BAB II

KONSEP DASAR

2.1. Variabel Random

Istilah percobaan statistika telah digunakan untuk menjelaskan setiap proses yang menghasilkan pengukuran yang berkemungkinan. Seringkali yang menarik perhatian para peneliti bukan titik sampel itu sendiri melainkan hanya gambaran numerik dari hasil. Sebagai contoh, ruang sampel yang memberi gambaran menyeluruh dari tiap hasil yang mungkin bila satu mata uang dilantunkan tiga kali dapat dituliskan sebagai :

S = {MMM, MMB, MBM, BMM, MBB, BMB, BBM, BBB}

Bila yang diperlukan hanya banyak muka yang muncul, maka hasil numerik (BBB) 0, 1, 2, atau 3 (MMM) akan dikaitkan dengan tiap titik sampel.

Bilangan 0, 1, 2, dan 3 merupakan pengamatan random yang ditentukan oleh hasil percobaan. Bilangan tersebut dapat dipandang sebagai nilai yang diperoleh suatu variabel random X, yang dalam hal ini menyatakan banyak kali 'muka' yang muncul bila suatu mata uang dilantunkan tiga kali.

Definisi 1

Satu fungsi bernilai real yang harganya ditentukan oleh tiap anggota dalam ruang sampel disebut suatu variabel random.

(Walpole & Myers, 1986)

Definisi 2

Fungsi distribusi F(x) dari variabel random X didefinisikan untuk sebarang bilangan real x,

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

Sedangkan $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, sehingga $\overline{F}(x) = P\{X > x\}$. (Ross, 1983)

Jika suatu ruang sampel mengandung titik yang berhingga banyaknya atau suatu deretan anggota yang banyaknya sama dengan banyaknya bilangan bulat, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel diskret, dan variabel random yang didefinisikan pada ruang sampel tersebut adalah variabel random diskret.

Definisi 3

Distribusi kumulatif F(x) untuk variabel random diskret adalah

$$F(x) = \sum_{y \leq x} P\{X = y\}.$$

Bila ruang sampel mengandung titik sampel yang takberhingga banyaknya dan sama banyaknya dengan banyak titik pada sepotong garis, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel kontinu dan variabel random yang didefinisikan diatasnya disebut variabel random kontinu.

Jika terdapat fungsi f(x), yang disebut fungsi densitas probabilitas, maka distribusi kumulatif dari variabel random kontinu dinyatakan dalam definisi berikut ini.

Definisi 4

Distribusi kumulatif F(x) untuk variabel random kontinu adalah

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx\,.$$

2.2. Nilai ekspektasi

Nilai ekspektasi atau rataan suatu variabel random diskret dapat diperoleh dengan mengalikan tiap nilai variabel random tersebut dengan peluang padanannya dan kemudian menjumlahkan hasilnya. Sedangkan nilai ekspektasi variabel random kontinu pada dasarnya masih tetap sama, yaitu dengan mengganti penjumlahan dengan integral. Untuk lebih jelasnya, perhatikan definisi berikut.

Definisi 5

Nilai ekspektasi atau mean dari suatu fungsi variabel random X adalah :

$$E[X] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx, & \text{untuk X kontinu} \\ \sum_{x} x\ P\{X=x\}, & \text{untuk X diskret.} \end{cases}$$

(Walpole & Myers, 1986)

Lema berikut ini menjelaskan tentang hubungan nilai ekspektasi dengan fungsi distribusinya, yang nantinya akan digunakan dalam pembahasan berikutnya.

