BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Turunan Parsial

Definisi 2.1.

Misalkan z = $f(x,y)$ adalah fungsi variabel bebas x dan y, maka turunan parsial z ke x didefinisikan oleh

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

dan turunan parsial z ke y didefinisikan oleh

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Jika limitnya ada maka kedua persamaan diatas, masing-masing disebut turunan parsial pertama dari z =$f(x,y)$ ke x dan turunan parsial pertama dari z =$f(x,y)$ ke y. Notasi lain dari $\partial z/\partial x$ adalah z_x, f_x dan untuk $\partial z/\partial y$ adalah z_y, f_y.

Contoh 2.1

Jika $z = f(x,y) = xy^2 + x^2y$, dapatkan $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_x(3,4)$, dan $f_y(3,4)$.

Jawab :

Menurut definisi 2.1, turunan parsial f ke x adalah

$$f_x(x,y) = y^2 + 2xy,$$

dan turunan parsial f ke y adalah

$$f_y(x,y) = 2xy + x^2.$$

Untuk mendapatkan $f_x(3,4)$, kita hitung ketika x = 3 dan y = 4, sehingga

$$f_x(3,4) = 4^2 + 2(3)(4) = 40.$$

Dengan cara yang sama, diperoleh

$$f_y(3,4) = 2(3)(4) + 3^2 = 33.$$

Apabila turunan parsial pertama dari z dapat diturunkan lagi ke x maupun ke y, maka diperoleh turunan parsial kedua, turunan parsial ketiga, dan seterusnya yang merupakan turunan parsial tingkat tinggi. Turunan parsial kedua dari z dapat dinyatakan oleh :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx} = z_{xx} \ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy} = z_{xy} \ ,$$

sedangkan turunan parsial ketiga dari z dapat dinyatakan oleh :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = f_{xxx} = z_{xxx} \ ,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = f_{xxy} = z_{xxy} \ .$$

Untuk turunan parsial keempat dari z dapat dinyatakan oleh :

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) = f_{xxxx} = z_{xxxx},$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial y \partial x^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) = f_{xxxy} = z_{xxxy}.$$

Definisi 2.2.

Misalkan $z = f(x)$ suatu fungsi kontinu dari variabel x dengan turunannya dz/dx kontinu dan jika $x = g(r,s)$ merupakan fungsi kontinu dengan variabel bebas r dan s maka z adalah fungsi r dan s. Turunan parsial pertama z ke r adalah

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{dz}{dx}\frac{\partial x}{\partial r}$$

dan turunan parsial pertama z ke s adalah

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{dz}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}.$$

Contoh 2.2

Jika $z = f(x+ay)$ dengan a adalah konstanta sebarang, buktikan bahwa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \tag{2.1}$$

Jawab :

Misalkan $x + ay = u$, menurut definisi 2.2, turunan parsial pertama dari z adalah

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dz}{du} \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = a\frac{dz}{du},$$

dan turunan parsial kedua dari z adalah

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{d^2 z}{du^2} \text{ dan } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{d^2 z}{du^2}. \tag{2.2}$$

Dengan mengkombinasikan persamaan 2.2 untuk menghilangkan d^2z/du^2 maka diperoleh persamaan 2.1.

2.2. Persamaan Differensial Parsial

Persamaan differensial parsial adalah persamaan yang melibatkan fungsi dari dua atau lebih variabel dan turunan-turunan parsialnya. Bentuk umum persamaan differensial parsial dinyatakan oleh

$$F(\mathbf{x}, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \ldots, u_{x_i \ldots x_j}) = 0 \tag{2.3}$$

dengan $u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{x_i x_j} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}$, dan seterusnya. F adalah fungsi sebarang yang differensiabel, u adalah fungsi variabel bergantung, $\mathbf{x}$ = $(x_1,\ldots,x_n)$ adalah variabel bebas dalam domain D pada R^n, dan diasumsikan bahwa dalam persamaan 2.3. semua turunan $u = u(x_1,\ldots,x_n)$ ada.

Definisi 2.3.

Tingkat persamaan differensial parsial (2.3) adalah tingkat turunan tertinggi pada persamaan tersebut.

