BAB II

DESKRIPSI TEORITIK

Untuk lebih memudahkan dalam memahami pembahasan pada bab III, berikut ini akan disajikan beberapa materi penunjang yaitu:

2.1. Peluang

Konsep mendasar dari teori peluang adalah percobaan acak yaitu percobaan yang dilakukan berulang-ulang dan hasilnya tak dapat ditebak secara pasti. Himpunan setiap hasil yang mungkin disebut ruang percobaan atau ruang sampel yang dinyatakan dengan S. Kejadian (event) merupakan himpunan bagian dari ruang sampel.

<u>Definisi 1</u>

Misalkan untuk setiap event E dari ruang sampel S, P(E) didefinisikan dengan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

Aksioma (1) $0 \leq P(E) \leq 1$

Aksioma (2) $P(S) = 1$

Aksioma (3) Untuk sebarang barisan kejadian E_1, E_2, … yang saling terpisah, sehingga $E_iE_j = \phi$ jika $i \neq j$ (dimana ϕ adalah himpunan kosong) berlaku $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

Notasi P (E) disebut peluang kejadian E.

Dalam suatu percobaan, peluang terjadinya suatu kejadian tertentu dalam percobaan tersebut tergantung pada banyaknya kejadian tertentu yang dimaksud dengan semua hasil yang berkemungkinan sama dalam percobaan tersebut.

Definisi 2

Misalkan suatu percobaan dapat menghasilkan N macam hasil yang berkemungkinan sama. Bila tepat sebanyak n dari hasil yang memenuhi syarat pada kejadian E, maka peluang kejadian E adalah:

$$P(E) = \frac{n}{N}$$

2.2. Peubah Acak

Untuk keperluan analisis statistika, sering kali yang lebih menarik bagi peneliti adalah hanya gambaran dari hasil percobaan yang disajikan secara numerik.

Contoh 1

Sebuah koin dilantunkan secara bebas sebanyak dua kali, dimana terdapat dua permukaan yaitu gambar (G) dan angka (A). Semua hasil yang mungkin diperoleh dari percobaan tersebut dapat dituliskan dalam ruang sampel S = {GG, GA, AG, AA}.

Dari Contoh 1, apabila yang diperlukan hanya banyaknya gambar (G) yang muncul, maka hasil numerik yang mungkin adalah 0, 1 dan 2. Bilangan 0, 1 dan 2 merupakan pengamatan acak yang ditentukan oleh hasil percobaan. Bilangan ini dapat dipandang sebagai nilai dari peubah acak yang menyatakan banyak gambar (G) yang muncul bila sebuah koin dilantunkan dua kali.

Definisi 3

Pandang suatu percobaan acak dengan ruang sampel S. Suatu fungsi X yang mengawankan setiap elemen $s \in S$ dengan satu dan hanya satu bilangan riil $X(s) = x$, disebut sebagai peubah acak dengan range $\mathscr{A} = \{x: x = X(s), s \in S\}$.

Peubah acak dapat dibedakan atas diskret dan kontinu, bergantung pada jumlah titik-titik sampel dalam ruang sampelnya.

Definisi 4

Jika range $\mathscr{A}$ dari peubah acak X memuat titik-titik yang banyaknya berhingga atau anggota $\mathscr{A}$ dapat dipasangkan berkorespondensi satu-satu dengan bilangan integer positif, maka X disebut peubah acak diskret.

Adapun peubah acak kontinu dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 5

Jika range $\mathscr{A}$ dari peubah acak X berupa interval atau kumpulan dari interval, maka X disebut peubah acak kontinu.

2.3. Fungsi Distribusi dan Fungsi Pembangkit Momen

Bila suatu peubah acak X dibatasi oleh daerah asal berupa ruang sampel S, maka kejadian bahwa $X = x$ merupakan himpunan bagian S yang mengandung semua unsur $s \in S$ yang memenuhi syarat $X(s) = x$. Bila peluang timbulnya kejadian $X = x$ ini dilambangkan sebagai fungsi $P(x)$, maka $P(x) = P(X = x)$.