Lema 1

Nilai ekpektasi suatu variabel random bernilai intejer X dapat didefinisikan dengan

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} P\{X \geq x\}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} P\{X > x\},$$

sedangkan secara umum, nilai ekspektasi variabel random non negatip X yang berdistribusi F dapat didefinisikan dengan

$$E[X] = \int_0^{\infty} \overline{F}(x)\ dx.$$

Bukti

Pertama akan dibuktikan bahwa $\sum_{x=1}^{\infty} P\{X \geq x\} = E[X]$ dimana

$$\sum_{x=1}^{\infty} P\{X \geq x\} = \sum_{x=0}^{\infty} P\{X > x\}.$$

Misal diambil X sampai nilai tertentu, yaitu K. Sehingga

$$\sum_{x=1}^{K} P\{X \geq x\} = \sum_{x=0}^{K} P\{X > x\}$$

$$= P\{X > 0\} + P\{X > 1\} + P\{X > 2\} + \ldots + P\{X > K\}$$

$$= 1 + 1 - P_1 + 1 - P_1 - P_2 + \ldots + 0$$

$$= K - (K-1) P_1 - (K-2) P_2 - \ldots - 0$$

$$= K - K P_1 + 1P_1 - KP_2 + 2P_2 - \ldots$$

$$= K - KP_1 - KP_2 - \ldots - KP_K + 1P_1 + 2P_2 + \ldots + KP_K$$

$$= K - K(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_K) + 1P_1 + 2P_2 + \ldots + KP_K$$

$$= K - K + \sum_{x=1}^{K} x\, P\{X = x\}$$

$$= \sum_{x=1}^{K} x\, P\{X = x\}.$$

Dari definisi 5 didapatkan bahwa $\sum_{x=1}^{K} x\, P\{X = x\} = E[X]$. Sehingga terbukti bahwa $\sum_{x=1}^{\infty} P\{X \geq x\} = \sum_{x=0}^{\infty} P\{X > x\} = E[X]$.

Dengan cara yang sama didapatkan nilai ekspektasi untuk variabel randon non negatip X sebagai berikut

$$E[X] = \int_0^{\infty} P\{X > x\}\ dx.$$

$$= \int_0^{\infty} \overline{F}(x)\ dx.$$

Definisi 6

Jika X dan Y adalah variabel random diskret, fungsi massa probabilitas bersyarat dari X, dengan diberikan Y = y, didefinisikan dengan

$$P\{X = x \mid Y = y\} = \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}},$$

Untuk semua y sedemikian hingga $P\{Y = y\} > 0$.

Ekspektasi bersyarat dari X dengan diberikan Y = y, yaitu

$$E[X \mid Y = y] = \sum_{x} x\, P\{X = x \mid Y = y\}.$$

Jika X dan Y adalah variabel random kontinu yang mempunyai fungsi densitas probabilitas gabungan f(x,y), fungsi densitas probabilitas bersyarat dari X, dengan diberikan Y = y, didefinisikan dengan

$$f(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f(y)},$$

untuk semua y sedemikian hingga $f(y) \geq 0$.

Ekspektasi bersyarat dari X, dengan syarat Y = y, didefinisikan dengan

$$E[x \mid y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x \mid y)\; dx.$$

(Ross, 1983)

Lema 2

Misal E[X | Y] menyatakan fungsi dari variabel random Y yang mempunyai nilai pada Y = y yaitu E[X | Y = y]. Sifat yang sangat berguna dari ekspektasi bersyarat ini adalah bahwa untuk semua variabel random X dan Y,

$$E[X] = E[E[X \mid Y]] \tag{1}$$

jika nilai ekspektasinya ada.

Jika Y adalah variabel random diskret, maka dari persamaan (1), didapatkan

$$E[X] = \sum_{y} E[X \mid Y = y] P\{Y = y\},$$

Dan jika Y adalah variabel random kontinu dengan densitas f(y), maka dari persamaan (1) didapatkan

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X \mid Y = y] f(y)\, dy$$

Bukti

Untuk X dan Y variabel random diskret. Akan ditunjukkan bahwa

$$E[X] = \sum_{y} E[X \mid Y = y] P\{Y = y\}.$$

Sisi kanan persamaan di atas ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\sum_y E[X \mid Y=y]P\{Y=y\} &= \sum_y\sum_x x\, P\{X=x \mid Y=y\}P\{Y=y\}\\ &= \sum_y\sum_x x\, P\{X=x, Y=y\}\\ &= \sum_x x \sum_y P\{X=x, Y=y\}\\ &= \sum_x x\, P\{X=x\}\\ &= E[X].\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa $E[X] = \sum_y E[X \mid Y=y]P\{Y=y\}$.