Contoh 2.3

a). Persamaan Korteweg-de Vries

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

adalah persamaan differensial parsial tingkat tiga.

b). Persamaan Burger's

$$u_t + u\,u_x = v\,u_{xt}$$

adalah persamaan differensial parsial tingkat dua.

Definisi 2.4.

Persamaan diffrensial parsial tingkat n dikatakan linier jika F adalah polynomial derajat pertama dalam u dan turunan-turunannya.

Bentuk umum persamaan diffrensial parsial linier tingkat dua adalah

$$a(x_1,\ldots,x_n)u + \sum_i b_i(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i,j} c_{i,j}(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \ldots = f(x_1,\ldots,x_n)$$

dimana $a(x_1, \ldots, x_n)$ adalah koefisien dari u, yang merupakan fungsi dari variabel bebas $x_1, \ldots, x_n$, b_i adalah fungsi ke-i dari variabel bebas $x_1, \ldots, x_n$, dan $c_{i,j}$ adalah fungsi ke-i,j dari variabel bebas $x_1, \ldots, x_n$. Persamaan ini dikatakan homogen jika $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$, jika tidak maka dikatakan non homogen.

Contoh 2.4

(a). Persamaan differensial parsial

$$u_{xx} + 2xu_y = \sin x$$

adalah persamaan differensial parsial linier non homogen tingkat dua. Jika sin x = 0 maka persamaannya dikatakan homogen.

(b). Kedua persamaan pada contoh 2.3 adalah persamaan tak linier.

Persamaan differensial parsial yang melibatkan variabel temporal (t) dan variabel ruang x (untuk dimensi satu) dikatakan sebagai persamaan evolusi. Apabila terdapat dua variabel bebas yang keduanya merupakan variabel ruang, katakanlah x dan y yang menggantikan x dan t maka persamaan differensial parsialnya dikatakan sebagai persamaan ekuilibrium (persamaan steady-state).

Contoh 2.5

a). Persamaan Panas $u_t - ku_{xx} = 0$, persamaan Korteweg-de Vries dan persamaan Burger's (keduanya pada contoh 2.3) adalah persamaan evolusi.

b). Persamaan differensial parsial $u_x - uu_y = f(x,y)$, dan persamaan pada contoh 2.4 a) adalah persamaan steady-state.

2.2.1. Persamaan Differensial Parsial Linier Tingkat Satu

Persamaan differensial parsial dapat diturunkan dengan eliminasi fungsi variabel sebarang. Misalkan u = u(x,y,z) dan v = v(x,y,z) adalah fungsi-fungsi sebarang dari variabel x,y,z dan

$$\varphi\,(u,v) = 0 \tag{2.4}$$

adalah suatu fungsi sebarang dari variabel-variabel u dan v yang kontinu differensiabel. Apabila z sebagai variabel bergantung maka turunan parsial z ke x dan y adalah

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0 \tag{2.5}$$

dan

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0\,. \tag{2.6}$$

Eliminasi $\partial\varphi/\partial u$ dan $\partial\varphi/\partial u$ dari persamaan 2.5 dan 2.6, diperoleh

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0.$$

Untuk $P=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}$, $Q=\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}$, dan $R=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$,

dapat diambil bentuk

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R$$

atau dapat ditulis menjadi

$$Pp + Qq = R \tag{2.7}$$

yang merupakan persamaan differensial parsial Lagrange, dengan $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$ dan P,Q, R adalah fungsi-fungsi dari x,y,z.

Lagrange menurunkan masalah untuk mendapatkan penyelesaian umum persamaan 2.7 dengan menyelesaikan sistem pembantu (disebut sistem Lagrange) persamaan differensial biasa

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{2.8}$$

dengan menunjukkan bahwa persamaan 2.4 merupakan bentuk penyelesaian umum persamaan 2.7 dengan

$$u = u(x,y,z) = a \text{ dan } v = v(x,y,z) = b \tag{2.9}$$

adalah dua penyelesaian yang paling sedikit satu dari u dan v memuat z, dengan a dan b adalah konstanta-konstanta sebarang.

Jika persamaan 2.9 adalah dua penyelesaian persamaan 2.8, dan jika α, β adalah konstanta-konstanta sebarang, maka

$$u = \alpha v + \beta \tag{2.10}$$

disebut penyelesaian lengkap.

