.

2) Menentukan variabel keluar , yaitu :

- Menghitung $\gamma_i = \dfrac{\hat{b}_i}{\alpha_i^k}$, $\alpha_i^k \geq 0$, $i = 1,2,...m$.

- Menentukan $\beta = \min\limits_i \gamma_i$.

Misal $\beta = \gamma_r = \dfrac{\hat{b}_r}{\alpha_r^k}$, $i = 1,2,...m$, maka baris ke-r disebut baris pivot dan α_r^k, yaitu elemen ke-r dari kolom α^k disebut elemen pivot.

- Variabel basis yang berada pada baris ke-r yaitu $(x_B)_r$ dikeluarkan menjadi variabel non basis dan bernilai nol.

3) Menyusun tabel baru sebagai berikut :

- $(x_B)_r$ keluar dan diganti x_k.

- Operasi pada baris pivot,yaitu:

$$\text{baris r baru} = \frac{\text{baris r lama}}{\alpha_r^k}$$

- Untuk i ≠ r, maka :

- Baris i baru =baris i lama - α_i^k dikalikan dengan baris i baru, i=1,2,…m.

4) Uji Optimalitas

Jika pada baris Z sudah tidak ada lagi koefisien yang berharga negatif untuk kasus maksimum dan positif untuk kasus minimum, maka pemecahan optimal untuk fungsi tujuan Z telah tercapai.

Contoh 2.12.

Seorang produsen memiliki 3 jenis mesin dimana jam kerja maksimum setiap hari untuk mesin-mesin tersebut adalah mesin ke-1 selama 4 jam, mesin ke-2 selama 12 jam dan mesin ke-3 selama 18 jam. Dengan mesin-mesin tersebut, produsen bermaksud untuk membuat dua macam produk, yaitu produk A dan produk B. Untuk membuat satu unit produk A, mula-mula dikerjakan di mesin ke-1 selama 1 jam, kemudian tanpa melalui mesin ke-2 langsung ke mesin ke-3 dengan proses pengerjaan selama 3 jam. Sedangkan untuk satu unit produk B, tidak diproses di mesin ke-1, melainkan langsung ke mesin ke-2 selama 2 jam dan ke mesin ke-3 selama 2 jam. Apabila dijual di pasaran satu unit produk A berharga Rp. 30.000,00 dan produk B berharga Rp. 50.000,00. Tentukan jumlah unit produk A dan produk B yang harus diproduksi setiap hari agar keuntungan yang diperoleh maksimum ?

Model matematika untuk contoh 2.12 disusun sebagai berikut:

Persoalannya adalah menentukan alokasi penggunaan mesin ke-1, ke-2 dan ke-3 agar jumlah produk A dan B yang dihasilkan memberikan keuntungan yang maksimal. Misal produk A dinyatakan dengan x_1 dan produk B dengan x_2, sedangkan fungsi tujuan dinyatakan dalam Z. Karena jumlah produk tidak mungkin negatif, maka Program Linear untuk contoh diatas adalah :

Maksimum : $Z = 3x_1 + 5x_2$

Pembatas : $x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1\ x_2 \geq 0$

Penyelesaiannya menggunakan tabel simpleks adalah :

1. Mengubah fungsi tujuan dan kendala-kendala ke dalam bentuk standar Program Linear , yaitu:

   Maksimum $Z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

   $Z - 3x_1 - 5x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 = 0$

   Pembatas $x_1 + x_3 = 4$

   $2x_2 + x_4 = 12$

   $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$

   $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

2. Melakukan operasi dalam tabel simpleks sebagai berikut :

Tabel 2.2.

Iterasi	BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solusi
0	Z	1	-3	-5	0	0	0	0
	x_3	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	1	-3	0	0	5/2	0	30
	x_3	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	0	0	1	0	1/2	0	6
	x_5	0	3	0	0	-1	1	6
2	Z	1	0	0	0	3/2	1	36
	x_3	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
	x_2	0	0	1	0	1/2	0	6
	x_5	0	1	0	0	-1/3	1/3	2

Dari tabel simpleks di atas diketahui bahwa hasil penjualan maksimum (Z) sebesar Rp.360.000,00 dengan A (x_1) yang diproduksi sebanyak 2 unit dan produk B (x_2) diproduksi sebanyak 6 unit.