Untuk X dan Y variabel random kontinu. Akan ditunjukkan bahwa

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X \mid Y=y]\, f(y)\, dy.$$

Sisi kanan persamaan di atas ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} E[X \mid Y=y]\, f(y)\, dy &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\; f(x \mid y)\, f(y)\, dx\, dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\; dx\, dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\; dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\; f(x)\; dx\\ &= E[X].\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X \mid Y=y]\, f(y)\, dy$.

2.3. Fungsi konvek

Definisi 7

Fungsi h pada himpunan bilangan real dikatakan konvek jika

$$h(\alpha x_1 + (1 - \alpha)\, x_2) \;\leq\; \alpha h(x_1) + (1 - \alpha) h(x_2)$$

untuk semua x_1, x_2 dan $0 < \alpha < 1$. (Bartle & Sherbert, 1994)

Teorema berikut ini menunjukkan hubungan antara fungsi konvek h dan turunan keduanya, yaitu h", dengan asumsi bahwa h" ada.

Teorema 1

Misal I merupakan interval terbuka dan untuk ***R*** himpunan bilangan real. Jika $h : I \to \boldsymbol{R}$ mempunyai turunan kedua pada I, maka h adalah fungsi konvek pada I jika dan hanya jika $h''(x) \geq 0$ untuk semua $x \in I$.

Bukti

Pertama akan dibuktikan bahwa jika h adalah fungsi konvek pada I, maka $h''(x) \geq 0$ untuk semua $x \in I$. Telah diketahui bahwa turunan kedua dapat diberikan oleh limit berikut

$$h''(a) = \lim_{f \to 0} \frac{h(a+f) - 2h(a) + h(a-f)}{f^2} \qquad (2)$$

untuk setiap $a \in I$.

Misal diberikan f sedemikian hingga $(a - f)$ dan $(a + f)$ anggota I. Maka $a = \frac{1}{2}((a - f) + (a + f))$, dan karena h konvek pada I, didapatkan

$$h(a) = h(\tfrac{1}{2}(a - f) + \tfrac{1}{2}(a + f)) \;\leq\; \tfrac{1}{2} h(a - f) + \tfrac{1}{2} h(a + f)\,.$$

sehingga didapatkan nilai $h(a-f) - 2h(a) + h(a+f) \geq 0$. Karena $f^2 > 0$ untuk semua $f \neq 0$, maka limit pada persamaan (2) harus positip. Sehingga didapatkan $h''(a) \geq 0$ untuk $a \in I$.

Kemudian akan dibuktikan bahwa jika $h''(x) \geq 0$ untuk semua $x \in I$, maka h adalah fungsi konvek pada I, dengan menggunakan teorema Taylor.

Misal x_1, x_2 merupakan dua titik pada I, dan $0 < \alpha < 1$, dan

$x_0 = \alpha x_1 + (1 - \alpha)\, x_2$.

Dengan menerapkan teorema Taylor untuk h pada x_0, didapatkan titik c_1 antara x_0 dan x_1 sedemikian hingga

$$h(x_1) = h(x_0) + h'(x_0)\,(x_1 - x_0) + \tfrac{1}{2}\, h''(c_1)\,(x_1 - x_0)^2,$$

dan titik c_2 antara x_0 dan x_2 sedemikian hingga

$$h(x_2) = h(x_0) + h'(x_0)\,(x_2 - x_0) + \tfrac{1}{2}\, h''(c_2)\,(x_2 - x_0)^2.$$

Jika h" positip pada I, maka bentuk

$$V := \frac{\alpha}{2} h''(c_1)\,(x_1 - x_0)^2 + \frac{(1-\alpha)}{2}\, h''(c_2)\,(x_2 - x_0)^2$$

adalah positip. Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
\alpha h(x_1) + (1-\alpha) h(x_2) &= h(x_0) + h'(x_0)\,(\alpha x_1 - (1-\alpha)x_2 - x_0) \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} h''(c_1)\,(x_1 - x_0)^2 + \frac{(1-\alpha)}{2} h''(c_2)\,(x_2 - x_0)^2 \\
&= h(x_0) + V \\
&\geq h(x_0) \\
&= h(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2).
\end{aligned}$$

Sehingga dapat dilihat bahwa h adalah fungsi konvek di I.