Definisi 6

Suatu fungsi p(x) yang didefinisikan pada range $\mathscr{A}$ ke himpunan bilangan riil disebut fungsi massa peluang diskret, jika memenuhi:

(i) $p(x) > 0, \forall x \in \mathscr{A}$ dan $p(x) = 0, \forall x \notin \mathscr{A}$

(ii) $\sum_{x} p(x) = 1$

(iii) $P(X = x) = p(x)$

Fungsi massa peluang p(x) yang memenuhi definisi 6 tersebut akan membentuk fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak diskret X.

Definisi 7

Fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak diskret X yang mempunyai fungsi massa peluang $p(x) = P(X = x)$ dinyatakan sebagai:

$$F(x) = \sum_{y \le x} P(X = y)$$

Analog dengan fungsi massa peluang yang dimiliki oleh peubah acak diskret, maka peubah acak kontinu juga memiliki fungsi yang dinamakan fungsi padat peluang.

Definisi 8

Suatu fungsi f(x) yang didefinisikan pada range $\mathscr{A}$ ke himpunan bilangan riil disebut fungsi padat peluang peubah acak kontinu X bila memenuhi:

(i) $f(x) > 0, \forall x \in \mathscr{A}$ dan $f(x) = 0, \forall x \notin \mathscr{A}$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

(iii) $P(c < x < d) = \int_{c}^{d} f(x)\,dx$

Fungsi padat peluang f(x) yang memenuhi definisi 8 akan membentuk fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak kontinu X.

Definisi 9

Fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak kontinu X yang memiliki fungsi padat peluang f(x) dinyatakan sebagai:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Salah satu ukuran kecenderungan memusat dari data hasil percobaan adalah nilai rataan. Nilai rataan ini merupakan nilai harapan dari peubah acak X.

Definisi 10

Ekspektasi atau nilai harapan dari peubah acak X, dinotasikan dengan E[X] didefinisikan sebagai:

$$E[X] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx, \text{ jika X kontinu} \\ \sum_{x} x\,P\{X = x\}, \text{ jika X diskret} \end{cases} \quad \text{....(2.1)}$$

Definisi 11

Varians atau ragam dari peubah acak X didefinisikan dengan:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[(X - E(X))^2] \\ &= E[X^2] - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

Jika X_i merupakan peubah acak yang saling bebas dan tak negatif (artinya, P $\{X_i \geq 0\}$= 1 untuk semua i) maka berlaku sifat yang sangat penting dari ekspektasi yaitu:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] \qquad \ldots(2.3)$$

Nilai harapan dari fungsi $g(x) = e^{tx}$ akan membentuk fungsi pembangkit momen (f.p.m.). Fungsi ini berperan penting dalam teori statistika.

Definisi 12

Fungsi pembangkit momen (f.p.m) dari peubah acak X didefinisikan

dengan $M(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx, \text{ jika X kontinu} \\ \sum_{x} e^{tx} P\{X = x\}, \text{ jika X diskret} \end{cases}$

Seluruh momen dari X dapat diperoleh dengan mendeferensialkan M dan kemudian diambil untuk t = 0, yaitu:

$M'(t) = E[x]$

$M''(t) = E[x^2]$

$\vdots$

$M^n(t) = E[x^n]$

Apabila suatu fungsi pembangkit momen ada, hal ini secara tunggal menentukan distribusi peluangnya.

Contoh 2

Misalkan X dan Y adalah peubah acak normal yang saling bebas dengan rataan masing-masing μ_1 dan μ_2 serta ragam masing-masing σ_1^2 dan σ_2^2. F.p.m dari jumlahannya diberikan dengan;

$$M_{X+Y}(t) = E\,[\,e^{t(X+Y)}]$$
$$= E\,[e^{tX}]\,E\,[e^{tY}]$$
$$= M_X(t)\,M_Y(t)$$
$$= \exp\left[\mu_1 t + \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\right]\exp\left[\mu_2 t + \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right]$$
$$= \exp\left[(\mu_1 + \mu_2)t + (\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2})\,t^2\right]$$

Jadi f.p.m dari X +Y adalah sama dengan f.p.m. dari peubah acak normal dengan rataan $\mu_1 + \mu_2$ dan ragamnya $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Dapat dituliskan dengan $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2;\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Definisi 13

Bila $X_1, \ldots, X_n$ adalah peubah acak yang saling bebas maka fungsi pembangkit momen jumlahannya didefinisikan dengan:

$$M_{\sum_{j=1}^{n} X_j}(t) = E\,[\exp\{\sum_{j=1}^{n} t_j X_j\}]$$

Dalam teori statistika, seringkali ditemui kasus dimana suatu event terjadi dengan syarat event yang lain telah terjadi. Pada kasus ini, maka nilai peluang yang muncul adalah peluang bersyarat, fungsi distribusinya juga merupakan fungsi distribusi kumulatif bersyarat. Begitu pula nilai ekspektasinya akan merupakan ekspektasi bersyarat.