2.2.3. Penyelesaian Program Linear dengan pembatas bertanda "≥" dan "=".

Program Linear yang telah dibahas dalam 2.2.1 dan 2.2.2 semua pembatasnya bertanda "≤", sehingga memberikan pemecahan awal yang layak dengan variabel basis terdiri dari variabel slack. Kondisi seperti ini tidak dipenuhi oleh semua model dalam Program Linear. Hal ini disebabkan karena adanya model yang harus dirumuskan dalam bentuk persamaan dan pertidaksamaan berjenis "≥" dan untuk mengatasinya digunakan langkah-langkah berikut :

1. Untuk pembatas jenis persamaan, maka ruas kirinya ditambah dengan variabel buatan R yang akan berperan sebagai variabel slack.
2. Untuk pembatas pertidaksamaan "≥", ruas kirinya dikurangi dengan variabel surplus kemudian ditambah dengan variabel buatan R.
3. Dalam kasus dengan tujuan memaksimumkan, diberikan koefisien –M pada R dalam fungsi tujuan sehingga proses optimalisasi yang dijalankan dari iterasi ke iterasi selanjutnya menyebabkan nilai R berharga nol pada pemecahan optimal. Dengan logika yang sama untuk kasus dengan tujuan meminimumkan diberikan koefisien +M pada R dalam fungsi tujuan. (M adalah bilangan positif besar)

Contoh 2.13.

Persoalan di bawah ini mengilustrasikan adanya variabel surplus dan variabel buatan.

Minimum $Z = 3x_1 + 5x_2$

Pembatas $x_1 \leq 4$

$2x_2 = 12$

$3x_1 + 2x_2 \geq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

Apabila dikonversikan ke dalam bentuk umum Program Linear menjadi :

Minimum $Z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 - 0x_4 + MR_2 + MR_3$

Pembatas $x_1 + x_3 = 4$

$2x_2 + R_2 = 12$

$3x_1 + 2x_2 - x_4 + R_3 = 18$

$x_1, x_2, x_3, x_4, R_2, R_3 \geq 0$

R_2 dan R_3 dalam fungsi tujuan dihilangkan dengan subtitusi :

$R_2 = 12 - 2x_2$

$R_3 = 18 - 3x_1 - 2x_2 + x_4$

Sehingga persamaan fungsi tujuan menjadi :

$Z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 - 0x_4 + M(12 - 2x_2) + M(18 - 3x_1 - 2x_2 + x_4)$

$= 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 - 0x_4 + 12M - 2Mx_2 + 18M - 3Mx_1 - 2Mx_2 + Mx_4$

$= (3-3M)x_1 + (5-4M)x_2 + 0x_3 + Mx_4 + 30M$

$Z - (3-3M)x_1 - (5-4M)x_2 - 0x_3 - Mx_4 = 30M$

Tabel 2.3.

Iterasi	BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	R_2	R_3	Solusi
0	Z	1	(3M-3)	(4M-5)	0	-M	0	0	30M
	X_3	0	1	0	1	0	0	0	4
	R_2	0	0	2	0	0	1	0	12
	R_3	0	3	2	0	-1	0	1	18
1	Z	1	(3-3M)	0	0	-M	(-2M+5/2)	0	6M+30
	x_3	0	1	0	1	0	0	0	4
	x_2	0	0	1	0	0	1/2	0	6
	R_3	0	3	0	0	-1	-1	1	6
2	Z	1	0	0	0	-1	(-M+3/2)	(-M+1)	36
	x_3	0	0	0	1	1/3	1/3	-1/3	2
	x_2	0	0	1	0	0	1/2	0	6
	R_3	0	1	0	0	-1/3	-1/3	1/3	2

2.2.4 Kejadian Khusus dalam Tabel Simpleks

Dalam penyelesaian Program Linear menggunakan Metode Simpleks, kadang dijumpai kejadian khusus yang terjadi selama iterasi yang dilakukan. Kejadian-kejadian khusus ini antara lain adalah :

1. Degenerasi (Kemerosotan)

   Kasus ini terjadi apabila salah satu atau lebih variabel basis berharga nol (b=0), sehingga iterasi yang dilakukan selanjutnya dapat menjadi loop yang akan kembali pada bentuk sebelumnya. Kejadian ini mempunyai pengaruh dengan peristiwa yang disebut sebagai *cycling* atau *circling*, artinya tidak terjadi perbaikan nilai solusi meskipun iterasi tetap dilakukan.