Contoh 1

Misalkan terdapat fungsi $h(x) = x^2$. Akan dibuktikan bahwa fungsi tersebut konvek, dengan menggunakan dua cara.

Bukti

1. Berdasarkan definisi 7, yaitu

   $$\alpha h(x_1) + (1-\alpha)\, h(x_2) - h(\alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2) \geq 0 \quad \forall\ x_1, x_2, 0 < \alpha < 1.$$

   Ambil $x_1, x_2 \in R$ sebarang, dengan $0 < \alpha < 1$. Karena $h(x) = x^2$, maka

   $$\alpha x_1^2 + (1-\alpha)\, x_2^2 - (\alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2)^2$$
   $$= \alpha x_1^2 + (1-\alpha)\, x_2^2 - \alpha^2 x_1^2 - 2\alpha(1-\alpha)\, x_1 x_2 - (1-\alpha)\, x_2^2$$
   $$= \alpha(1-\alpha)\, x_1^2 + (1-\alpha)\, x_2^2 - 2\alpha(1-\alpha)\, x_1 x_2$$
   $$= \alpha(1-\alpha)\, (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2)$$
   $$= \alpha(1-\alpha)\, (x_1 - x_2)^2 - x_2)^2 > 0 \text{ untuk } x_1 \neq x_2 \text{ dan}$$

   $\alpha(1-\alpha)\,(x_1 - x_2)^2 = 0$ untuk $x_1 = x_2$. Jadi terbukti bahwa fungsi $h(x) = x^2$ adalah fungsi konvek.

2. Berdasarkan teorema 1, yaitu

   $$h''(x) \geq 0.$$

   Karena $h(x) = x^2$ maka $h''(x) = 2$. Jadi terbukti bahwa fungsi $h(x) = x^2$ adalah fungsi konvek.

2.4. Fungsi naik

Definisi 8

Jika $A \subseteq \boldsymbol{R}$, maka fungsi $h : A \to \boldsymbol{R}$ dikatakan naik di A jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 \leq x_2$, maka $h(x_1) \leq h(x_2)$. (Bartle & Sherbert, 1994)

Teorema berikut ini menyatakan hubungan antara fungsi naik dan turunan pertamanya, yaitu h', dengan asumsi h' ada.

Teorema 2

Jika $h'(x_0) > 0$ maka fungsi $h(x)$ naik di $x = x_0$.

Bukti

$$h'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x}, \quad \text{dengan } \Delta x = x_1 - x_0$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_1) - h(x_0)}{x_1 - x_0} > 0$$

Dengan kata lain $h(x_1) - h(x_0) > 0$ atau $h(x_1) > h(x_0)$. Sehingga terbukti bahwa fungsi tersebut naik di $x = x_0$.

2.5. Distribusi eksponensial

Definisi 9

Variabel random kontinu X dikatakan mempunyai distribusi eksponensial dengan parameter λ, $\lambda > 0$, jika fungsi densitas probabilitasnya diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

atau secara ekivalen, jika fungsi distribusinya diberikan oleh :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Rata-rata distribusi eksponensial, E[X] diberikan oleh

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \\
&= \int_{0}^{\infty} \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\, dx \\
&= -\int_{0}^{\infty} x\, d\, e^{-\lambda x} \\
&= -\left(x e^{-\lambda x} - \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}\, dx \right) \\
&= -\left(x e^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right)_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

(Ross, 1997)

2.6. Proses Poisson

Sebelum menjabarkan proses Poisson, terlebih dahulu akan dijelaskan tentang proses menghitung.