Definisi 14

Jika X dan Y adalah peubah acak diskret, ekspektasi bersyarat dari X, diberikan Y=y, didefinisikan sebagai :

$$E[X \mid Y = y] = \sum_{x} x\, P\{X = x \mid Y = y\}$$

Definisi 15

Jika X dan Y adalah peubah acak kontinu, ekspektasi bersyarat dari X, diberikan Y = y, didefinisikan dengan: $E[x \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x|y)\, dx$

Contoh 3

Misalkan X dan Y adalah peubah acak yang saling bebas dengan fungsi distribusi kumulatif masing-masing F dan G. Fungsi densitas peluangnya adalah f (x) dan g(x). Fungsi distribusi kumulatif dari X +Y dinyatakan dengan F * G dan dinamakan konvolusi dari F dan G, dituliskan sebagai berikut:

$$(F * G)(a) = P\{X + Y \leq a\}$$

$$= \iint_{x+y \leq a} f(x)\, g(y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} f(x)\, g(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} f(x)\, dx\, g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(a-y)\, g(y)\, dy$$

F*F dinyatakan dengan F_2 dan secara umum F $*F_{n-1} = F_n$. Dengan demikian, F_n sebagai n-kali konvolusi dari F dengan dirinya sendiri, merupakan distribusi dari jumlahan n peubah acak yang saling bebas yang masing-masing berdistribusi F.

2.4. Beberapa Distribusi Penting

Ada beberapa distribusi penting yang disajikan berikut ini:

1. Distribusi Poisson

Pandang fungsi f(x) yang didefinisikan dengan:

$$f(x) = \frac{m^x e^{-m}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= 0, \text{ yang lainnya}$$

dimana m > 0. Peubah acak yang mempunyai f.p.p berbentuk seperti di atas disebut mempunyai distribusi Poisson.

Parameter m dalam fungsi di atas merupakan rataan μ, maka f.p.p Poisson dapat ditulis sebagai

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= 0, \text{ yang lainnya}$$

2. Distribusi Gamma

Fungsi padat peluang dari peubah acak kontinu X yang berdistribusi Gamma dengan parameter α dan β adalah:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad 0 < x < \infty$$

$$= 0, \text{ yang lainnya}$$

dimana $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$ merupakan fungsi Gamma, serta berlaku $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$. Fungsi pembangkit momen dari distribusi Gamma adalah: $M(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}, t < 1/\beta$, sehingga $M'(t) = (-\alpha)\,(1-\beta t)^{-\alpha-1}(-\beta)$ dan $M''(t) = (-\alpha)\,(-\alpha-1)\,(1-\beta t)^{-\alpha-2}(-\beta)^2$

Oleh karena itu,

$\mu = M'(0) = \alpha\beta$ dan $\sigma^2 = M''(0) - \mu^2 = \alpha\beta^2$

<u>Catatan 1</u>

Jika $\alpha = 1$ maka $f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$, $0 < x < \infty$ disebut f.p.p eksponensial.

3. Distribusi Normal

Peubah acak kontinu X yang mempunyai fungsi padat peluang berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x-a)^2}{2b^2}\right], -\infty < x < \infty \text{ dan } b > 0$$

disebut mempunyai distribusi Normal dan sebarang f(x) demikian disebut f.p.p Normal.

Fungsi pembangkit momen dari distribusi Normal adalah:

$M(t) = \exp\,(at + b^2t^2/2)$

Selanjutnya $M'(t) = M(t)\,(a + b^2t)$ dan $M''(t) = M(t)\,b^2 + M(t)\,(a + b^2t)^2$.

