BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 Peluang

Dalam statistika, suatu kejadian disebut acak (random event), kalau terjadinya kejadian itu tidak dapat diketahui dengan pasti sebelumnya. Kendati demikian, satu hal yang dapat dilakukan adalah mengukur besarnya nilai probabilitas tentang kejadian tersebut. Dengan probabilitas atau peluang adalah nilai yang digunakan untuk mengukur tingkat terjadinya suatu kejadian yang acak (J.Supranto, 1989).

Jika suatu kejadian sangat tidak masuk akal untuk terjadi, dikatakan bahwa peluang timbulnya kejadian itu sangat kecil. Sebaliknya bila kejadian ini sangat besar kemungkinannya untuk timbul akibat diberikan suatu tindakan tertentu, dikatakan bahwa peluang timbulnya kejadian ini sangat besar.

Definisi 2.1.1 :

Himpunan semua hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan statistika disebut ruang sampel dan dinyatakan dengan lambang S. Sebuah partisi S adalah koleksi $A = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m\}$ dari himpunan bagian – himpunan bagian $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ dengan memenuhi sifat – sifat :

$A_i \cap A_j = \emptyset$ dan $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_m = S$

Sebarang proses yang membangkitkan data biasa diistilahkan sebagai percobaan. Dan semua proses dalam percobaan tersebut membentuk hasil – hasil yang mungkin terjadi dalam ruang sampel yang dinamakan kejadian.

Definisi 2.1.2:

Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel, dan kejadian yang membentuk ruang sampel dibedakan dalam dua kejadian yaitu kejadian sederhana dan kejadian majemuk.

Definisi 2.1.3:

Suatu kejadian yang hanya mengandung satu unsur dari ruang sampel disebut kejadian sederhana dan dinotasikan dengan ξ . Sedangkan kejadian yang dapat dinyatakan sebagai gabungan beberapa kejadian sederhana disebut suatu kejadian majemuk dan dinotasikan dengan $A = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$.

2.1.1 Peluang Suatu Kejadian

Statistikawan pada dasarnya berusaha menarik kesimpulan atau inferensi dari percobaan yang mengandung ketidakpastian. Untuk tujuan tersebut, diperlukan pemahaman teori peluang. Teori peluang menetapkan suatu himpunan bilangan yang dinamakan bobot, yang berharga dari nol sampai satu, sehingga kemungkinan terjadinya suatu kejadian dapat dihitung.

Untuk menentukan peluang suatu kejadian A , semua bobot titik sampel di dalam A dijumlahkan. Jumlah ini dinamakan ukuran A atau peluang A dan dinyatakan dengan $P(A)$.

Definisi 2.1.1.1 :

Peluang suatu kejadian A_i adalah jumlah bobot semua titik sampel di dalam A_i, dengan memenuhi sifat – sifat :

$$0 \leq P(A) \leq 1 , \qquad P(\{\ \}) = 0 , \qquad P(S) = 1$$

Dalam suatu percobaan yang terbentuk dari kejadian – kejadian tertentu, maka peluang suatu kejadian tertentu dalam percobaan tersebut adalah tergantung dari banyaknya hasil kejadian tertentu yang dimaksud dengan semua hasil yang berkemungkinan sama dalam percobaan tersebut.

Definisi 2.1.1.2 :

Bila suatu percobaan yang dapat menghasilkan N macam hasil yang berkemungkinan sama, dan bila tepat sebanyak n dari hasil yang berkaitan dengan kejadian A_i, maka peluang kejadian A_i adalah :

$$P(A_i) = \frac{n}{N}$$

2.2 Variabel Random

Setiap proses yang menghasilkan pengukuran yang berkemungkinan, diistilahkan sebagai percobaan. Sering yang menarik perhatian dari percobaan statistika tersebut adalah hanya gambaran dari hasil percobaan yang berupa numerik.