Proses stokhastik $\{N(t), t \geq 0)$ dikatakan sebagai proses menghitung jika N(t) menunjukkan jumlah total "peristiwa" yang telah terjadi sampai waktu t. Dari definisi ini, dapat dilihat bahwa proses menghitung N(t) harus memenuhi

(i) $N(t) \geq 0$

(ii) N(t) bernilai intejer

(iii) Jika $s < t$, maka $N(s) \leq N(t)$

(iv) Untuk $s < t$, $N(t) - N(s)$ merupakan jumlah peristiwa yang telah terjadi dalam interval (s,t).

Salah satu proses menghitung yang penting adalah proses Poisson yang didefinisikan oleh :

Definisi 10

Proses menghitung $\{N(t), t \geq 0)$ dikatakan menjadi proses Poisson yang mempunyai intensitas λ, $\lambda > 0$, jika

(i) $N(0) = 0$

(ii) Proses mempunyai penambahan yang saling bebas

(iii) Jumlah peristiwa pada suatu interval dengan panjang t berdistribusi Poisson dengan rata-rata λt, yaitu untuk semua s, $t \geq 0$

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

(Ross, 1983)

II.7. Induksi matematika

Salah satu cara pembuktian dalam matematika adalah prinsip induksi matematika.

Definisi 11

Untuk suatu pengamatan tertentu yang melibatkan sebuah bilangan asli n, jika dapat menunjukkan bahwa

1. Pernyataan itu benar untuk $n = 1$ dan
2. Pernyataan itu benar untuk $n = k + 1$, dengan mengasumsikan bahwa pernyataan itu benar untuk $n = k$, $(k \geq 1)$,

maka dapat disimpulkan bahwa pernyataan itu benar untuk semua bilangan asli $n \geq 1$. (Liu, 1995)

Langkah 1 biasa dinamakan basis induksi, sedang langkah 2 dinamakan langkah induksi. Disamping itu, asumsi bahwa pernyataan tersebut benar untuk n = k di dalam langkah 2 biasanya dinamakan hipotesis induksi.

Contoh 2

Tunjukkan bahwa

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad n \geq 1$$

melalui induksi matematika.

Bukti

1. Basis induksi

Akan ditunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk n = 1. Dengan diberikan n = 1, diperoleh

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

$$1 = 1.$$

Sehingga terbukti benar untuk n = 1.

2. Langkah induksi

Diasumsikan bahwa pernyataan tersebut benar untuk n = k. Akan ditunjukkan benar pula untuk n = k + 1.

Untuk n = k, didapatkan

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

untuk n = k + 1, didapatkan

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

Karena terbukti benar juga untuk $n = k + 1$, maka pernyataan tersebut terbukti benar untuk semua $n \geq 1$.

2.8. Teori antrian

Seperti yang telah dipaparkan dalam bab I, antrian adalah kumpulan *input* yang menunggu untuk mendapat pelayanan. Pengertian-pengertian dasar lain yang perlu dipahami adalah :

a. Rata-rata kedatangan

Adalah rata-rata banyaknya *input* yang datang dalam jangka waktu tertentu.

b. Waktu antar kedatangan

Adalah jangka waktu kedatangan *input* dengan *input* berikutnya.

c. Rata-rata pelayanan

Adalah rata-rata banyaknya *input* yang dapat dilayani dalam satuan waktu tertentu.

d. Disiplin pelayanan

Adalah kebiasaan atau kebijakan yang dipakai dalam memilih *input* yang memperoleh pelayanan terlebih dahulu.

Untuk membuat analisa terhadap model-model antrian, terlebih dahulu akan diberikan notasi Kendall yaitu (a / b / c) dimana

a menyatakan bentuk distribusi kedatangan, yaitu banyaknya kedatangan per tambahan waktu.

b menyatakan distribusi waktu pelayanan, yaitu selang waktu antara *input-input* yang dilayani.

c menyatakan jumlah saluran pelayanan paralel.

