BAB II
PEMROGRAMAN LINEAR

2.1. Sistem Persamaan Linear

Sebuah garis dalam bidang XY secara aljabar dapat dinyatakan oleh persamaan yang berbentuk : $a_1 x + a_2 y = b$. Persamaan ini dinamakan Persamaan Linear dengan variabel x dan y. Secara umum Persamaan Linear dengan n variabel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ didefinisikan sebagai persamaan yang dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = b$$

dengan $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dan b adalah konstanta-konstanta riil.

Sebuah Persamaan Linear tidak melibatkan suatu hasil kali atau akar variabel. Semua variabel hanya berderajat satu dan tidak muncul sebagai argumen untuk fungsi trigonometri, fungsi logaritmik, atau untuk fungsi eksponensial.

Sebuah Sistem Persamaan Linear sebarang yang terdiri dari m persamaan linear dengan n variabel tak diketahui dituliskan sebagai :

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\
. \\
. \\
. \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}$$

Dengan x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n adalah bilangan tak diketahui, sedangkan a dan b yang berindeks yang bersesuaian menyatakan konstanta-konstanta pada sistem persamaan linear itu. Penyajian indeks ganda pada koefisien bilangan yang tak diketahui digunakan untuk menyatakan letak koefisien dalam sistem persamaan linear tersebut. Indeks pertama pada koefisien a_{ij} menunjukkan persamaan dimana koefisien tersebut muncul, sedangkan indeks kedua menunjukkan variabel yang dikalikan dengan koefisien tersebut. Jadi a_{12} terdapat pada persamaan pertama dan mengalikannya dengan x_2.

Sistem persamaan linear yang terdiri dari m persamaan dengan n variabel yang telah dituliskan di atas, dapat dinyatakan dalam bentuk matriks seperti di bawah ini :

A X = B dimana,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Apabila dibentuk suatu matriks lengkap (*Augment Matrix*) A_B yaitu matriks yang n kolom pertamanya berupa matriks A dan kolom ke (n+1) terdiri dari vektor B, maka akan diperoleh suatu matriks lengkap sebagai berikut :

$$A_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Setiap determinan A (termasuk minor determinan) juga terjadi didalam matriks A_B, maka disimpulkan bahwa r(A) tidak melebihi r(A_B). Sehingga terdapat dua kemungkinan yang bisa terjadi, yaitu r(A) < r(A_B) dan r(A) = r(A_B).

- Jika r(A) < r(A_B), maka tidak ada variabel x_j yang memenuhi sistem persamaan linear di atas. Determinan yang tidak lenyap (determinan dengan nilai ≠ 0) di dalam matriks A_B harus mencakup (memuat) matriks kolom B.

  Oleh karena r(A) < r(A_B) maka B bebas linear dari kolom-kolom matriks A dan berarti bahwa tidak ada variabel x_j yang memenuhi $\sum_{j=1}^{n} X_j P_j = B$, dimana P_j merupakan kolom ke j dari A. Jadi tidak ada pemecahan dan kondisi ini disebut *Inconsistent*.

- Jika r(A) = r(A_B), maka akan selalu ada pemecahan dan paling sedikit ada satu pemecahan (*Consistent*).

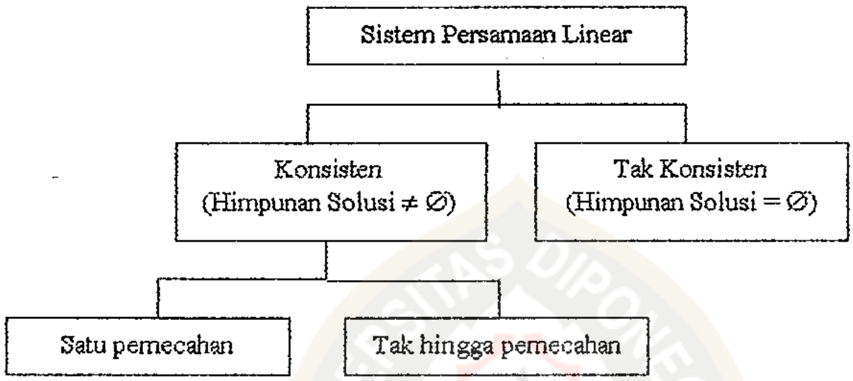
Dari pernyataan di atas muncul kondisi berikut ini :