Contoh 2.2.1 :

Dilakukan percobaan melantunkan satu mata uang sebanyak tiga kali, dimana terdapat dua permukaan mata uang tersebut yaitu belakang (B) dan muka (M). Dari percobaan tersebut diperoleh semua hasil yang mungkin dan dapat dituliskan dalam ruang sampel S= { MMM, MMB, MBM, BMM, MBB, BMB, BBM, BBB }

Dari contoh 2.2.1, apabila yang diperlukan hanya banyak muka (M) yang muncul, maka hasil numerik yang mungkin adalah 0,1,2 dan 3. Bilangan 0,1,2 dan 3 merupakan pengamatan acak yang ditentukan oleh hasil percobaan.Bilangan tersebut dapat dipandang sebagai nilai dari suatu variabel random, yang dalam hal ini menyatakan banyak muka (M) yang muncul bila satu mata uang dilantunkan sebanyak tiga kali.

Definisi 2.2.1:

Variabel random X adalah suatu fungsi yang memetakan unsur – unsur dalam ruang sampel suatu percobaan ke suatu bilangan real.

Variabel random atau peubah acak dibedakan dalam diskret dan kontinu. Penggolongan peubah acak ini adalah berdasarkan jumlah titik – titik sampel dalam ruang sampelnya.

Definisi 2.2.2:

Bila suatu ruang sampel mengandung jumlah titik sampel yang berhingga, maka ruang itu disebut ruang sampel diskret. Sedangkan ruang sampel yang banyak titik sampelnya tak hingga disebut ruang sampel kontinu. Peubah acak yang didefinisikan pada ruang sampel diskret dan kontinu, masing – masing disebut peubah acak diskret dan peubah acak kontinu.

2.3 Fungsi Distribusi dan Fungsi Pembangkit Momen

Suatu peubah acak X yang dibatasi dalam ruang sampel S ={ s_1 , ... , s_n } maka kejadian bahwa X = x merupakan himpunan bagian S yang mengandung semua unsur s_i yang memenuhi syarat $X(s_i) = x$. Peluang timbulnya semua kejadian X = x sama dengan jumlah peluang timbulnya semua kejadian s_i yang memenuhi syarat $X(s_i) = x$. Kalau peluang timbulnya kejadian X = x ini dilambangkan sebagai fungsi P(x). maka P(x) = P(X = x)

Definisi 2.3.1 :

Fungsi p(x) disebut fungsi massa peluang variabel random diskret X, untuk setiap hasil x yang mungkin bila memenuhi :

1.$p(x) \geq 0$

2.$\sum_{x} p(x) = 1$

3.$P(X = x) = p(x)$

Fungsi massa peluang p(x) yang memenuhi definisi 2.3.1 tersebut akan membentuk fungsi distribusi atau distribusi kumulatif dari variabel random diskret X.

Definisi 2.3.2 :

Jika X adalah variabel random diskret, dan p(x) adalah fungsi massa peluang dari X, maka fungsi yang diberikan oleh $F(x) = P(X \leq x) = \sum^{x} p(x)$ disebut fungsi distribusi atau distribusi kumulatif dari X

Seperti halnya fungsi massa peluang yang dimiliki variabel random diskret, maka variabel random kontinu juga memiliki fungsi yang dinamakan fungsi padat peluang atau fungsi densitas.

Definisi 2.3.3:

Fungsi f(x) disebut fungsi padat peluang (fungsi densitas) variabel random kontinu X, yang didefinisikan pada himpunan bilangan real, bila:

1.$f(x) \geq 0$, untuk $x \in R$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

3.$P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Fungsi padat peluang f(x) yang memenuhi definisi 2.3.3 tersebut, akan membentuk fungsi distribusi atau distribusi kumulatif dari variabel random kontinu X.

Definisi 2.3.4:

Jika X adalah variabel random kontinu, dan f(x) adalah fungsi padat peluang (fungsi densitas) dari X, maka fungsi yang diberikan oleh :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

disebut fungsi distribusi atau distribusi kumulatif dari X.

Salah satu karakteristik dalam data hasil percobaan adalah nilai mean (rata-rata) yang dapat dihitung. Nilai mean ini adalah nilai harapan dari peubah acak.

Definisi 2.3.5:

Nilai harapan suatu peubah acak X yang dilambangkan E(X) adalah

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; p(x_i) \quad , \text{ jika X diskret dengan fungsi massa peluang p(x)}$$

$$\text{dan } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \quad , \text{ jika X kontinu dengan fungsi padat peluang f(x)}$$

Suatu fungsi lain yang nilai harapannya memiliki peranan penting dalam teori statistika adalah $g(x) = e^{tx}$ yang menghasilkan fungsi pembangkit momen (fpm).