   Contoh 2.14.

   Analog dengan contoh (2.12), hanya kendala pertama dan kedua dihilangkan kemudian digantikan dengan kendala $x_2 \leq 9$. Sehingga Program Linear contoh 2.12 menjadi :

   Maksimum $Z = 3x_1 + 5x_2$

   Pembatas $x_2 \leq 9$

   $3x_1 + 2x_2 \leq 18$

   $x_1, x_2 \geq 0$

   Setelah diubah ke dalam bentuk umum Program Linear maka penyelesaiannya dalam tabel simpleks adalah sebagai berikut :

Tabel 2.4.

Iterasi	BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	Solusi
0	Z	1	-3	-5	0	0	0
	x_3	0	0	1	1	0	9
	x_4	0	3	2	0	1	18

1	Z	1	-3	0	5	0	45
	x_2	0	0	1	1	0	9
	x_4	0	3	0	-2	1	0
2	Z	1	0	0	3	1	45
	x_2	0	0	1	1	0	9
	x_1	0	1	0	-2/3	1/3	0

2. Solusi Tidak Terbatas

Kasus ini terjadi apabila ruang solusi tidak terbatas sehingga nilai fungsi tujuan dapat meningkat (untuk kasus maksimum) dan menurun (untuk kasus minimum) secara tidak terbatas. Hal ini ditandai dengan harga negatif atau nol pada koefisien yang menjadi kolom kunci.

Contoh 2.14.

Contoh ini mempunyai fungsi tujuan yang sama dengan contoh (2.12), namun disini hanya memiliki kendala $x_1 \leq 4$. Sehingga persoalannya adalah :

Maksimum $\quad Z = 3x_1 + 5x_2$

Pembatas $\quad x_1 \leq 4$

$\quad x_1, x_2 \geq 0$

Bentuk standar dari persoalan diatas adalah :

Maksimum $\quad Z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3$

$\quad Z - 3x_1 - 5x_2 - 0x_3 = 0$

Pembatas $\quad x_1 + x_3 = 4$

$\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Tabel 2.5.

Iterasi	BV	Z	x_1	x_2	x_3	Solusi
0	Z	1	-3	-5	0	0
	x_3	0	1	0	1	4

3. Tidak Memiliki Solusi Fisibel

Kasus ini terjadi apabila pada iterasi optimum masih terdapat variabel artifisial pada basis variabel.

Contoh 2.16.

Maksimum $Z = 3x_1 + 5x_2$

Pembatas $x_1 \leq 1$

$2x_2 = 12$

$3x_1 + 2x_2 \geq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

Penyelesaiannya dalam tabel simpleks adalah sebagai berikut :

Tabel 2.6.

Iterasi	BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	Solusi
0	Z	1	-(3+3M)	-(5+4M)	0	M	0	0	-30M
	x_3	0	1	0	1	0	0	0	1
	R_2	0	0	2	0	0	1	0	12
	R_3	0	3	2	0	-1	0	1	18
1	Z	1	-(3+3M)	0	0	M	1/2(5+4M)	0	30-6M
	x_3	0	1	0	1	0	0	0	1
	x_2	0	0	1	0	0	1/2	0	6
	R_2	0	3	0	0	-1	-1	1	6

2	Z	1	0	0	(3+3M)	M	(5+4M)	0	33-3M
	x_1	0	1	0	1	0	0	0	1
	x_2	0	0	1	0	0	1/2	0	6
	R_2	0	0	0	-3	-1	-1	1	3

3. Solusi Optimum Berganda (Optimum Alternatif)

Kejadian ini terjadi apabila pada iterasi optimal, terdapat koefisien variabel non basis pada fungsi tujuan yang bernilai nol, yang berarti bahwa variabel tersebut dapat masuk menjadi variabel basis tanpa mengubah nilai Z. Sehingga dapat saja terjadi nilai optimal yang sama pada lebih dari satu titik solusi.

Contoh 2.17.

Contoh ini analog dengan contoh 2.12, hanya fungsi tujuan diubah menjadi sebagai berikut :

Maksimum : $Z = 3x_1 + 2x_2$

Pembatas : $x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1\ x_2 \geq 0$

Penyelesaiannya menggunakan tabel simpleks adalah :

Tabel 2.7.