1. Misal r(A) = k, jika k = n maka pemecahan yang diperoleh disebut pemecahan unik yaitu satu-satunya pemecahan yang akan ditemukan.
2. Jika k < n, maka setiap X yang memenuhi persamaan dari baris-baris yang sesuai dengan matriks A yang bebas linear, akan memenuhi seluruh persamaan di dalam sistem persamaan tersebut, (n - k) variabel yang tersisa dapat diberi nilai sembarang dan sisanya sebanyak k variabel dapat dicari nilainya asalkan kolom-kolom dari A yang bersesuaian dengan k variabel tersebut bebas linear. Jadi pemecahan yang diperoleh akan tak hingga banyaknya.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa suatu sistem persamaan linear dalam m persamaan dan n variabel akan mempunyai tiga kemungkinan sebagai berikut :

1. Sistem persamaan linear akan mempunyai pemecahan yang unik (*Unique Solution*) apabila $r(A) = r(A_B) = n$.
2. Sistem persamaan linear akan mempunyai pemecahan yang tak hingga banyaknya (*Infinite Solution*), jika $r(A) = r(A_B) = k < n$.
3. Sistem persamaan linear tidak mempunyai pemecahan (*No Solution*), jika $r(A) < r(A_B)$.

Secara umum pemecahan dari Sistem Persamaan Linear Non Homogen dapat digambarkan dengan diagram di bawah ini :



Gambar 2.1

2.2 Pemrograman Linear

2.2.1 Pengertian

Pemrograman Linear (Optimasi Linear) adalah suatu program yang dapat dipakai untuk menyelesaikan masalah optimasi, didalam sistem itu terdapat kendala-kendala / pembatasan-pembatasan yang diterjemahkan dalam bentuk pertidaksamaan linear. Nilai-nilai variabel yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear berada dalam suatu himpunan penyelesaian yang mempunyai berbagai kemungkinan penyelesaian. Dari berbagai kemungkinan penyelesaian ini terdapat sebuah penyelesaian yang memberikan solusi yang terbaik yang disebut penyelesaian optimum.

Jadi tujuan Pemrograman Linear adalah mengoptimumkan (memaksimumkan atau meminimumkan) sebuah fungsi f(x). Fungsi ini disebut fungsi tujuan (fungsi objektif).

Sebuah masalah umum dari model matematika dapat dinyatakan dalam suatu Pemrograman Linear, jika fungsi $f(X)$, $g_i(X)$, $i = 1, 2, 3, ..., m$ semuanya merupakan fungsi linear.

Definisi 1 :

Pemrograman Linear adalah sebuah program yang terdiri dari sebuah fungsi linear yang akan dioptimumkan (maksimum / minimum) yang disebut fungsi tujuan (fungsi objektif), dan sebuah sistem pertidaksamaan linear yang disebut fungsi pembatas (fungsi kendala), serta pembatas yang menghendaki variabel-variabel lebih besar atau sama dengan nol yang disebut pembatas nonnegatif (pembatas tanda).

2.2.2 Formulasi Matematika Pemrograman Linear

Maksimum/minimum : $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$ ... (2.1)

Kendala :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \quad (\leq, \geq) \; b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \quad (\leq, \geq) \; b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \quad (\leq, \geq) \; b_3$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \quad (\leq, \geq) \; b_m \qquad \ldots (2.2)$$

Pembatas tanda : $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0$ ... (2.3)

Pers.(2.1) adalah fungsi objektif yaitu fungsi yang akan dioptimumkan (maksimum / minimum).

Pers.(2.2) adalah fungsi pembatas yaitu kendala-kendala yang dihadapi dalam usaha mengoptimumkan fungsi objektif.

Pers(2.3) adalah fungsi pembatas juga, tetapi karena hanya sebagai pembatas tanda variabel-variabel keputusan x_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ yaitu variabel-variabel yang menguraikan keputusan-keputusan yang akan dibuat dalam masalah Pemrograman Linear yang diberikan, maka dipisahkan dari fungsi pembatas di atas. Pembatas ini sering disebut sebagai pembatas tanda (pembatas standar).

2.2.3 Solusi Pemrograman Linear

Definisi 2 : ***Kombinasi Linear konveks***

Suatu titik $X = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$ dengan $0 \leq \lambda \leq 1$, disebut Kombinasi Linear Konveks dari titik X_1 dan X_2.