Definisi 2.3.6 :

Terdapat fungsi $g(x) = e^{tx}$, maka nilai harapannya disebut fungsi pembangkit momen variabel random X yang dilambangkan $M_X(t)$ dan didefinisikan sebagai $M_X(t) = E(e^{tx})$

Sifat – sifat fungsi pembangkit momen :

1. $M_{ax}(t) = M_X(at)$

   Bukti : $M_{ax}(t) = E(e^{t(ax)}) = E(e^{(at)x}) = M_X(at)$

2. $M_{ax+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$

Bukti : $M_{ax+b}(t) = E(e^{t(ax+b)}) = E(e^{(at)x}\ e^{bt})$

$= e^{bt} E(e^{(at)x}) = e^{bt} M_X(at)$

3. X_i adalah peubah acak yang independen maka $M_{\sum_{i=1}^{n} x_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(t)$

Bukti : $M_{\sum_{i=1}^{n} x_i}(t) = E\left[e^{t(x_1+x_2+\ldots+x_n)}\right]$

$= E\left[e^{(tx_1+tx_2+\ldots+tx_n)}\right]$

$= M_{x_1}(t).M_{x_2}(t).\ \ldots\ .M_{x_n}(t)$

$= \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(t)$

Contoh 2.3.6.1 :

Akan dicari fungsi pembangkit momen dari suatu variabel random X berdistribusi normal dengan rataan μ dan varians σ^2 yang fungsi densitasnya didefinisikan sebagai berikut :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad , -\infty < x < \infty$$

Penyelesaian :

Karena variabel random X kontinu, maka berdasarkan definisi 2.3.3 dipenuhi bahwa : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \text{ dx } = 1$$

Selanjutnya berdasarkan definisi 2.3.6 diperoleh fungsi pembangkit momen :

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) \text{ dx}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right] \text{dx}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \text{dx}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{2\sigma^2 tx - x^2 + 2\mu x - \mu^2}{2\sigma^2}\right] \text{dx}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-(x-\mu-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}\right] \exp\left[\frac{-\mu^2+(\mu+\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}\right] \text{ dx}$$

$$= \exp\left[\frac{-\mu^2+(\mu+\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x-\mu-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}\right] \text{dx}$$

$$= \exp\left[\frac{-\mu^2+\mu^2+2\mu\sigma^2 t+\sigma^4 t^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$= \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right]$$

Jadi diperoleh fungsi pembangkit momen dari variabel random X berdistribusi normal dengan mean μ dan varians σ^2 yaitu $M_X(t) = \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right]$

Contoh 2.3.6.2

Akan dicari fpm dari suatu variabel random X yang berdistribusi Chi – Kuadrat

Penyelesaian.

Fungsi densitas distribusi Chi- square adalah berasal dari distribusi Gamma yang didefinisikan : $f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x/\beta}$, $0 < x < \infty$

Fungsi densitas distribusi Gamma tersebut membentuk fungsi densitas distribusi Chi – kuadrat yaitu pada $\alpha = r/2$ dan $\beta = 2$, sehingga didefinisikan fungsi densitas distribusi Chi – kuadrat sebagai :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r/2)\,2^{r/2}}\, x^{r/2-1}\, e^{-x/2} \;,\; 0 < x < \infty$$

dengan r adalah derajat bebas.

Karena variabel random X kontinu, maka berdasarkan definisi 2.3.3 dipenuhi bahwa $\int_0^x f(x)\,dx = 1$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{\Gamma(r/2)\,2^{r/2}}\, x^{r/2-1}\, e^{-x/2}\,dx = 1$$

Selanjutnya berdasarkan definisi 2.3.6 diperoleh fpm :

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

$$= \int_0^{\infty} e^{tx}\, f(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\Gamma(r/2)\, 2^{r/2}} x^{r/2-1} \; e^{-x/2} \; dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(r/2)\, 2^{r/2}} \; x^{r/2-1} \; e^{-x(1-2t)/2} \; dx$$