Dengan demikian, $\mu = M'(0) = a$ dan $\sigma^2 = M''(0) - \mu^2 = b^2$

Sehingga fungsi padat peluang Normal dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], -\infty < x < \infty$$

dan fungsi pembangkit momennya,

$$M(t) = \exp\,(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2})$$

2.5. Teorema Limit

Bagian yang paling penting dalam teori peluang adalah teorema limit. Dua diantaranya adalah:

1. Hukum Kuat Bilangan Besar

Jika $X_1, X_2, \ldots$ merupakan peubah acak yang saling bebas dan berdistribusi identik dengan rataan μ maka

$$P\{\lim_{n\to\infty} (X_1 + \ldots + X_n)/n = \mu\} = 1$$

2. Teorema Limit Pusat

Teorema 1

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menyatakan pengamatan sampel acak dari distribusi yang mempunyai rataan μ dan ragam positif σ^2. Maka peubah acak; $Y_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma}$ mempunyai limit distribusi Normal dengan rataan 0 dan ragam 1.

Bukti:

Telah disebutkan bahwa distribusi Normal dengan rataan μ dan ragam σ^2 mempunyai f.p.p :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \; -\infty < x < \infty$$

dan fungsi pembangkit momen $M_X(t) = \exp(\mu t + ½ t^2\sigma^2)$

Karena X_i merupakan barisan peubah acak yang saling bebas maka peubah acak Y_n juga saling bebas $(i = 1, \ldots, n)$. Fungsi pembangkit momen Y_n dituliskan:

$$M_{Y_n}(t) = E\,(e^{tY_n})$$

$$= E\,(\exp\,(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}})t\,)$$

Untuk mempermudah penyelesaian persamaan tersebut, terlebih dahulu dicari penyelesaian untuk $M_{\bar{X}}(t)$ dan $M_{(\bar{X}-\mu)}(t)$:

$$M_{\bar{X}}(t) = M_{1/n\sum Xi}(t)$$

$$= \prod M_X\,(t/n)$$

$$= \prod \exp\left(\frac{\mu t}{n} + 1/2\frac{\sigma^2 t^2}{n^2}\right)$$

$$= \exp\left(\mu t + 1/2\frac{\sigma^2 t^2}{n}\right)$$

$$M_{(\bar{X}-\mu)}(t) = \exp\,(-\mu t\,)\ \exp\left(\mu t + 1/2\frac{\sigma^2 t^2}{n}\right) = \exp(1/2\frac{\sigma^2 t^2}{n})$$

Sehingga diperoleh:

$$M_{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)}(t) = M_{(\bar{X}-\mu)}(t\sqrt{n}/\sigma) = \exp\left(1/2\sigma^2\,(\frac{t^2 n}{\sigma^2 n})\right)$$

$$= \exp\,(\tfrac{1}{2} t^2)$$

Hasil exp (½ t^2) tersebut merupakan bentuk f.p.m dari distribusi Normal dengan $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$, sehingga terbukti bahwa

$$Y_n = \frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0,1)$$

2.6. Sifat Kelengkapan Bilangan Riil

Sifat kelengkapan bilangan riil yang cukup penting adalah eksistensi dari batas bawah dan batas atas dari himpunan bilangan riil.

Definisi 16 (*batas atas dan batas bawah*)

Misalkan $\phi \neq S \subseteq R$. Akan berlaku:

(i) Suatu bilangan $u \in R$ dikatakan sebagai batas atas dari S jika $s \leq u$, $\forall s \in S$

(ii) Suatu bilangan $w \in R$ dikatakan sebagai batas bawah dari S jika $w \leq s$, $\forall s \in S$

Dari nilai-nilai batas atas akan ada nilai yang terkecil sehingga disebut batas atas terkecil (supremum). Sementara itu, dari nilai-nilai batas bawah akan ada nilai yang terbesar sehingga disebut batas bawah terbesar (infimum).

Definisi 17 (*Supremum dan Infimum*)

1. Suatu bilangan $u^* \in R$ adalah supremum dari $S \subseteq R$ jika ia memenuhi dua syarat berikut:

   (i) $s \leq u^*$, $\forall s \in S$

   (ii) jika $s \leq u$, $\forall s \in S$ maka $u^* \leq u$.

2. Suatu bilangan $w^* \in R$ adalah infimum dari $S \subseteq R$ jika ia memenuhi dua syarat berikut:

   (i) $w^* \leq s$, $\forall s \in S$

   (ii) jika $w \leq s$, $\forall s \in S$ maka $w \leq w^*$

2. 7. Induksi Matematika

Prinsip Induksi Matematika merupakan salah satu cara pembuktian dalam analisis matematika.