Definisi 3 :

Suatu himpunan $K \subseteq E_n$ disebut Himpunan Konveks jika setiap kombinasi linear konveks dari dua titik dalam K juga ada dalam K.

Definisi 4 : *Solusi Fisibel*

Solusi yang memenuhi persamaan (2.2) dan persamaan (2.3) disebut **Solusi Fisibel**. Himpunan solusi-solusi fisibel tersebut dinotasikan dengan S_F. Apabila tidak ditemukan solusi yang memenuhi persmaan (2.2) dan persamaan (2.3), maka S_F kosong ($S_F = \varnothing$).

Theorema 1 :

Himpunan solusi-solusi fisibel S_F adalah himpunan konveks.

Bukti :

Theorema diatas dibuktikan dengan menunjukkan bahwa setiap kombinasi linear konveks dari dua solusi fisibel adalah juga merupakan solusi fisibel.

Ambil X_1 , X_2 dua solusi fisibel sebarang dalam S_F, maka berlaku :

$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$ ... (2.4)

$AX_1 = B$, $A.X_2 = B$ ... (2.5)

Misal X adalah kombinasi linear konveks dari X_1 dan X_2,

maka $X = (1 - \lambda) X_1 + \lambda X_2$, $0 < \lambda < 1$

dan $X \geq 0$ (dari ...(2.4)) ... (2.6)

Jadi $AX = A [(1 - \lambda) X_1 + \lambda X_2]$

$= (1 - \lambda) AX_1 + \lambda AX_2$

$= B - \lambda B + \lambda B$ (dari ...(2.5))

$AX = B$ ... (2.7)

Dari persamaan (2.6) dan persamaan (2.7), berarti bahwa X adalah solusi fisibel. Kombinasi linear konveks dari setiap dua solusi fisibel adalah solusi fisibel, maka himpunan solusi fisibel merupakan himpunan konveks.

Definisi 5 : *Solusi Basis*

Solusi Basis adalah solusi dengan n - m variabelnya ditentukan sama dengan nol, sedangkan m variabel yang tersisa dicari pemecahannya. Pemecahan dari m variabel tersebut akan ditemukan apabila determinan koefisien-koefisien m variabel itu tidak sama dengan nol.

Pada persamaan (2.2) terdapat m persamaan dalam n variabel yang belum diketahui. Diasumsikan $m < n$ dan persamaan-persamaan tersebut bebas linear, karena pembatas merupakan pertidaksamaan dalam model matematika dan penambahan variabel slack (variabel bayangan yang bernilai ≥ 0) pada pembatas tersebut sehingga menyebabkan $m < n$.

Jika $n - m$ variabel x_j diberi nilai nol, sistem persamaan dari m persamaan dalam n variabel yang tak diketahui tersebut akan mempunyai solusi yang unik (solusi yang merupakan satu-satunya solusi yang akan ditemukan). Solusi-solusi sistem itu dan solusi-solusi dari asumsi sama dengan nol tersebut merupakan penyelesaian persamaan (2.2) dan disebut Solusi Basis.

Sedangkan m variabel dalam sistem, setelah $n - m$ variabel ditentukan sama dengan nol disebut Variabel Basis atau Basis. Sisa variabel tersebut dinamakan

Variabel Nonbasis. Karena solusi unik dari m persamaan dalam m variabel juga memuat nol, maka dalam solusi basis paling sedikit n – m solusi nol.

Definisi 6 : ***Solusi Fisibel Basis***

Solusi Fisibel Basis (SFB) adalah solusi basis yang memenuhi persamaan (2.3) atau solusi basis yang nonnegatif.

Theorema 2 :

Solusi fisibel basis dari masalah Pemrograman Linear adalah batas dari himpunan konveks solusi fisibel atau jika himpunan dari vektor-vektor $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_m$ dapat ditemukan bebas linear,

$$\xi_1 P_1 + \xi_2 P_2 + \xi_3 P_3 + \ldots + \xi_m P_m = B$$

$$\text{dan} \quad \xi_j \geq 0 \;,\; j = 1, 2, 3, \ldots, m$$

maka $X_\xi = [\ \xi_1 , \xi_2 , \xi_3 , \ldots , \xi_m , 0 , 0 , 0 , \ldots , 0]'$ yang merupakan SFB adalah titik ekstrim dari S_F.