Iterasi	BV	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solusi
0	Z	1	-3	-2	0	0	0	0
	x_3	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	0	0	2	0	1	0	12

	x_5	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	1	0	-2	3	0	0	12
	x_1	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	0	0	2	-3	0	1	6
2	Z	1	0	0	0	0	1	18
	x_1	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	0	0	0	3	1	-1	6
	x_2	0	0	1	-3/2	0	1/2	3
3	Z	1	0	0	0	0	1	18
	x_1	0	1	0	0	-1/3	1/3	2
	x_3	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
	x_2	0	0	0	0	1/2	0	6

2.3. Modulo Aritmatic dan Grup Abelian

Definisi 2.4.

p dan q adalah bilangan bulat dan m bilangan bulat positif , maka p kongruen ke q modulo m apabila m membagi (p-q). Ditulis sebagai,

$$p \equiv q \pmod{m} \tag{2.5}$$

Contoh 2.18.

17 kongruen ke 5 modulo 6

6 membagi 17-5 =12, maka

$17 = 5 \pmod 6$

Teorema 2.1.

Diketahui m bilangan bulat positif, maka bilangan bulat p dan q adalah kongruen modulo m jika dan hanya jika ada bilangan bulat k sedemikian sehingga

$$p = q + km \qquad (2.6)$$

Bukti :

($\Rightarrow$) Untuk bilangan bulat positif m, $p \equiv q \pmod{m}$, maka m membagi (p-q) atau dapat dinyatakan dengan $(p-q) = km$, k bilangan bulat sehingga $p = q + km$. (terbukti)

($\Leftarrow$) Misalkan k adalah bilangan bulat sedemikian sehingga $p = q + km$, m bilangan bulat positif, maka $p - q = km$. Persamaan terakhir ini mempunyai arti bahwa hasil dari pengurangan p dengan q adalah habis dibagi dengan m atau dapat dikatakan bahwa $(p-q) \equiv 0 \pmod{m}$, sehingga $p \equiv q \pmod{m}$. (terbukti)

Teorema 2.2.

m bilangan bulat positif. Jika $p \equiv q \pmod{m}$, dan $r \equiv s \pmod{m}$ maka :

$(p+r) \equiv (q+s) \pmod{m}$ dan $pr \equiv qs \pmod{m}$.

Bukti :

Diketahui :

$p \equiv q \pmod{m}$, sehingga untuk bilangan bulat k, m membagi (p-q) atau

$$p - q = km \qquad (2.7a)$$

$r \equiv s \pmod{m}$, sehingga untuk bilangan bulat l, m membagi (p-q) atau

$$r - s = lm \qquad (2.7b)$$

Dari (2.7a) dan (2.7b), maka :

$$p - q = km \Rightarrow p = q + km$$

$$\underline{r - s = lm \Rightarrow r = s + lm \quad +}$$

$$p + r = (q + km) + (s + lm)$$

$$= (q + s) + (k + l)m$$

$$p + r \equiv q + s \pmod{m} \qquad \text{(terbukti)}$$

dari (2.7a) dan (2.7b) maka :

$$p - q = km \Rightarrow p = q + km$$

$$r - s = l\,m \Rightarrow r = s + l\,m$$

$$p.\,r = (q + km).(s + l\,m)$$

$$= qs + q\,(l\,m) + s\,(km) + (k + l)\,m$$

$$= qs + (ql + ks)m + (k + l)\,m$$

$$pr \equiv q\,s \pmod{m} \qquad \text{(terbukti)}$$

Untuk memperjelas teorema di atas diilustrasikan contoh berikut ini :

Contoh 2.19.

Misalkan $10 \equiv 3 \pmod{7}$ dan $23 \equiv 2 \pmod{7}$, maka

$$(10+23) \equiv (3+2) \pmod{7}$$

dan

$$(10+23) \equiv (3+2) \pmod{7}$$

Definisi 2.5. Operasi Biner

Operasi Biner $*$ (operator, dibaca: bintang) pada himpunan A adalah pemetaan f dari A x A ke dalam A,

$$* : A \times A \rightarrow A$$

Definisi 2.6.

Operasi Biner $*$ pada himpunan A, disebut :

- Komutatif, jika untuk setiap a, b $\in$ A, $a * b = b * a$
- Assosiatif, jika untuk setiap a, b, c $\in$ A, $(a * b) * c = a * (b * c)$

Contoh 2.20.