Untuk a dan b biasa digunakan notasi-notasi sebagai berikut :

M : untuk distribusi eksponensial (markovian)

E_k : untuk distribusi Erlang-k

G : untuk distribusi sebarang (umum)

D : untuk interval tetap (deterministik)

Karena pada bab berikutnya akan dibahas tentang perbandingan sistem antrian G/G/1 dengan M/G/1 dan perbandingan sistem antrian G/G/1 dengan G/M/1, maka hanya ketiga model tersebut yang akan dibahas pada bab ini.

1. Antrian model G/G/1

Sistem antrian G/G/1 berarti bahwa distribusi waktu antar kedatangan pelanggan adalah konstan atau sebarang ; distribusi waktu pelayanan juga konstan atau sebarang ; dan terdapat satu pelayan.

2. Antrian model M/G/1

Sistem antrian M/G/1 berarti bahwa distribusi waktu antar kedatangan pelanggan adalah eksponensial ; distribusi waktu pelayanan G ; dan terdapat satu pelayan. Dengan kata lain, pelanggan yang datang pada suatu tempat pelayanan mengikuti suatu bentuk proses Poisson dengan intensitas λ. Terdapat pelayan tunggal sedemikian hingga setiap kali pelayan tersebut bebas (telah selesai melayani satu pelanggan), pelanggan berikutnya segera minta untuk dilayani, sedang pelanggan yang lain menunggu dalam antrian sampai tiba waktu mereka untuk dilayani. Waktu pelayanan dari pelanggan-pelanggan yang telah selesai dilayani diasumsikan merupakan variabel random saling bebas yang mempunyai distribusi umum G dan juga diasumsikan saling bebas terhadap proses kedatangan.

Misal X menyatakan waktu antar kedatangan yang berdistribusi eksponensial dengan rata-rata $\frac{1}{\lambda}$, dan S menyatakan waktu pelayanan yang berdistribusi umum atau sebarang. Jika dimisalkan $E[S] < \frac{1}{\lambda}$, maka dari (Taha, 1997) didapatkan

$$W_Q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\lambda E[S])} \qquad (3)$$

dimana W_Q adalah rata-rata waktu seorang pelanggan menunggu dalam antrian.

3. Antrian model G/M/1

Sistem antrian G/M/1 berarti bahwa distribusi waktu antar kedatangan pelanggan adalah sebarang (umum) G ; distribusi waktu pelayanan adalah eksponensial ; dan terdapat satu pelayan. Yaitu, seorang pelanggan datang pada suatu tempat pelayanan yang mempunyai seorang pelayan dengan mengikuti bentuk proses pembaharuan sebarang yang mempunyai distribusi antar kedatangan G. Kemudian distribusi waktu pelayanan adalah eksponensial dengan intensitas μ.

Misal X menyatakan waktu antar kedatangan yang berdistribusi sebarang dan S menyatakan waktu pelayanan yang berdistribusi eksponensial dengan rata – rata $\frac{1}{\mu}$. Jika dimisalkan E[S] < E[X] maka dari (Ross, 1983) diperoleh

$$W_Q = \mu\beta(1 - \beta) \tag{4}$$

dimana

$$\beta = \int_0^\infty e^{-\mu t(1-\beta)} dG(t).$$

2.9. Konvolusi

Misalkan bahwa X dan Y adalah variabel random saling bebas yang masing-masing mempunyai distribusi F dan G. Maka distribusi X + Y (dinotasikan dengan F * G dan disebut sebagai konvolusi F dan G) adalah

$$\begin{aligned}
(F * G)(a) &= P\{X + Y \le a\} \\
&= \iint_{X+Y \le a} f(x)f(y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{a-y} f(x)f(y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{a-y} f(x)dxf(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(a-y)f(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(a-y)dG(y)
\end{aligned}$$

Untuk F * F dinotasikan sebagai F_2 dan secara umum $F * F_{n-1} = F_n$. Sehingga F_n (n kelipatan konvolusi F dengan dari dirinya sendiri) adalah distribusi dari penjumlahan n variabel random saling bebas yang masing-masing mempunyai distribusi F. (Ross,1983)

2.10. Persamaan Wald

Misal X_1, X_2,... menunjukkan barisan variabel random saling bebas, dipunyai definisi berikut.