Bukti :

Telah jelas bahwa X_ξ ada di dalam S_F. Andaikan X_ξ bukan merupakan titik ekstrim, maka akan ada dua titik yang berbeda dengan X_ξ yaitu X_1 dan X_2 dalam S_F sedemikian sehingga berlaku :

$$X_\xi = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2 \,,\; 0 < \lambda < 1$$

dimana $\xi_j = \lambda x_{j1} + (1 - \lambda) x_{j2} \,,\; j = 1, 2, 3, \ldots, m$

dan $0 = \lambda x_{j1} + (1 - \lambda) x_{j2} \,,\; j = m+1, \ldots, n.$

Karena X_1 , $X_2 \in S_F$, x_{j1}, $x_{j2} \geq 0$ dan $0 < \lambda < 1$,

maka $x_{j1} = x_{j2} = 0$, $j = m+1, ..., n$.

Jadi X_1 dan X_2 adalah Solusi Fisibel Basis dengan elemen masing-masing yaitu : $X_1 = [\, x_{11}, x_{21}, x_{31}, \ldots, x_{m1}, 0, 0, 0, \ldots, 0]'$

$X_2 = [\, x_{12}, x_{22}, x_{32}, \ldots, x_{m2}, 0, 0, 0, \ldots, 0]'$

Karena X_1 dan X_2 adalah solusi dari $AX = B$, maka berlaku :

$$x_{11}P_1 + x_{21}P_2 + x_{31}P_3 + \ldots + x_{m1}P_m = B \qquad \ldots (2.11)$$

$$x_{12}P_1 + x_{22}P_2 + x_{32}P_3 + \ldots + x_{m2}P_m = B \qquad \ldots (2.12)$$

Dari persamaan (2.10) dan (2.11) diperoleh :

$$(\xi_1 - x_{11})P_1 + (\xi_2 - x_{21})P_2 + (\xi_3 - x_{31})P_3 + \ldots + (\xi_m - x_{m1})P_m = 0$$

Tetapi karena dari hipotesi sebelumnya diketahui bahwa $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_m$ bebas linear, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa :

$\xi_1 - x_{11} = 0$, $\xi_2 - x_{21} = 0$, $\xi_3 - x_{31} = 0$, ..., $\xi_m - x_{m1} = 0$

atau $\xi_1 = x_{11}$, $\xi_2 = x_{21}$,$\xi_3 = x_{31}$, ... , $\xi_m = x_{m1}$

Yang berarti bahwa $X_\xi = X_1$.

Kondisi ini kontradiksi dengan pengandaian, jadi X_ξ adalah Titik Batas.

Definisi 7 : *Solusi Optimum*

Solusi dari persamaan (2.2) dan persamaan (2.3) yang mengoptimumkan fungsi objektif (2.1) disebut **Solusi Optimum** dari masalah Pemrograman Linear.

Theorema 3 :

Jika f(X) minimum pada lebih dari satu titik di S_F , maka f(X) minimum pada semua titik yang merupakan kombinasi linear konvek dari titik-titik tersebut.

Bukti :

Misal X_1 ,X_2 , X_3 , ... ,X_k adalah titik-titik batas dari S_F, dimana f(X) minimum. Maka, $f(X_1) = f(X_2) = f(X_3) = \ldots = f(X_k)$

Ambil Y adalah sebarang kombinasi linear konvek dari titik-titik tersebut, maka :

$$Y = \sum_{r=1}^{k} \beta_r . X_r ; \sum_{r=1}^{k} \beta_r = 1; \beta_r \geq 0$$

Dan karena f(X) linear,

$$f(X) = f(\sum_{r=1}^{k} \beta_r . X_r) = \sum_{r=1}^{k} \beta_r . f(X_r)$$

$$= \sum_{r=1}^{k} \beta_r . f(X_1) = f(X_1)$$

yang berarti f(X) minimum pada Y juga. Jadi terbukti bahwa f(X) minimum di kombinasi linear konveks dari titik-titik minimumnya.

2.3. Pemrograman Integer

2.3.1. Pengertian

Pemrograman Linear merupakan teknik analisa kuantitatif dalam riset operasi dengan mengandalkan model-model matematika dalam perumusannya. Namun solusi optimal yang diperoleh terkadang tidak dapat disesuaikan dengan konteks dari situasi pemasalahan yang diberikan.