Contoh 2.6

Carilah penyelesaian umum dari persamaan differensial parsial

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0 \tag{2.11}$$

Jawab :

Dari persamaan 2.11, dapat digunakan sistem pembantu $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{-cz}$.

Untuk $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$ diperoleh

$$ay - bx = A. \tag{2.12}$$

Jika $a \neq 0$, maka $\frac{dz}{-cz} = \frac{dx}{a}$ menghasilkan $\ln z = -\frac{c}{a}x + \ln B$ atau dapat ditulis menjadi

$$z\,e^{cx/a} = B. \tag{2.13}$$

Dari persamaan 2.12 dan 2.13 diperoleh bentuk penyelesaian umum $\varphi(ay - bx, ze^{cx/a}) = 0$, sehingga penyelesaian lengkapnya adalah $z\,e^{cx/a} = \alpha(ay - bx) + \beta$ atau dapat dinyatakan oleh

$$z = e^{-cx/a}\ \varphi(ay - bx). \tag{2.14}$$

Jika $b \neq 0$, maka $\frac{dz}{-cz} = \frac{dy}{b}$ menghasilkan $\ln z = -\frac{c}{b}y + \ln C$ dan dengan jalan yang sama diperoleh bentuk penyelesaian umum $\psi(ay - bx, ze^{cx/a}) = 0$, sehingga penyelesaian lengkapnya adalah $z\,e^{cx/b} = \alpha(ay - bx) + \beta$ atau dapat dinyatakan oleh

$$z = e^{-cy/b}\ \psi(ay - bx). \tag{2.15}$$

Jadi, penyelesaian umum persamaan 2.11 adalah persamaan 2.14 atau persamaan 2.15.

2.2.2. Persamaan Differensial Parsial Homogen Tingkat Tinggi dengan Koefisien Konstan

Misalkan persamaan differensial parsial homogen dengan koefisien-koefisien konstan :

$$A\frac{\partial z}{\partial x}+B\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{2.16}$$

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{2.17}$$

dimana A, B, C adalah konstanta-konstanta sebarang. Penyelesaian persamaan 2.16 dan 2.17 melibatkan dua operator linier $\partial/\partial x$ dan $\partial/\partial y$. Persamaan 2.16 bertingkat satu dan penyelesaian umumnya (contoh 2.6) adalah $z=\varphi(y-\frac{B}{A}x)$, dengan φ fungsi sebarang dari variabel-variabelnya yang kontinu differensiabel.

Andaikan $z = \varphi(y+mx) = \varphi(u)$, adalah penyelesaian persamaan 2.17, maka dengan mensubstitusikan

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial x}=m\frac{d\varphi}{du} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{d\varphi}{du}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{d\varphi}{du}$$

dalam persamaan 2.17 diperoleh $\frac{d^2\varphi}{du^2}\left(Am^2+Bm+C\right)=0$. Karena φ sebarang, $d^2\varphi/du^2$ tidak identik dengan nol, sehingga m_1 dan m_2 merupakan akar-akar dari $Am^2 + Bm + C = 0$. Jika $m_1 \neq m_2$, maka $z = \varphi_1(y+m_1x)$ dan $z = \varphi_2(y+m_2x)$ adalah penyelesaian persamaan 2.17 yang berlainan dan merupakan suatu penyelesaian umum.

Secara umum, jika

$$f(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})z = (\frac{\partial}{\partial x} - m_1\frac{\partial}{\partial y})(\frac{\partial}{\partial x} - m_2\frac{\partial}{\partial y}) \ \ldots \ (\frac{\partial}{\partial x} - m_n\frac{\partial}{\partial y})z = 0 \qquad (2.18)$$

dengan $m_1 \neq m_2 \neq \ \ldots \ \neq m_n$, maka

$$z = \varphi_1(y+m_1x) + \varphi_2(y+m_2x) + \ \ldots \ + \varphi_n(y+m_nx) \qquad (2.19)$$

adalah penyelesaian umum persamaan 2.18.

