BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 Variabel Random

Dalam statistika digunakan istilah percobaan untuk menyatakan tiap proses yang menghasilkan data mentah. Contoh yang amat sederhana dari suatu percobaan dalam statistika dapat berupa lantunan sebuah mata uang logam. Dalam percobaan ini hanya ada dua macam hasil yang mungkin, yaitu 'muka' atau 'belakang'. Kendatipun sebuah mata uang logam dilantunkan berulang kali, tidak akan pernah dapat dipastikan bahwa suatu lantunan tertentu akan menghasilkan 'muka'. Tetapi hanya diketahui seluruh kemungkinan yang dapat terjadi untuk tiap lantunan.

Definisi 2.1.1:

Gugus semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan statistika disebut ruang sampel dan dinyatakan dengan lambang ς.

Tiap hasil dalam ruang sampel atau anggota ruang sampel tersebut disebut titik sampel. Dari contoh pelantunan sebuah mata uang logam, ruang sampel

ς yang merupakan kumpulan semua hasil yang mungkin dapat ditulis sebagai

$$\varsigma = \{M,B\}$$

dengan M menyatakan 'muka' dan B menyatakan 'belakang'.

Dalam tiap percobaan mungkin ingin diketahui munculnya kejadian tertentu dan bukan titik sampel tertentu dalam ruang sampel. Misalnya ingin diketahui mengenai kejadian A bahwa hasil lantunan suatu dadu dapat dibagi tiga. Ini akan terjadi bila hasilnya merupakan unsur himpunan bagian A = {3,6} dari ruang sampel ς = {1,2,3,4,5,6}.

Definisi 2.1.2:

Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel.

Definisi 2.1.3 :

Jika ξ sebuah percobaan yang memiliki ruang sampel ς dan T sebuah fungsi yang dinotasikan sebuah bilangan riil $T(\zeta)$ untuk setiap kejadian $\zeta \in \varsigma$ maka $T(\zeta)$ disebut variabel random

Contoh 2.1.1 :

ξ : Sebuah katoda diproduksi, dan diuji lamanya tabung sampai rusak. Waktu yang terbuang (dalam jam) atas kerusakan tersebut dicatat. Jika T adalah waktu rusak, maka T(t) = t.

ζ : Waktu kegagalan adalah lebih besar dari 100 jam.

ς : $\{t: t \geq 0\}$

2.2 Statistik Berurut

Dalam percakapan sehari-hari seringkali digunakan kata kemungkinan atau peluang. Misalnya dalam pertandingan sepak bola "kesebelasan A mempunyai peluang menang lebih besar dari kesebelasan B", atau "kecil kemungkinannya saya menang dalam taruhan itu". Dalam tiap hal dinyatakan hasilnya yang masih diragukan, tetapi menurut pengalaman sebelumnya akan dimiliki derajat keyakinan mengenai kebenaran pernyataan tersebut.

Teori peluang untuk ruang sampel berhingga menetapkan suatu himpunan bilangan yang dinamakan bobot berharga dari nol sampai 1, sehingga kemungkinan terjadinya suatu kejadian yang berasal dari suatu percobaan statistika dapat dihitung. Untuk tiap titik pada ruang sampel dikaitkan suatu bobot sedemikian rupa, sehingga jumlah semua bobot sama dengan 1. Bila yakin bahwa suatu titik sampel tertentu kemungkinan besar akan terjadi, maka bobotnya mendekati 1. Sebaliknya, bobot yang hampir nol diberikan pada titik sampel yang kecil sekali kemungkinan terjadi. Dalam banyak percobaan, seperti pelantunan suatu mata uang logam atau dadu yang seimbang, tiap titik sampel berkemungkinan sama untuk muncul dan karenanya diberi bobot yang sama pula. Titik di luar ruang sampel (yang menggambarkan kejadian yang tidak mungkin terjadi) diberi bobot nol.

Untuk menentukan peluang suatu kejadian A, semua bobot titik sampel dalam A dijumlahkan. Jumlah ini dinamakan peluang A dan dinyatakan dengan P(A). Jadi peluang himpunan $\varnothing$ adalah nol dan peluang S adalah 1.

Definisi 2.2.1 :

Peluang suatu kejadian A adalah jumlah bobot semua titik sampel yang termasuk A. Jadi

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\varnothing) = 0, \quad \text{dan} \quad P(S) = 1$$

Contoh 2.2.1 :

Sebuah mata uang dilantunkan dua kali. Berapakah peluangnya bahwa paling sedikit muncul sekali muka ?