Fungsi dari Z x Z ke dalam Z adalah operasi biner , dimana :

$$x * y = x + y - 1, \text{ untuk } x,y \in Z \times Z$$

dan memiliki sifat-sifat :

- Komutatif : $x * y = x + y - 1 = y + x - 1 = y * x$
- Assosiatif : $x * (y * z) = x * (y + z - 1)$

$$= x + (y + z - 1) - 1$$

$$= (x + y - 1) + z - 1$$

$$= (x + y - 1) * z$$

$$= (x * y) * z$$

Definisi 2.7. Grup Abelian

Misalkan G={ $g_0, g_1, \ldots g_{|\delta|-1}$} dan $\oplus$ adalah operasi biner pada G yang terdefinisi sebagai :

$$g_i \oplus g_j = g_{(i+j) \pmod{\delta}} \tag{2.8}$$

dimana i,j =0,1,..., δ -1, dan $|\delta|$ adalah order dari G, maka pasangan berurutan (G,$\oplus$) disebut sebagai grup abelian yang memenuhi sifat-sifat :

1. $0 \leq (i+j) \pmod{\delta} < \delta$
2. $((i + j) \pmod{\delta} + k) \pmod{\delta} = (i + (j + k) \pmod{\delta}) \pmod{\delta} = (i + j + k) \pmod{\delta}$
3. $(i + j) \pmod{\delta} = (j + i) \pmod{\delta}$
4. $(0 + i) \pmod{\delta} = (i + 0) \pmod{\delta}$
5. $((\delta - i) + i) \pmod{\delta} = (i + (\delta - i)) \pmod{\delta} = 0$

Selanjutnya grup abelian ini dinotasikan dengan G(δ) dimana δ = 1,2,....

Contoh 2.21.

Pasangan berurutan (G(6), $\oplus$), dimana G(6) = $\{g_0,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}$ adalah grup abelian. Hal tersebut dapat dilihat dari tabel berikut.

Tabel 2.8.

$\oplus$	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
g_0	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_0
g_2	g_2	g_3	g_4	g_5	g_0	g_1
g_3	g_3	g_4	g_5	g_0	g_1	g_2
g_4	g_4	g_5	g_0	g_1	g_2	g_3
g_5	g_5	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4

Definisi 2.8.

Dalam grup abelian G(δ), untuk $g_i \in G(\delta)$ dan m adalah bilangan bulat positif, didefinisikan :

$$mg_i = g_{(mi)\ (\mathrm{mod}\ \delta)}. \tag{2.9}$$

Misalkan terdapat grup H(g_i) dimana H(g_i) $\subseteq$ G dan H(g_i) = $\{g_j \mid g_j = mg_i$, m bilangan bulat positif$\}$ dengan operasi biner $\oplus$ terdefinisi pada (2.8), maka H(g_i) adalah subgrup dari G(δ) yang digenerasikan oleh g_i. Order dari subgrup ini disebut sebagai order dari g_i dan dinotasikan dengan $|g_i|$, dimana $|g_i| = m_i$, untuk m_i adalah integer positif terkecil sedemikian sehingga (im_i) (mod δ) = 0.

Contoh 2.22.

Disebutkan lagi dari contoh (2.20), pasangan berurutan (G(6), $\oplus$) adalah grup abelian, maka untuk $g_2 \in$ G dan m adalah bilangan bulat positif berlaku :

$$mg_2 = \begin{cases} g_0, & m = 3k, \text{ k adalah integer non negatif} \\ g_2, & m = 3k + 1 \\ g_4, & m = 3k + 2 \end{cases}$$

Sehingga subgrup dari (G(6), ⊕) yang digenerasikan oleh g_2 adalah $H(g_2) = \{g_0, g_2, g_4\}$ dimana ordernya adalah $|g_2| = 3$.

Definisi 2.9.

Apabila terdapat $g_i \in G(\delta)$ sedemikian sehingga $|g_i| = |\delta|$, maka grup abelian $G(\delta)$ disebut siklik, dan $g_i \in G(\delta)$ disebut sebagai elemen pembangun/generator.

Contoh 2.23.

Grup (G(6), ⊕) adalah siklik karena subgrup yang digenerasikan oleh g_1 dan g_5 memiliki order yang sama dengan order dari G(6) yaitu 6.