Contoh 2.7

Carilah penyelesaian umum dari persamaan

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)z = 0 \qquad (2.20)$$

Jawab :

Karena persamaan 2.20 dapat ditulis menjadi $\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}\right)z = 0$, maka $m_1 = -2$ dan $m_2 = 2$. Sehingga penyelesaian umum dari persamaan 2.20 adalah $z = \varphi_1(y-2x) + \varphi_2(y+2x)$.

Jika $m_1 = m_2 = \ \ldots \ = m_k \neq m_{k+1} \neq \ \ldots \ \neq m_n$, maka persamaan 2.18 menjadi

$$f(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})z = (\frac{\partial}{\partial x} - m_1\frac{\partial}{\partial y})^k(\frac{\partial}{\partial x} - m_{k+1}\frac{\partial}{\partial y}) \ \ldots \ (\frac{\partial}{\partial x} - m_n\frac{\partial}{\partial y})z = 0 \qquad (2.21)$$

Penyelesaian umum yang diketahui dengan k faktor yang sama adalah

$$\varphi_1(y+m_1x) + x\,\varphi_2(y+m_1x) + x^2\,\varphi_3(y+m_1x) + \ldots + x^{k-1}\varphi_k(y+m_1x),$$

sehingga penyelesaian umum persamaan 2.21 adalah

$$z = \varphi_1(y+m_1x) + x\varphi_2(y+m_1x) + \ldots + x^{k-1}\varphi_k(y+m_1x) + \varphi_{k+1}(y+m_{k+1}x) + \ldots + \varphi_n(y+m_nx), \quad (2.22)$$

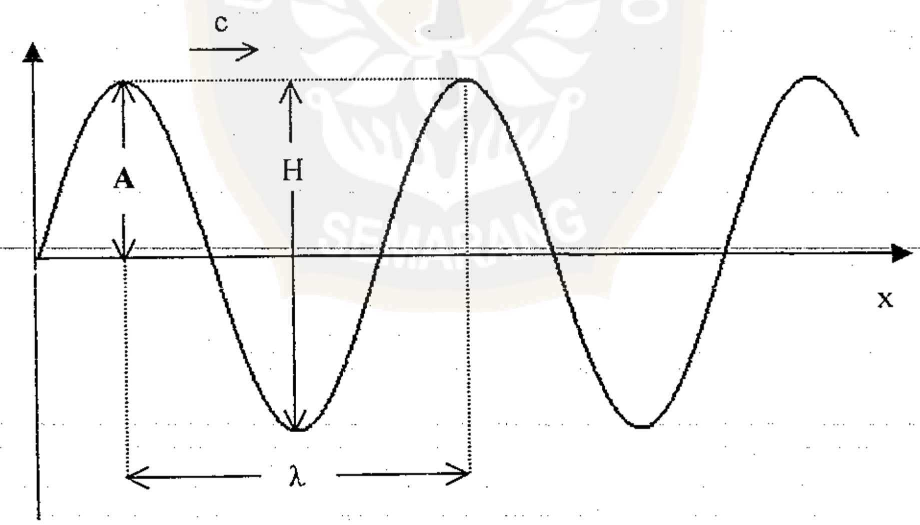
dengan φ_1, φ_2, ... φ_n fungsi-fungsi sebarang dari variabel-variabelnya yang kontinu differensiabel.

2.3. Teori Gelombang Linier

Gelombang adalah gangguan fisik yang dihasilkan pada suatu titik dalam ruang yang kemudian menghasilkan suatu efek pada tempat lain. Efek yang dimaksud adalah perambatan gangguan dengan suatu kecepatan yang bergantung pada sifat medium. Perambatan semua gangguan yang melalui suatu medium adalah contoh dari gerak gelombang. Untuk mengetahui secara lebih umum, perhatikan sifat-sifat fisik yang digambarkan oleh suatu medan tertentu. Medan ini dapat merupakan medan elektromagnetik, deformasi pada suatu pegas, tekanan pada gas, regangan pada benda padat, perpindahan transversal pada seutas tali atau bahkan pada medan gaya berat. Apabila kondisi pada suatu medan menjadi bergantung waktu (dinamis), maka pada medan tersebut terjadi usikan terhadap kondisi fisik sistem. Sifat-sifat fisik sistem pada medan menghasilkan rambatan gangguan ini melintasi ruang. Gangguan ini mengacaukan kondisi statik medan lain disekitarnya.