Definisi 18

Untuk setiap $n \in N$, dimana N adalah himpunan bilangan asli, misalkan P (n) adalah pernyataan pada suatu harga n. Pandang bahwa;

(1) P(1) benar

(2) Jika P(k) benar maka P(k+1) juga benar

Maka dapat disimpulkan bahwa P(n) benar untuk semua $n \in N$.

Langkah (1) biasa dinamakan basis induksi, sedangkan langkah (2) dinamakan langkah induksi. Asumsi bahwa pernyataan benar untuk $n = k$ pada langkah (2) dinamakan hipotesis induksi.

Contoh 4

Buktikan bahwa; $\frac{1}{(1.3)}+\frac{1}{(3.5)}+\cdots+\frac{1}{[(2n-1)(2n+1)]}=\frac{n}{2n+1}, n \geq 1$

melalui induksi matematika.

Bukti:

(1) Basis induksi

Akan ditunjukkan benar untuk n = 1

$$\frac{1}{(2.1-1)(2.1+1)} = \frac{1}{2.1+1}$$

$$\frac{1}{(1)(3)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

sehingga terbukti untuk n =1.

(2) Langkah Induksi

Diasumsikan pernyataan benar untuk n = k. Akan ditunjukkan benar pula untuk n = k+1.

Untuk n = k diperoleh:

$$\frac{1}{(1.3)}+\frac{1}{(3.5)}+\cdots+\frac{1}{[(2k-1)(2k+1)]}=\frac{k}{2k+1},$$

Untuk n = k+1 diperoleh:

$$\frac{1}{(1.3)}+\frac{1}{(3.5)}+\cdots+\frac{1}{[(2k-1)(2k+1)]}+\frac{1}{\{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]\}}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k+1}{2k+3}\text{ terbukti}$$

Karena terbukti benar juga untuk n = k+1, maka pernyataan di atas benar juga untuk semua n ≥ 1.

2.8. Proses Stokhastik

Proses stokhastik $\underline{X} = \{X(t), t \in T\}$ adalah himpunan peubah acak X yang merupakan fungsi dari t, dimana t adalah anggota himpunan indeks T. t diinterpretasikan sebagai waktu dan X(t) disebut state dari proses pada waktu t.

2.8.1. Proses Menghitung dan Proses Poisson

Suatu proses stokhastik $\{N(t), t \geq 0\}$ dikatakan sebagai proses menghitung jika N(t) menyatakan banyaknya kejadian yang telah terjadi sampai waktu t. N (t) harus memenuhi:

(i) $N(t) \geq 0$

(ii) N (t) bernilai integer positif

(iii) Jika s < t maka $N(s) \leq N(t)$

(iv) Untuk $s < t$, $N(t) - N(s)$ sama dengan banyaknya kejadian yang telah terjadi dalam interval $(s,t]$.

Suatu proses menghitung dikatakan memiliki incremen yang saling bebas jika banyaknya peristiwa yang terjadi pada interval waktu yang terpisah adalah saling bebas. Sebagai contoh, banyaknya kejadian yang terjadi pada waktu t (yaitu N(t)) harus saling bebas dengan banyaknya kejadian yang terjadi antara waktu t dan $t + s$ (yaitu $N(t+s) - N(t)$).

Suatu proses menghitung dikatakan memiliki incremen yang stasioner jika distribusi banyaknya kejadian yang terjadi pada sebarang interval waktu hanya bergantung pada panjangnya interval waktu tersebut. Dengan kata lain, proses menghitung dikatakan memiliki incremen stasioner jika banyaknya kejadian pada interval waktu $(t_1 + s, t_2 + s]$ (yaitu $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$) mempunyai distribusi yang sama dengan banyaknya kejadian pada interval $(t_1, t_2]$ (yaitu $N(t_2) - N(t_1)$) untuk semua $t_1 < t_2$.

Salah satu tipe proses menghitung yang paling penting adalah proses Poisson yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 19

Proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ dikatakan sebagai proses poisson dengan intensitas λ, $\lambda > 0$ jika:

(i) $N(0) = 0$

(ii) Proses tersebut mempunyai incremen yang saling bebas. Artinya $N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ saling bebas.