Definisi 12

Variabel random bernilai intejer N dikatakan sebagai waktu berhenti (*stopping time*) untuk barisan X_1, X_2,...jika kejadian $\{N = n\}$ saling bebas dari $X_{n+1}, X_{n+2},\ldots$ untuk semua n = 1,2... (Ross, 1983)

Secara intuisi, hasil percobaan X_n diletakkan dalam satu baris terurut dan N menunjukkan jumlah hasil percobaan yang telah diletakkan sebelum berhenti. Jika N = n, maka percobaan harus dihentikan setelah didapatkan $X_1, \ldots, X_n$ dan sebelum didapatkan $X_{n+1}, X_{n+2},\ldots$

Contoh 3

Misal X_n, n = 1, 2,... saling bebas dan sedemikian hingga

$$P\{X_n = 0\} = P\{X_n = 1\} = \tfrac{1}{2}, \qquad n = 1, 2,\ldots$$

Jika dimisalkan

$$N = \min\{n : X_1 + \ldots + X_n = 10\},$$

maka N adalah *stopping time.* Dapat dikatakan N sebagai waktu berhenti dari suatu percobaan melempar koin secara berturut-turut jika jumlah gambar angka mencapai 10.

Teorema 3 (Persamaan Wald)

Jika X_1, X_2,...adalah variabel random berdistribusi identik dan saling bebas yang mempunyai ekspektasi berhingga, dan jika N adalah waktu berhenti untuk X_1, X_2,...sedemikian hingga $E[N] < \infty$, maka

$$E[\sum_{1}^{N} X_n] = E[N]\, E[X]$$

Bukti

Misal

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{jika } N \geq n \\ 0 & \text{jika } N < n \end{cases}$$

dipunyai bahwa

$$\sum_{n=1}^{N} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n \,.$$

Karenanya

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n I_n] \qquad (5)$$

Tetapi, $I_n = 1$ jika dan hanya jika percobaan tidak berhenti setelah $X_1, \ldots ,X_{n-1}$. Oleh karena itu I_n ditentukan oleh $X_1, \ldots ,X_{n-1}$ dan saling bebas dari X_n. Dari persamaan (5) didapatkan

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]E[I_n]$$

$$= E[X] \sum_{n=1}^{\infty} E[I_n]$$

$$= E[X] \sum_{n=1}^{\infty} P\{N \geq n\}$$

$$= E[X]\, E[N].$$

Sehingga terbukti bahwa

$$E[\sum_{1}^{N} X_n] = E[N]\, E[X].$$

Contoh 4

Pada contoh 3, persamaan Wald mengakibatkan

$$E[X_1 + \ldots + X_N] = ½\, E[N]$$

Karena dari definisi N didapatkan bahwa $X_1 + \ldots + X_N = 10$, sehingga

$$E[10] = ½\, E[N]$$

$$E[N] = 2\,.\,10$$

$$E[N] = 20$$

2.11. Proses Bercabang

Suatu populasi yang terdiri dari individu-individu dapat menghasilkan keturunan dari jenis yang sama. Misalkan setiap individu, sampai akhir hidupnya, telah memproduksi j keturunan baru dengan probabilitas P_j, $j \geq 0$, saling bebas dengan jumlah yang diproduksi oleh individu-individu yang lain. Jumlah individu awal dinotasikan dengan X_0, dinamakan ukuran generasi ke-0. Semua keturunan dari generasi ke-0 membentuk generasi pertama dan jumlah mereka dinotasikan oleh X_1. Secara umum, X_n menunjukkan ukuran dari generasi ke-n. Rantai Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ dinamakan proses bercabang (Ross, 1997).