Menurut arah perambatan gelombang maka gelombang dapat dibedakan menjadi dua yaitu gelombang transversal dan gelombang longitudinal. Apabila arah getaran partikel tegak lurus pada arah rambatan gelombang, gelombangnya disebut gelombang transversal (melintang). Sebagai contoh, gelombang yang terjadi pada tali dan gelombang cahaya. Sedangkan apabila arah getaran partikel searah dengan arah rambatan gelombang, gelombangnya disebut gelombang longitudinal (membujur). Sebagai contoh, gelombang pada pegas dan gelombang bunyi.

Gelombang mempunyai puncak dan lembah gelombang, yang diperlihatkan pada gambar 2.1.



Gambar 2.1. Struktur gelombang dari persamaan sin (x)

Pada gambar 2.1, **A** menunjukkan ampitudo gelombang dan H menunjukkan tinggi gelombang. Jarak antara dua puncak gelombang atau dua lembah gelombang (antara dua titik berdekatan yang sama fasenya) disebut sebagai panjang gelombang, yang ditunjukkan oleh λ. Waktu yang diperlukan gelombang untuk merambat sejauh satu panjang gelombang disebut sebagai periode gelombang (T). Karena gelombang merambat dengan kecepatan c, menempuh jarak satu panjang gelombang (1λ) dalam selang waktu satu periode (1T) maka hubungan antara λ, T, dan c dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda = c \times T. \tag{2.23}$$

Dalam menentukan kapan suatu medan yang bergantung waktu tertentu merambat sebagai suatu gelombang tanpa distorsi (perubahan bentuk gelombang), medan-medan yang terkait dengan setiap proses fisik dikuasai oleh hukum dinamika. Hukum-hukum ini dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial. Salah satu persamaan differensial yang menyatakan gerak gelombang linier adalah

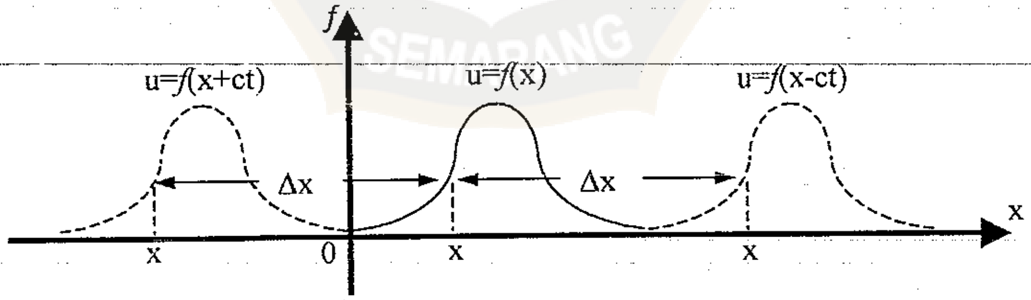
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.24}$$

dengan u sebagai fungsi elevasi permukaan gelombang dan kecepatan perambatan gelombang c. Penyelesaian umum dari persamaan 2.24 adalah

$$u(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{2.25}$$

yang merupakan superposisi dari dua gelombang yang merambat kekanan $f_1(x - ct)$ dan kekiri $f_2(x + ct)$ masing-masing dengan kecepatan c dan f_1, f_2 fungsi kontinu differensiabel.

Gerak gelombang merambat dapat diamati dari gerak pertikel dalam suatu medan. Apabila dibandingkan, gerak sebuah partikel dalam medan dengan gerak sebuah partikelnya yang lain, ternyata cara bergerak patikel kedua sama seperti gerak partikel pertama, tetapi sesudah selang waktu yang makin lama menurut makin jauhnya jarak antara partikel kedua dengan partikel pertama. Kondisi gerak yang dipindahkan dari suatu medan ke medan lain disebut kondisi dinamik yang sering diartikan sebagai momentum dan energi. Dengan kata lain, gerak gelombang merambat dipandang sebagai perpindahan energi dan momentum dari satu titik dalam medan ke titik lain tanpa perpindahan materi. Gelombang merambat yang ditunjukkan pada persamaan 2.25 dapat dijelaskan dengan transformasi koordinat x ± ct pada gambar 2.2.