Pada permasalahan yang dihadapi perusahaan, ada kalanya dijumpai permasalahan yang mengharuskan pemecahannya dalam bilangan bulat. Sebagai contoh jika variabel-variabel keputusan tersebut adalah jumlah bis pada rute yang berbeda di suatu kota, atau jumlah bank cabang pada daerah yang berbeda di suatu negara. Solusi dalam bentuk pecahan tentu saja tidak dapat diartikan kedalam keputusan perusahaan.

Pemrogaraman Linear yang membatasi variabel-variabel keputusan pada nilai integer disebut Pemrograman Linear Integer. Sedangkan jika hanya sebagian saja dari variabel keputusan yang dibatasi bernilai integer program itu disebut Pemrograman Linear Integer Campuran.

2.3.2. Formulasi Matematika Pemrograman Integer

Maksimum/minimum : $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$ ... (2.1)

Kendala : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \quad (\leq, \geq) \; b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \quad (\leq, \geq) \; b_2$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \quad (\leq, \geq) \; b_3$

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \ (\leq , \geq) \ b_m \qquad \ldots (2.2)$$

Pembatas tanda : $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0$ ... (2.3)

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \text{ integer} \qquad \ldots (2.3^*)$$

Formulasi matematika dari Pemrograman Integer hampir sama dengan formulasi matematika pada Pemrograman Linear, hanya pada pembatas tanda terdapat penambahan satu syarat lagi yaitu x_i , i = 1 , 2 , 3 , … , n integer.

2.3.3. Solusi Pemrograman Linear Integer

Definisi 8 : ***Konveks Hull***

Konveks Hull dari suatu himpunan S adalah irisan dari semua Himpunan Konveks, yang mana S menjadi subsetnya. Konveks Hull dari himpunan S dituliskan sebagai [S].

Theorema 4 :

Konveks Hull dari S adalah himpunan dari semua kombinasi linear konveks dari titik-titik dalam S.

Bukti :

Misal K adalah himpunan semua kombinasi linear konveks dari titik-titik dalam S. Maka K Konveks dan memuat semua titik-titik dalam S. Sehingga $S \subseteq K$.

Ambil K_1 sebarang himpunan konveks yang memuat S, karena K_1 juga memuat semua kombinasi linear konveks dari titik-titk K_1 juga. Dan K_1 juga akan memuat semua kombinasi linear konveks dari titik-titik S. Jadi K_1 memuat K. Maka K merupakan subset dari semua himpunan konveks yang memuat S. Jadi K adalah irisan dari semua himpunan konveks.

Jadi K = [S].

Definisi 9 : *Vektor Integer*

Sebuah vektor $X \in E_n$ disebut vektor integer jika vektor tersebut mengandung komponen x_i untuk semua i = 1,2,3,...,n integer dan $X \in E_n$ disebut vektor integer campuran jika x_i integer untuk $i \in j$, dengan $j \subset \{1,2,3,...,n\}$.

Jika T_F dinotasikan sebagai himpunan solusi fisibel dari Pemrograman Linear Integer atau Pemrograman Linear Integer Campuran dan S_F adalah himpunan solusi fisibel dari Pemrograman Linear, maka $T_F \subseteq S_F$. S_F merupakan himpunan konveks yang tak kosong, maka setiap titik dari T_F ada di dalam S_F yang berarti bahwa kombinasi linear konveks dari titik-titik dalam T_F juga ada didalam S_F. Sehingga $[T_F]$, yaitu konveks hull dari T_F merupakan subset dari S_F.

$$T_F \subseteq [T_F] \subseteq S_F \qquad \text{... (2.13)}$$

Masalah Pemrograman Linear Integer pada pers (2.1) dan (2.3*) dapat dinyatakan sebagai berikut : Optimum f(x) = C.X

kendala $X \in T_F$ ... (2.14)

Jika dihubungkan dengan masalah Pemrograman Linear yaitu :

Optimum f(x) = C.X

kendala $X \in S_F$ ... (2.15)

maka diperoleh gabungan dari kedua masalah di atas dengan bentuk sebagai berikut :

$$\text{Optimum } f(x) = C.X$$

$$\text{kendala } X \in [T_F] \quad \text{... (2.16)}$$

Theorema 5 :

Jika solusi optimum dari persamaan (2.15) ada dan T_F tak kosong, maka solusi optimum dari persamaan (2.14) dan (2.16) ada. Juga solusi optimum dari persamaan (2.15) adalah batas bawah untuk solusi optimum dari persamaan (2.14) dan (2.16).

bukti :

Misal X_0 adalah solusi optimum dari persamaan (2.15) maka untuk semua titik X dalam S_F berlaku $f(X_0) \leq f(X)$.