Ruang sampel percobaan adalah

$$\varsigma = \{MM, MB, BM, BB\}$$

Bila mata uang tersebut setangkup (seimbang), maka tiap hasil mempunyai kemungkinan muncul yang sama. Karena itu tiap titik diberi bobot b sehingga 4b = 1 atau b = ¼. Bila A menyatakan kejadian bahwa paling sedikit satu muka muncul maka P(A) = ¾.

Bobot dapat dipandang sebagai peluang yang berkaitan dengan kejadian. Bila percobaan itu bersifat sedemikian rupa sehingga tiap titik sampel dalam ς berbobot sama maka peluang suatu kejadian A adalah hasil bagi banyak titik sampel dalam A dengan banyak titik sampel dalam ς.

Definisi 2.2.2 :

Bila suatu percobaan dapat menghasilkan N macam hasil yang berkemungkinan sama, dan bila tepat sebanyak n dari hasil berkaitan dengan kejadian A, Maka peluang kejadian A adalah

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Definisi 2.2.3 :

Fungsi distribusi kumulatif dari suatu variabel random T dinotasikan dengan F_T dan didefinisikan sebagai $F_T(t) = P(T \leq t)$ untuk seluruh t riil.

Definisi 2.2.4 :

Misalkan $T_1, T_2, \ldots, T_k$ sebagai k variabel random yang semuanya terdefinisi atas ruang probabilitas yang sama dengan fungsi densitas $f(t_i)$. Fungsi distribusi bersama dari $T_1, T_2, \ldots, T_k$ dinotasikan dengan $F_{T_1, T_2, \ldots, T_k}(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ didefinisikan sebagai $P[T_1 \le t_1, \ldots, T_k \le t_k]$ untuk semua $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$.

Definisi 2.2.5 :

Misalkan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sampel random berukuran n. Maka $T_1 \le T_2 \le \ldots \le T_n$ dimana T_i adalah Y_i yang telah diatur dalam urutan naik dan didefinisikan sebagai statistik berurut.

Contoh 2.2.2 :

ξ : Lima buah tabung katoda ditempatkan pada percobaan lamanya pemakaian sampai mengalami kerusakan sebelum 10 jam.

ζ : Tabung pertama mengalami kerusakan setelah pemakaian selama 4 jam, kemudian berturut-turut 3 jam, 6 jam, 5 jam dan 7 jam.

ς : $\{t : t \ge 0\}$.

Sampel random Y_i, $i = 1,2, \ldots, n$ adalah

$Y_1 = 4$, $Y_2 = 3$, $Y_3 = 6$, $Y_4 = 5$ dan $Y_5 = 7$.

Setelah diurutkan diperoleh

$T_1 = Y_2 = 3 \le T_2 = Y_1 = 4 \le T_3 = Y_4 = 5 \le T_4 = Y_3 = 6 \le T_5 = Y_5 = 7.$

Definisi 2.2.6 :

Misalkan $T_{(1)} \le T_{(2)} \le \ldots \le T_{(n)}$ menggambarkan statistik berurut dari suatu fungsi distribusi kumulatif $F_T(t)$. Fungsi distribusi kumulatif marginal dari T_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ diberikan oleh

$$F_{T_\alpha}(t) = \sum_{j=\alpha}^{n} \binom{n}{j} [F(t)]^{j} [1 - F(t)]^{n-j}$$

Definisi 2.2.7 :

Misalkan T memiliki fungsi densitas peluang (*probability density function*/p.d.f) f(t) dan fungsi distribusi F(t) dan bahwa $T_1, T_2, \ldots, T_n$ merupakan suatu sample random. Maka p.d.f bersama dari $T_{(1)}, T_{(2)}, \ldots, T_{(r)}$ $(r \le n)$ adalah

$$\frac{n!}{(n-r)!}\left(\prod_{i=1}^{r} f(t_i)\right)\left[1 - F(t_{(r)})\right]^{n-r}$$

2.3 Istilah-istilah dalam Waktu Hidup

Definisi 2.3.1 :

Waktu hidup (*lifetime*) yaitu interval waktu yang diamati dari suatu individu saat pertama kali masuk ke dalam pengamatan hingga keluar dari pengamatan.