Gambar 2.2. Translasi gelombang $f(x)$ terhadap perambatan waktu Δt

Pada gambar 2.2., gelombang berpindah sejauh Δx dari posisi kurva pada waktu $t = 0$ sampai suatu selang waktu Δt, dengan kecepatan c sedemikian sehingga $\Delta x = c\Delta t = ct$.

2.4. Gelombang Soliter untuk Persamaan Korteweg-de Vries (KdV)

Gelombang soliter merupakan gelombang yang pertama kali diselidiki oleh J.S. Russell pada bulan Agustus 1834. Gelombang soliter merupakan gelombang tunggal yang merambat dengan satu puncak gelombang, tanpa mengalami perubahan bentuk dan kecepatan baik sebelum maupun sesudah tumbukan. Profil dari gelombang soliter merupakan fungsi sech.

Untuk menjelaskan gelombang soliter ini, diberikan suatu persamaan KdV. Dalam bentuk normal, persamaan KdV adalah

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \ . \tag{2.26}$$

Selanjutnya, untuk menyelesaikan persamaan KdV didefinisikan transformasi koordinat bergantung,

$$u(x,t) = f(x - ct) = f(\xi) \tag{2.27}$$

dengan $\xi = x - ct$, c konstanta sebarang. Jika persamaan 2.27 didifferensialkan ke-t diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c\frac{df}{d\xi} \ , \tag{2.28}$$

dan jika didifferensialkan ke-x diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{df}{d\xi} \ . \tag{2.29}$$

Apabila persamaan 2.28 dan 2.29 disubstitusikan ke persamaan KdV (2.26) maka

$$-c\frac{df}{d\xi}-6f\frac{df}{d\xi}+\frac{d^3f}{d\xi^3}=0\,. \qquad (2.30)$$

2.18

Dengan mengintegralkan persamaan 2.30 diperoleh

$$-c\,f-3f^2+\frac{d^2f}{d\xi^2}=C_1 \qquad (2.31)$$

dimana A adalah konstanta integrasi. Kemudian jika menggunakan $df/d\xi$ sebagai faktor integral maka persamaan 2.31 dapat ditulis menjadi

$$-c\,f\frac{df}{d\xi}-3f^2\frac{df}{d\xi}+\frac{df}{d\xi}\left(\frac{d^2f}{d\xi^2}\right)=C_1\frac{df}{d\xi}\,.$$

Sehingga diperoleh

$$-\frac{1}{2}c\,f^2-f^3+\frac{1}{2}\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2=C_1\,f+C_2 \qquad (2.32)$$

dimana B adalah konstanta integrasi. Dengan syarat $f, \frac{df}{d\xi}, \frac{d^2f}{d\xi^2}, \ldots \to 0$ untuk $\xi \to \pm\infty$ (syarat batas untuk gelombang soliter) diperoleh C_1 dan C_2 keduanya nol. Sehingga persamaan 2.32 dapat dinyatakan oleh

$$-\frac{1}{2}c\,f^2-f^3+\frac{1}{2}\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2=0$$

atau

$$\frac{df}{d\xi}=\pm f\sqrt{2f+c}\,. \qquad (2.33)$$

Solusi akan diperoleh jika $\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 \geq 0$, dan $(2f+c) \geq 0$.

Apabila persamaan 2.33 ditulis menjadi

$$\frac{df}{f\sqrt{2f+c}} = \pm\, d\xi,$$

kemudian diintegralkan dengan mengambil substitusi $u = \sqrt{2f+c}$ maka diperoleh

$$\pm\xi = 2\int \frac{du}{u^2 - c} \quad (2.34)$$

Dengan menggunakan integral fungsi rasional, perhatikan bahwa

$$2\int \frac{du}{u^2-c} = 2\left\{\int \frac{A}{u+\sqrt{c}}\,du + \int \frac{B}{u-\sqrt{c}}\,du\right\}$$

dimana integrandnya dapat dinyatakan oleh

$$\frac{1}{u^2-c} = \frac{A}{u+\sqrt{c}} + \frac{B}{u-\sqrt{c}} = \frac{A(u-\sqrt{c}) + B(u+\sqrt{c})}{u^2-c},$$

sehingga $B = \frac{1}{2\sqrt{c}}$ dan $A = -\frac{1}{2\sqrt{c}}$, yang mengubah persamaan 2.34 menjadi

$$\pm\xi = 2\left\{\int \frac{(-1/2\sqrt{c})}{u+\sqrt{c}}\,du + \int \frac{1/2\sqrt{c}}{u-\sqrt{c}}\,du\right\}. \quad (2.35)$$