Ambil $Y \in T_F$, dari (2.13) dapat diambil kesimpulan bahwa $Y \in S_F$,

dan $f(X_0) \leq f(Y)$.

Ini berarti bahwa f(Y), $Y \in T_F$ mempunyai batas bawah lebih kecil dari solusi optimum yang dimiliki (2.14). Pernyataan ini juga membuktikan bagian kedua dari teorema tersebut.

Theorema 6 :

Jika solusi optimum dari persamaan (2.15) adalah vektor integer atau integer campuran seperti yang dikehendaki pada persamaan (2.3^*), maka solusi optimum tersebut juga solusi optimum dari persamaan (2.14).

bukti :

Misal X_0 adalah solusi optimum dari persamaan (2.15) yang memenuhi persamaan (2.3^*), maka $X_0 \in T_F$ dan T_F tak kosong.

Andaikan X_0 bukan solusi optimum dari persamaan (2.14), dari theorema 5, persamaan (2.16) mempunyai solusi optimum, misal solusi optimumnya adalahY_0. Maka $Y_0 \in T_F$ dan $f(Y_0) \leq f(X_0)$.

Karena $T_F \subseteq S_F$, maka $Y_0 \in S_F$ dan sebelumnya telah diketahui bahwa $X_0 \in S_F$. Pertidaksamaan diatas menunjukkan bahwa X_0 bukan solusi optimum dari persamaan (2.15), hal ini kontradiksi dengan perngandaian yang dibuat pada awal pembuktian. Jadi X_0 adalah solusi optimum dari persamaan (2.14).

Theorema 7 :

Solusi optimum dari persamaan (2.14) adalah solusi optimum dari persamaan (2.16) dan sebaliknya solusi optimum dari persamaan (2.16) adalah solusi optimum dari persamaan (2.14).

bukti :

- Solusi optimum dari persamaan (2.14) adalah solusi optimum dari persamaan (2.16).

Misal $X_0 \in T_F$ adalah solusi optimum dari persamaan (2.14), maka untuk semua $X \in T_F$ dan berlaku $f(X_0) \leq f(X)$ ... (2.17)

Ambil Y sebarang titik dalam $[T_F]$, maka Y adalah kombinasi linear konveks dari sebarang titik X_i , i = 1,2,3,...,r dalam T_F yang dituliskan sebagai berikut :

$$Y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i . X_i \text{ dimana } \lambda_i \geq 0 \text{ , } \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$$

Karena $X_0 \in T_F$, X juga akan ada di dalam $[T_F]$.

Andaikan Y beda dengan X_0 dan $f(Y) < f(X_0)$ ... (2.18)

$$f(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i . X_i) < f(X_0)$$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i . f(X_i) < f(X_0)$$

Karena $f(X_0)$ linear, maka pertidaksamaan di atas dapat menjadi :

$$f(X_k) . \sum_{i=1}^{r} \lambda_i < f(X_0)$$

$$f(X_k) < f(X_0) \qquad \text{... (2.19)}$$

dimana $f(X_k) = \min_i f(X_i)$

Karena X_k merupakan salah satu dari X_i, dimana $X_i \in T_F$ dan dari persamaan (2.19) yang menyatakan bahwa $f(X_k) < f(X_0)$.

Hal ini kontradiksi dengan (2.17) yang menyatakan bahwa $f(X_0) \leq f(X)$ untuk semua X dalam T_F, maka pengandaian (2.18) harus diingkar menjadi $f(Y) \geq (X_0)$. Jadi X_0 adalah solusi optimum dari persamaan (2.16).

- Solusi optimum dari (2.16) adalah solusi optimum dari persamaan (2.14).

  Misal X_0 adalaj solusi optimum dari persamaan (2.16), maka X_0 adalah batas dari $[T_F]$ dan X_0 ada dalam T_F. Ambil sebarang X dalam T_F, maka X akan ada dalam $[T_F]$ juga dan berlaku $f(X_0) \leq f(X)$.

Karena X_0 batas dari $[T_F\ ]$ dan sebarang titik dalam $[T_F]$. Pernyataan di atas menunjukkan bahwa X_0 adalah solusi optimum dari persamaan (2.14).