Definisi 2.3.2 :

Individu gagal adalah individu yang keluar dari pengamatan karena disebabkan oleh kejadian yang sedang diamati.

Definisi 2.3.3 :

Individu with drawn adalah individu yang mengundurkan diri (keluar) dari pengamatan karena disebabkan oleh kejadian-kejadian yang tidak sedang diamati.

Definisi 2.3.4 :

Status waktu hidup ialah status individu tepat pada saat ia meninggalkan pengamatan, yaitu gagal (mati), waktu pengamatan telah berakhir, hilang (tidak terdeteksi) atau with drawn.

2.4 Fungsi-fungsi pada Distribusi Waktu Hidup

Fungsi-fungsi pada distribusi waktu hidup merupakan suatu fungsi yang menggunakan variabel random waktu hidup. Waktu hidup adalah interval waktu yang diamati dari suatu individu saat pertama kali masuk ke dalam pengamatan hingga keluar dari pangamatan. Misalnya interval waktu yang mengukur waku sampai rusaknya suatu barang produksi, matinya suatu makhluk hidup, kambuhnya suatu penyakit atau sampai terjangkitnya suatu penyakit. Variabel random waktu hidup biasanya dinotasikan dengan huruf "T", dan akan membentuk suatu distribusi.

Distribusi dari waktu hidup dapat disajikan oleh tiga fungsi berikut :

1. Fungsi densitas peluang / p.d.f f(t)
2. Fungsi waktu hidup S(t)
3. Fungsi hazard h(t).

2.4.1 Fungsi Densitas Peluang (p.d.f)

Definisi 2.4.1.1 :

Fungsi densitas peluang adalah probabilitas kegagalan suatu individu pada suatu interval yang kecil (t, t+Δt) per satuan waktu.

Fungsi densitas peluang dinyatakan dengan f(t)

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{P(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t}\right] \tag{2.4.1}$$

Sebagai ilustrasi, dalam sebuah penelitian mengenai lama hidup suatu individu. Kejadian yang diamati adalah waktu kematian individu tersebut.

Dalam kasus ini

$$f(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{P\{\text{individu tersebut meninggal dalam interval }(t,t+\Delta t)\}}{\Delta t}\right]$$

Fungsi densitas peluang disebut juga fungsi frekuensi variabel random kontinu waktu hidup, f(t) mempunyai sifat yaitu :

1. $f(t)\geq 0$ untuk semua t
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=1$
3. $P(a<t\leq b)=\int_a^b f(t)dt$

Contoh 2.4.1.1 :

Misalkan variabel random T mempunyai p.d.f

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\leq t\leq 2\\ 0, & \text{lainnya}\end{cases}$$

Akan ditunjukkan f(t) sebagai fungsi densitas peluang yang memenuhi sifat-sifat diatas.

1. f(t) adalah fungsi non negatif
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=\int_0^2 \frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}t\Big]_0^2=1-0=1$
3. $P(0<t\leq 1)=\int_0^1 \frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}t\Big]_0^1=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

Definisi 2.4.1.2 :

Fungsi distribusi kumulatif pada waktu t untuk suatu individu adalah probabilitas bahwa suatu individu mengalami kegagalan sebelum waktu t atau pada interval waktu [0,t].

$$F(t) = P(T \le t) = \int_0^t f(r)dr \tag{2.4.2}$$

Fungsi distribusi kumulatif mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

1. $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$
2. $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$
3. Fungsi tersebut adalah tidak turun , yaitu jika b $\geq$ a maka F(b) $\geq$ F(a).

Contoh 2.4.1.2 :

Berdasarkan contoh 2.4.1.1 :

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big]_0^t = \frac{1}{2}x - 0 = \frac{1}{2}t$$

2.4.2 Fungsi Waktu Hidup

Definisi 2.4.2.1 :

Fungsi waktu hidup adalah probabilitas individu bertahan hidup lebih dari waktu t dengan t > 0. Fungsi waktu hidup dinyatakan dengan S(t).

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F(t) \tag{2.4.3}$$

Mengacu pada ilustrasi di depan :

S(t) = P (individu hidup lebih lama dari waktu t)

S(t) mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

- $S(t) = 1$ untuk $t = 0$

  Artinya probabilitas suatu individu bertahan lebih lama dari waktu nol adalah 1.