Definisi 13

Jika

$$\mu = \sum_{j=0}^{\infty} j P_j$$

menunjukkan rata-rata jumlah keturunan dari individu tunggal, dan dimisalkan bahwa $X_0 = 1$. Maka rata-rata dari X_n dapat dihitung melalui

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i ,$$

dimana Z_i menunjukkan jumlah keturunan dari individu ke-i dari generasi ke-(n – 1). Kondisi pada X_{n-1} menghasilkan

$$\begin{aligned} E[X_n] &= E[E[X_n \mid X_{n-1}]] \\ &= \mu E[X_{n-1}] \\ &= \mu^2 E[X_{n-2}] \\ &= \mu^n . \end{aligned}$$

dimana μ adalah rata-rata jumlah keturunan per individu. (Ross, 1983)

Misalkan π_0 menunjukkan probabilitas bahwa, dimulai dari individu tunggal, suatu populasi pada akhirnya akan punah. Didapat persamaan

$$\pi_0 = \lim_{n\to\infty} P\{X_n = 0 \mid X_0 = 1\} .$$

Pertama perhatikan bahwa $\pi_0 = 1$ jika $\mu < 1$. Ini terjadi karena

$$\begin{aligned} \mu^n &= E[X_n] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} j P\{X_n = j\} \end{aligned}$$

$$\mu^n \geq \sum_{j=1}^{\infty} 1\, P\{X_n = j\}$$

$$= P\{X_n \geq 1\}$$

Karena $\mu^n \to 0$ jika $\mu < 1$, diikuti bahwa $P\{X_n \geq 1\} \to 0$ dan karenanya $P\{X_n = 0\} \to 1$.

Dapat diperlihatkan bahwa $\pi_0 = 1$ meskipun $\mu = 1$. Jika $\mu > 1$, sebalikanya $\pi_0 < 1$, dan persamaan untuk menentukan π_0 dapat diketahui melalui syarat pada jumlah keturunan dari individu awal, sebagai berikut :

$$\pi_0 = P\{\text{populasi punah}\}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} P\{\text{populasi punah} \mid X_1 = j\}\, P_j$$

Sekarang, diberikan bahwa $X_1 = j$, populasi pada akhirnya akan punah jika dan hanya jika setiap j keluarga dimulai dari anggota keluarga dari generasi pertama pada akhirnya punah. Karena setiap keluarga diasumsikan saling bebas, dan karena probabilitas bahwa suatu keluarga punah adalah π_0, maka

$$P\{\text{populasi punah} \mid X_1 = j\} = \pi_0^j,$$

Dan karenanya π_0 menetapkan

$$\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j\, P_j$$

Jika $\mu > 1$, dapat ditunjukkan bahwa π_0 adalah angka positip terkecil yang memenuhi persamaan diatas.

2.12. Proses Pembaharuan

Proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut proses pembaharuan. Dengan kata lain, proses pembaharuan adalah proses menghitung dimana waktu antar kedatangannya saling bebas dan berdistribusi sebarang.

Misal X_n merupakan waktu antara kejadian ke-$(n-1)$ dan kejadian ke-n, maka $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ merupakan barisan variabel random non negatip yang saling bebas dengan distribusi umum F. Dan misalkan

$$\mu = E[X_n] = \int_0^\infty x dF(x)$$

menunjukkan rata-rata waktu antara kejadian. Dari asumsi bahwa $X_n \geq 0$ dan $F(0) < 1$, didapatkan bahwa $0 < \mu \leq \infty$. Misalkan

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ , n \geq 1,$$

Dimana S_n merupakan waktu kejadian ke-n. Karena $N(t)$ merupakan jumlah kejadian sampai waktu t, maka akan sebanding dengan jumlah terbesar dari n dimana kejadian ke-n terjadi sebelum atau pada waktu t, sehingga

$$N(t) = \sup \{n ; S_n \leq t\}.$$

(Ross, 1983)