Dengan menyelesaikan integral dari persamaan 2.35 diperoleh

$$\pm\xi = \frac{1}{\sqrt{c}}\left\{\ln\left(u-\sqrt{c}\right)-\ln\left(u+\sqrt{c}\right)\right\}$$

atau dapat ditulis menjadi

$$\pm\left(e^{\xi}\right)=\left(\frac{u-\sqrt{c}}{u+\sqrt{c}}\right)^{1/\sqrt{c}}. \qquad (2.36)\ 2.24$$

Untuk menyelesaikan persamaan 2.36 terdapat dua kasus, sebagai berikut :

Kasus 1. Apabila diambil untuk tanda negatif

$$-\left(e^{\xi}\right)=\left(\frac{u-\sqrt{c}}{u+\sqrt{c}}\right)^{1/\sqrt{c}}$$

maka jika dipangkatkan $\sqrt{c}$ dan difaktorkan ke u dan $\sqrt{c}$ diperoleh

$$u\left(e^{\xi\sqrt{c}}+1\right)=-\sqrt{c}\left(e^{\xi\sqrt{c}}-1\right)$$

atau

$$u=-\sqrt{c}\left(\frac{e^{\xi\sqrt{c}}-1}{e^{\xi\sqrt{c}}+1}\right). \qquad (2.37)$$

Karena $u=\sqrt{2f+c}$ maka persamaan 2.37 dapat ditulis menjadi

$$\sqrt{2f+c}=-\sqrt{c}\left(\frac{e^{\xi\sqrt{c}}-1}{e^{\xi\sqrt{c}}+1}\right), \qquad (2.38)$$

sehingga diperoleh

$$f = \frac{c}{2}\left\{\left(\frac{e^{\xi\sqrt{c}}-1}{e^{\xi\sqrt{c}}+1}\right)^2 - 1\right\}$$

$$= -\frac{c}{2}\left(\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\xi\sqrt{c}}+e^{-\frac{1}{2}\xi\sqrt{c}}}\right)^2,$$

atau dapat dinyatakan oleh

$$f = -\frac{c}{2}\operatorname{sech}^2 \tfrac{1}{2}\xi\sqrt{c}\ . \tag{2.39}$$

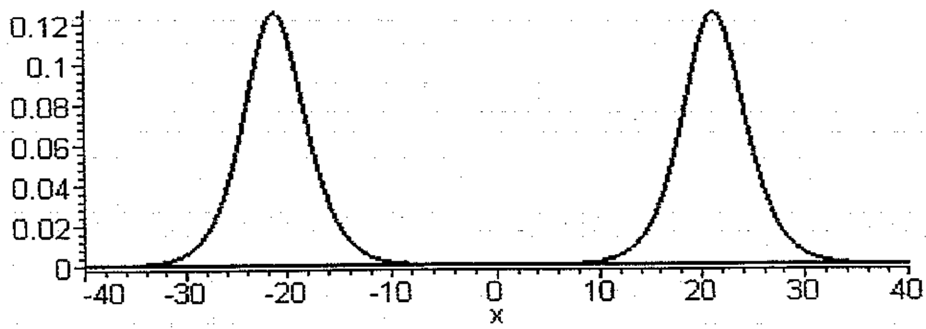
Dan karena $\xi = x - ct$, persamaan 2.39 dapat ditulis menjadi

$$f(x-ct) = -\tfrac{1}{2}c\ \operatorname{sech}^2 \tfrac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct),$$

sehingga diperoleh solusi gelombang soliter dari persamaan KdV

$$u(x,t) = -\tfrac{1}{2}c\ \operatorname{sech}^2 \tfrac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct). \tag{2.40}$$

Profil gelombang dari persamaan 2.40 untuk u positif diperlihatkan pada gambar 2.3, dengan c = ¼, dan $-40 < x < 40$.