Definisi 2.10.

Misalkan

$$G(\delta_1,\delta_2) = \{(g_i,g_k) \mid i=0,1,\ldots\delta_1 -1, k=0,1,\ldots\delta_2 -1\} \quad (2.10)$$

dan

$$(g_i,g_k) \oplus (g_j,g_l) = (g_{(i+j)(\text{mod } \delta 1)}, g_{(k+l)(\text{mod } \delta 2)}), \quad (2.11)$$

maka $G(\delta_1,\delta_2)$ mendefinisikan grup order $\delta_1\delta_2$ dimana $G(\delta_1,\delta_2)$ disebut sebagai *direct sum grup* dari $G(\delta_1)$ dan $G(\delta_2)$.

Dengan cara yang sama *direct sum grup* $G(\delta_1,\delta_2,\ldots\delta_m)$ dapat dikonstruksi dimana elemennya dinotasikan $g_{i_1},\ldots g_{i_m}$, $0 \le i_l < \delta_l$, $l = 1,\ldots m$,dan ordernya dinyatakan sebagai $\prod_{l=1}^{m} \delta_l$,

Contoh 2.24.

Pada grup G(2,3), elemen-elemennya disusun sebagai pasangan berurutan berikut :

$g_{0,0} = (g_0, g_0)$ $g_{0,1} = (g_0, g_1)$ $g_{0,2} = (g_0, g_2)$

$g_{1,0} = (g_1, g_0)$ $g_{1,1} = (g_1, g_1)$ $g_{1,2} = (g_1, g_2)$

Kemudian,

$$g_{i,k} \oplus g_{j,l} = g_{(i+j)\ (\text{mod } 2),\ (k+l)\ (\text{mod } 3)}$$

dan disajikan dalam tabel berikut :

Tabel 2.9.

$\oplus$	$g_{0,0}$	$g_{1,0}$	$g_{0,1}$	$g_{1,1}$	$g_{0,2}$	$g_{1,2}$
$g_{0,0}$	$g_{0,0}$	$g_{1,0}$	$g_{0,1}$	$g_{1,1}$	$g_{0,2}$	$g_{1,2}$
$g_{1,0}$	$g_{1,0}$	$g_{0,0}$	$g_{1,1}$	$g_{0,1}$	$g_{1,2}$	$g_{0,2}$
$g_{0,1}$	$g_{0,1}$	$g_{1,1}$	$g_{0,2}$	$g_{1,2}$	$g_{0,0}$	$g_{1,0}$
$g_{1,1}$	$g_{1,1}$	$g_{0,1}$	$g_{1,2}$	$g_{0,2}$	$g_{1,0}$	$g_{0,0}$
$g_{0,2}$	$g_{0,2}$	$g_{1,2}$	$g_{0,0}$	$g_{1,0}$	$g_{0,1}$	$g_{1,1}$
$g_{1,2}$	$g_{1,2}$	$g_{0,2}$	$g_{1,0}$	$g_{0,0}$	$g_{1,1}$	$g_{0,1}$

Selain itu grup G(2,3) adalah siklik, untuk mengetahuinya disusun tabel berikut :

Tabel 2.10.

m	0	1	2	3	4	5	$\lvert g_{ij} \rvert$
$g_{0,0}$	$g_{0,0}$	$g_{0,0}$	$g_{0,0}$	$g_{0,0}$	$g_{0,0}$	$g_{0,0}$	1
$g_{1,0}$	$g_{0,0}$	$g_{1,0}$	$g_{0,0}$	$g_{1,0}$	$g_{0,0}$	$g_{1,0}$	2

$g_{0,1}$	$g_{0,0}$	$g_{0,1}$	$g_{0,2}$	$g_{0,0}$	$g_{0,1}$	$g_{0,2}$	3
$g_{1,1}$	$g_{0,0}$	$g_{1,1}$	$g_{0,2}$	$g_{1,0}$	$g_{0,1}$	$g_{1,2}$	6
$g_{0,2}$	$g_{0,0}$	$g_{0,2}$	$g_{0,1}$	$g_{0,0}$	$g_{0,2}$	$g_{0,1}$	3
$g_{1,2}$	$g_{0,0}$	$g_{1,2}$	$g_{0,1}$	$g_{1,0}$	$g_{0,2}$	$g_{1,1}$	6