Ambil y = x(1 – 2t)/2 atau x = 2y (1 – 2t) dengan dx = 2/(1 – 2t) dy, maka diperoleh :

$$M_X(t) = \frac{2}{(1-2t)} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(r/2)\, 2^{r/2}} \left(\frac{2y}{(1-2t)}\right)^{r/2-1} \; e^{-y} \; dy$$

$$= \frac{2}{(1-2t)} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(r/2) 2^{r/2}} \left(\frac{2}{(1-2t)}\right)^{r/2} \left(\frac{1-2t}{2}\right) (y)^{r/2-1} \; e^{-y} \; dy$$

$$= \frac{2}{(1-2t) 2^{r/2}} \left(\frac{2}{(1-2t)}\right)^{r/2} \left(\frac{1-2t}{2}\right) \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(r/2)} \; y^{r/2-1} \; e^{-y} \; dy$$

$$= \left(\frac{1}{(1-2t)}\right)^{r/2} \;, t< ½$$

Jadi diperoleh fpm dari variabel random X berdistribusi Chi – kuadrat dengan derajat bebas r yaitu $M_X(t) = (1-2t)^{-r/2}$

2.4 Theorema Limit Pusat (TLP)

Theorema Limit Pusat (TLP) menyatakan kapan distribusi dari $\overline{X}$ " hampir normal " . Theorema Limit Pusat merupakan hasil yang utama dari semua bidang matematika, dan terapannya muncul dalam seluruh statistika yang bersifat teori maupun terapan.(E.J. Dudewics & S.N.Mishra, 1995)

Theorema 2.4.1 :

Jika $\{X_n\}$ adalah barisan variabel random yang independen dan berdistribusi identik dengan nilai harapan $E(x_i) = \mu$ dan varians $(x_i) = \sigma^2$ (keduanya berhingga) maka variabel random $Y_n = \dfrac{\Sigma x_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \dfrac{\overline{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

mempunyai limit untuk $n \to \infty$ berdistribusi N (0,1).

Bukti :

Dalam hal ini didefinisikan bahwa distribusi Normal dengan mean μ dan varians σ^2 mempunyai densitas :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad , -\infty < x < \infty$$

dan fungsi pembangkit momen $M_X(t) = = \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right]$

Karena X_i merupakan barisan yang independen maka untuk fungsi Y_n juga merupakan barisan yang independen (i = 1,2, . . . , n) sehingga berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen (definisi 2.3.6), maka setiap fungsi dari variabel random mempunyai fungsi pembangkit yang sama, berlaku :

$$M y_n(t) = E(\, e\text{xp}\,(t y_n))$$

$$= E\left(e^{\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)t} \right)$$

Untuk mempermudah menyelesaikan persamaan tersebut, terlebih dahulu dicari penyelesaian untuk $M_{\bar{x}}(t)$ dan $M_{(\bar{x}-\mu)}(t)$ sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
M_{\bar{x}}(t) &= M_{\frac{1}{n}\Sigma xi}(t) \\
&= \Pi\, \mathrm{M}_{x}(t/n)\, M_{\bar{x}}(t) \\
&= \Pi\, e^{\mu t/n + 1\cdot 2(\sigma^2 t^2/n^2)} \\
&= e^{\mu t + 1/2(\sigma^2 t^2/n)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{dan } M_{(\bar{x}-\mu)}(t) &= e^{-\mu t}\ \mathrm{M}_{\bar{x}}(t) \\
&= e^{-\mu t}\ e^{\mu t + 1/2(\sigma^2 t^2/n)} \\
&= e^{1/2(\sigma^2 t^2/n)}
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh :

$$
\begin{aligned}
M_{\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)}(t) &= M_{(\bar{x}-\mu)}\left(\frac{t\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= e^{1/2\sigma^2\left(t^2 n/\sigma^2/n\right)} \\
&= e^{1/2t^2}
\end{aligned}
$$

Hasil $e^{1/2t^2}$ tersebut memenuhi bentuk fungsi pembangkit momen distribusi Normal dengan $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$.

Dengan demikian terbukti $Y_n = \dfrac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Selanjutnya Theorema Limit Pusat tersebut dapat dikembangkan sedemikian sehingga dapat diperoleh pendekatan ke distribusi lain yaitu Chi – kuadrat .