(iii) Banyaknya kejadian pada sebarang interval sepanjang t berdistribusi Poisson dengan rataan λt. Sehingga untuk semua $s, t \geq 0$ berlaku:

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

2.8.2. Distribusi Waktu Antar Kedatangan dan Waktu Tunggu

Misalkan X_1 adalah waktu pada kedatangan pertama pada proses Poisson. Untuk $n \geq 1$, misalkan X_n menyatakan waktu antar kedatangan ke- $_{n-1}$ dengan kedatangan ke- *n*. $\{X_n, n \geq 1\}$ dikatakan sebagai barisan waktu antar kedatangan.

Teorema 2

Interval antara dua kejadian berurutan dari proses Poisson dengan parameter λ akan mempunyai distribusi eksponensial dengan rataan $1/\lambda$.

Bukti:

Misalkan X_n peubah acak yang menyatakan interval antara dua kejadian berurutan dari proses Poisson $\{N(t)\}$ dan $P(X_n \leq x) = F(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatifnya. Pandang dua peristiwa berurutan E_i dan E_{i+1}, E_i terjadi pada waktu t_i, maka

$P(X_n > x) = P(E_{i+1}$ tidak terjadi dalam interval (t_i, t_{i+x}) bila diketahui E_i terjadi pada waktu $t_i)$

$= P(E_{i+1}$ tidak terjadi dalam interval $(t_i, t_{i+x}) | N(t_i) = i)$

$= P(N(x) = 0 | N(t_i) = i) = P_0(x) = e^{-\lambda x}, \; x > 0$

Karena i sebarang, maka X_n merupakan interval antara dua kejadian sebarang yang berurutan, sehingga

$F(x) = P(X_n \le x) = 1 - P(X_n > x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$ dan fungsi densitasnya

$f(x) = \dfrac{dF}{dx} = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$. Bentuk $f(x)$ tersebut merupakan fungsi densitas dari peubah acak X yang berdistribusi eksponensial. Teorema 2 terbukti.

Kuantitas lain yang juga penting adalah S_n, yaitu waktu tunggu untuk kejadian ke-*n*. Karena

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\,,\ n \ge 1,$$

maka dapat ditunjukkan dengan fungsi pembangkit momen bahwa S_n berdistribusi Gamma dengan parameter n dan λ.

Karena X_i, i = 1, 2, …saling bebas dan berdistribusi eksponensial maka $M_{Xi}(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$. Sehingga

$$M_{S_n}(t) = M_{\sum_{i=1}^{n} Xi}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda - t} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

yang merupakan fungsi pembangkit momen distribusi gamma, dengan harga $\alpha = n$ dan $\beta = 1/\lambda$

2.9. Teori Antrian

Antrian merupakan kumpulan input yang menunggu untuk mendapat pelayanan. Pengertian-pengertian dasar yang perlu dipahami berkaitan dengan teori antrian adalah:

a. Rata-rata kedatangan

yaitu rata-rata banyaknya input yang datang dalam jangka waktu tertentu.

b. Waktu antar kedatangan

adalah jangka waktu kedatangan suatu input dengan input sebelumnya.

c. Rata-rata pelayanan

adalah rata-rata banyaknya input yang dapat dilayani dalam satuan waktu tertentu.

d. Disiplin pelayanan

adalah kebijakan yang dipakai oleh pelayan untuk memilih input yang dilayani lebih dulu.

Diberikan pula peubah acak sebagai berikut:

$N(t)$ = Banyaknya kedatangan pelanggan pada interval $(0,t]$

$D(t)$ = Banyaknya keluaran pelanggan pada interval $(0,t]$

S_n = Total waktu yang digunakan dalam sistem oleh semua pelanggan selama interval waktu $(0,t]$

Asumsi yang berlaku dalam sistem antrian adalah bahwa intensitas keluaran (μ) harus lebih besar dari intensitas kedatangan (λ), sehingga berlaku $\lambda < \mu$ atau ekuivalen $\lambda / \mu < 1$. Kondisi ini dinamakan kondisi steady state (stabil). Sebaliknya, jika $\lambda > \mu$ atau ekuivalen $\lambda / \mu > 1$ maka kondisi ini dinamakan kondisi transien. Sistem antrian yang memenuhi kondisi transien akan sukar dianalisis.