Gambar 2.3. Profil gelombang soliter $u(x,t) = \frac{1}{2}c\ \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct)$ pada $t = -50$ dan $t = 50$, yang merambat dalam arah x

Kasus 2. Apabila diambil untuk tanda positif

$$\left(e^{\xi}\right)=\left(\frac{u-\sqrt{c}}{u+\sqrt{c}}\right)^{1/\sqrt{c}}$$

maka dengan jalan yang sama pada kasus 1 diperoleh

$$u=-\sqrt{c}\left(\frac{e^{\xi\sqrt{c}}+1}{e^{\xi\sqrt{c}}-1}\right),$$

sehingga

$$f=\frac{c}{2}\left\{\left(\frac{e^{\xi\sqrt{c}}+1}{e^{\xi\sqrt{c}}-1}\right)^2-1\right\}$$

$$=\frac{c}{2}\left(\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\xi\sqrt{c}}-e^{-\frac{1}{2}\xi\sqrt{c}}}\right)^2. \qquad (2.41)$$

Persamaan 2.41 dapat dinyatakan oleh

$$f=\frac{c}{2}\operatorname{cosech}^2\tfrac{1}{2}\xi\sqrt{c} \qquad (2.42)$$

dan karena $\xi = x - ct$, persamaan 2.42 dapat ditulis menjadi

$$f(x-ct)=\tfrac{1}{2}c\ \operatorname{cosech}^2\tfrac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct),$$

sehingga diperoleh solusi untuk u

$$u(x,t)=\tfrac{1}{2}c\ \operatorname{cosech}^2\tfrac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct) \qquad (2.43)$$

yang bukan merupakan solusi gelombang soliter.

2.5. Operator Derivatif Bilinier

Metode untuk menyelesaikan persamaan evolusi non linier yang diberikan oleh R. Hirota sekitar tahun 1971 dikenal sebagai metode hirota. Hirota menggunakan metode ini untuk mendapatkan solusi multi soliton dari persamaan Korteweg-de Vries (KdV) dan persamaan eksponensial lattice. Dalam metode hirota, didefinisikan operator bilinier yang dinyatakan oleh

$$D_t^m D_x^n(f.g) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t_1}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^n f(x,t)\, g(x_1,t_1)\Big|_{\substack{x_1 = x \\ t_1 = t}} \qquad (2.44)$$

2.3

dimana $f(x,t)$, $g(x_1,t_1)$ adalah fungsi bernilai riil, dan m, n integer non negatif. Untuk m = n = 1, persamaan 2.44 dapat ditulis menjadi

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x_1}\right) f(x,t)\, g(x_1,t_1) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t_1}\right)\left(f_x g - f g_{x_1}\right)$$

atau

$$D_t D_x(f.g) = f_{xt} g - f_t g_{x_1} - f_x g_{t_1} + f g_{x_1 t_1}. \qquad (2.45)$$

Untuk $x_1 = x$, $t_1 = t$ dan mengambil $g(x_1,t_1) = f(x,t)$, $\forall x,t$ diperoleh

$$D_t D_x(f.f) = f_{xt} f - f_t f_x - f_x f_t + f f_{xt}$$

atau

$$D_t D_x(f.f) = 2\,(f f_{xt} - f_t f_x). \qquad (2.46)$$

Pada derivatif tingkat tinggi D_x^n $(f.g)$ dengan m = 0, n = 4 untuk $x_1 = x$, $t_1 = t$ dan $g(x_1,t_1) = f(x,t)$, $\forall x,t$ berlaku

$$D_x^4 (f.f) = f_{xxxx}f - 4f_{xxx}f_x + 6f_{xx}f_{xx} - 4f_xf_{xxx} + ff_{xxxx}$$

atau dapat dinyatakan oleh

$$D_x^4 (f.f) = 2(ff_{xxxx} - 4f_xf_{xxx} + 3f_{xx}^2). \qquad (2.47)$$

Dengan mengkombinasikan persamaan 2.46 dan 2.47 diperoleh

$$D_x(D_t + D_x^3)(f.f) = 2(ff_{xt} - f_tf_x + ff_{xxxx} - 4f_xf_{xxx} + 3f_{xx}^2). \qquad (2.48)$$