Theorema 2.4.2 :

Berdasarkan theorema 2.4.1 maka $Y_n^2 = \left(\frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 = n\left(\frac{\overline{x} - \mu}{\sigma}\right)^2$ mempunyai limit untuk $n \to \infty$ berdistribusi Chi – kuadrat dengan derajat bebas 1 ($\chi^2_{(1)}$).

Bukti :

Dari fungsi padat peluang distribusi Normal dengan $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$ diperoleh :

$$f(y^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-0}{1}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right)$$

dengan $Y = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$Y^2 = \left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right)^2$$

Dan fungsi pembangkit momen distribusi Chi - kuadrat adalah

$$M_x(t) = (1 - 2t)^{-r/2}$$

Selanjutnya dari definisi 2.3.6 didapat :

$$M_{y^2}(t) = E(e^{y^2 t})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{y^2 t} f(y^2) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{y^2 t}\, e^{-1/2 y^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2 y^2 (1-2t)} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2\left(y(1-2t)^{1/2}\right)^2} dy$$

$$= \frac{(1-2t)^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2\left(y(1-2t)^{1/2}\right)^2} d(1-2t)^{1/2} y$$

$$= (1-2t)^{-1/2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2\left(y(1-2t)^{1/2}\right)^2} d(1-2t)^{1/2} y \right\}$$

$$= (1-2t)^{-1/2}$$

Hasil akhir yang diperoleh tersebut memenuhi bentuk fungsi pembangkit momen dari distribusi Chi – kuadrat dengan derajat bebas r = 1(dari contoh 2.3.6.2).

Sehingga terbukti bahwa $Y_n^2 = \left(\frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 = n\left(\frac{\overline{x} - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{(1)}$

2.5 Perilaku Asimtotik dan Pengali Lagrange

Ekspresi untuk "persekitaran di kanan " sebuah titik $x_0 \in R$ adalah $(x_0, x_0 + h]$ (h>0). Demikian pula untuk "persekitaran di kiri "titik x_0 adalah $[x_0 + h , x_0)$ (h>0). Sedangkan "persekitaran di +∞" dalam interval berbentuk [A, +∞) dan "persekitaran di -∞" berbentuk (-∞ , -A] (A >0).

Permasalahan – permasalahan tersebut dapat dianalisa menggunakan "perilaku" sebuah fungsi f dalam persekitaran di x_0. Demikian halnya misalka ζ diketahui sebagai fungsi yang terdapat dalam persekitaran +∞

dengan $f = cg$, c konstan $\neq 0$ dan $g \in \zeta$. Kondisi tersebut mengawali terbentuknya perilaku asimtotik fungsi f pada persekitaran $+\infty$.(J.Dieudonne, 1971)

Definisi 2.5.1:

Diberikan fungsi $g \in \zeta$ (atau lebih umumnya fungsi $g(x) > 0$ dalam persekitaran $+\infty$), maka jika fungsi $|f|/g$ adalah didominasi secara konstan dalam persekitaran $+\infty$ dapat dilambangkan :

$f = O(g)$ (Landau's notations)

atau $f \preccurlyeq g$ (atau $g \succcurlyeq f$) (Hardy 's notations)

Definisi 2.5.2:

Jika fungsi f/g mendekati 0 dan x mendekati ∞ maka dapat dilambangkan :

$f = o(g)$ (Landau's notations)

atau $f \ll g$ (Hardy 's notations)

Dan f dikatakan "pembanding yang dapat diabaikan" terhadap g.

Untuk notasi yang dituliskan $f = O(1)$ atau $f \preccurlyeq 1$ adalah untuk mengatakan bahwa f terbatas dalam persekitaran $+\infty$; dan untuk notasi $f = o(1)$ adalah dikatakan bahwa f mendekati 0 untuk x mendekati $+\infty$.

Berdasarkan notasi – notasi pada definisi 2.5.1 dan definisi 2.5.2 maka terdapat baberapa sifat sebagai berikut:

Untuk: $f_1 \preccurlyeq g$ dan $f_2 \preccurlyeq g$, maka $f_1 + f_2 \preccurlyeq g$ dan $c f_1 \preccurlyeq g$,

$f_1 \ll g$ dan $f_2 \ll g$, maka $f_1 + f_2 \ll g$ dan $c f_1 \ll g$,

$f_1 \preccurlyeq g_1$ dan $f_2 \preccurlyeq g_2$, maka $f_1 f_2 \preccurlyeq g_1 g_2$,

$f_1 \ll g_1$ dan $f_2 \preccurlyeq g_2$, maka $f_1 f_2 \ll g_1 g_2$, $\forall$ c konstan ,berlaku :

$$O(g) + O(g) = O(g)$$

$$o(g) + o(g) = o(g)$$

$$c\,O(g) = O(g)$$

$$c\,o(g) = o(g)$$

$$O(g_1)\,O(g_2) = O(g_1 g_2)$$

$$o(g_1)\,O(g_2) = o(g_1 g_2)$$

2.5.1 Perilaku Asimtotik dalam Deret Taylor

Perilaku asimtotik dalam deret Taylor dibentuk pada persekitaran titik $x_0 \in R$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0)(x - x_0) + \quad . \; . \; . \; + \frac{f^k(x_0)(x - x_0)}{k!} + o(x - x_0)^k$$

Contoh 2.5.1:

Misalkan f(x) = Log (1 + x) akan dideretkan Taylor dengan perilaku asimtotik pada persekitaran $x_0 = 0$.

Penyelesaian :

$$f(x) = \mathrm{Log}\,(1 + x) \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x_0) = f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} \qquad \Rightarrow \quad f'''(x_0) = f'''(0) = 2$$

.

.

.

dst,

Sehingga $f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \ldots + \frac{f^k(0)x^k}{k!} + o(x)^k$

$= 0 + x - ½ x^2 + 2/6 x^3 + \ldots + f^k(0)/k! + o(x^k)$

Bila hanya ingin links diderekan sebanyak dua kali maka :

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Selain perilaku asimtotik pada deret Taylor, pengali Lagrange juga diperlukan dalam penurunan rumusan statistik uji model semiparametrik pada bab pembahasan . Pengali Lagrange diterapkan dalam pemaksimuman fungsi dengan diberikan suatu kendala.

Definisi 2.5.3:

Misalkan dipunyai fungsi f(x) yang akan dimaksimumkan dengan kendala fungsi g(x) = 0 , maka akan dipenuhi fungsi H(x) yaitu :

$H(x) = f(x) - \lambda g(x)$

dengan λ adalah pengali Lagrange.

Bilamana ada lebih dari satu kendala yang diperlakukan pada fungsi f(x), maka digunakan pengali – pengali Lagrange tambahan (satu untuk tiap kendala).Untuk memperoleh pengali – pengali Lagrange tersebut, dapat dilakukan dengan pendiferensialan fungsi f terhadap x sama dengan nol.

Contoh 2.5.2 :

Bila dipunyai fungsi f $(p_i)= \prod_{i=1}^{n} p_i \prod_{j=1}^{m} g_\theta(y_j)$ memenuhi kendala – kendala :

1.$p_i > 0$, dengan $p_i = \frac{1}{n}$

2. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Akan dimaksimunkan fungsi $f(p_i)$ tersebut dengan memenuhi kendala yang ada.

Penyelesaian :

Dari fungsi $f(p_i)$ diperoleh fungsi Log f $(p_i) = \sum_{i=1}^{n} Log\ p_i + \sum_{j=1}^{m} \text{Log } g_\theta(y_j)$

Dengan kendala $\sum_{i=1}^{n} p_i - 1 = 0$

Sesuai definisi 2.5.3 dan dari fungsi Log f (p_i) maka dibentuk fungsi H yaitu

$$H = \sum_{i=1}^{n} Log\ p_i + \sum_{j=1}^{m} \text{Log}_\theta(y_j) + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i\right)$$

Akan dicari pengali Lagrange yaitu λ dengan mendiferensialkan fungsi H terhadap p_i sama dengan nol sebagai berikut:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p_i} - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p_i} = \lambda$$

Berdasarkan kendala yang diberikan , maka diperoleh $\lambda = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$, sehingga fungsi $f(p_i)$ akan maksimum pada $n^{-n} \prod_{j=1}^{m} g_0(y_j)$.