- $S(t) = 0$ untuk $t = \infty$

  Artinya probabilitas suatu individu bertahan pada waktu yang tidak berhingga adalah nol.

Karena sifat-sifat tersebut, sehingga S(t) merupakan suatu fungsi tidak naik dari waktu t.

Contoh 2.4.1.3 :

Berdasarkan contoh 2.4.1.1 dan 2.4.1.2 :

$$
\begin{aligned}
S(t) &= 1 - F(t) \\
&= 1 - P(T \leq t) \\
&= 1 - \frac{1}{2}t
\end{aligned}
$$

2.4.3 Fungsi Hazard

Definisi 2.4.3.1:

Fungsi hazard adalah probabilitas bahwa suatu individu gagal di dalam interval (t,t+Δt), diketahui bahwa individu tersebut telah hidup selama waktu t.

Fungsi hazard dinyatakan dengan h(t) :

$$
h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t < T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \right]
$$

Mengacu pada ilustrasi di depan :

$$
h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P\left\{ \begin{array}{l} \text{individu meninggal pada interval}(t, t + \Delta t) \text{ dengan diketahui} \\ \text{telah hidup selama waktu } t \end{array} \right\}}{\Delta t} \right]
$$

Fungsi hazard dapat juga diinterpretasikan sebagai resiko kegagalan pada waktu t dari individu.

Fungsi hazard dapat pula dinyatakan oleh dua buah fungsi yaitu fungsi waktu hidup S(t) dan fungsi densitas peluang f(t) :

$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}$$

(2.4.4)

Contoh 2.4.1.4 :

Berdasarkan contoh 2.4.1.1 dan 2.4.1.3, maka

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{1/2}{1-\tfrac{1}{2}t} = \frac{1}{2-t}$$

Theorema 2.4.1 :

Jika T variabel random yang menyatakan waktu hidup dimana $T \geq 0$, dan f(t) merupakan p.d.f serta S(t) merupakan fungsi waktu hidup, maka

$$f(t) = -\frac{d}{dt}S(t)$$

Bukti :

Dari (2.4.2) dan (2.4.3) maka

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{d}{dt}F(t) \\ &= \frac{d}{dt}(1-S(t)) \quad = \frac{d}{dt}(1) - \frac{d}{dt}S(t) \\ &= 0 - \frac{d}{dt}S(t) \quad = -\frac{d}{dt}S(t) \end{aligned}$$

∎

Theorema 2.4.2 :

Jika T variabel random yang menyatakan waktu hidup dimana $T \geq 0$ dan S(t) merupakan fungsi waktu hidup serta h(r) menyatakan fungsi hazard maka

$$S(t) = \exp\left[-\int_0^t h(r)dr\right]$$

Bukti :

Dari theorema 2.4.1 diketahui bahwa

$$f(t) = -\frac{d}{dt}S(t)$$

Dan dari persamaan (2.4.4)

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{1}{S(t)}\left(\frac{d}{dt}S(t)\right) = \frac{-d\ln S(t)}{dt}$$

Dengan menggunakan salah satu sifat S(t) bahwa S(t) = 1 untuk t = 0 adalah

$$\int_0^t h(r)dr = \int_0^t\left(-\frac{d}{dt}\ln S(t)\right)dt = -[\ln S(t)]_0^t$$

$$-\int_0^t h(r)dr = \ln S(t) - \ln S(0)$$

$$-\int_0^t h(r)dr = \ln S(t) - \ln 1 = \ln S(t)$$

$$S(t) = \exp\left[-\int_0^t h(r)dr\right]$$

■

Akibat Theorema 2.4.2 :

Berdasar theorema 2.4.1 dan theorema 2.4.2, f(t) dapat dinyatakan dalam h(t) sebagai

$$f(t) = h(t)\exp\left[-\int_0^t h(r)dr\right]$$

Bukti :

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

$$f(t) = h(t)S(t)$$

$$= h(t)\exp\left[-\int_0^t h(r)dr\right]$$

∎

Dari theorema 2.4.1 dan theorema 2.4.2 serta akibat dari theorema 2.4.2 diatas, dapat dilihat bahwa ketiga fungsi pada distribusi waktu hidup yaitu f(t), S(t) dan h(t) berhubungan satu dengan yang lainnya.

2.5 Penyensoran

Dalam analisa waktu hidup dapat terjadi individu yang diamati tersensor. Masalah sensor ini merupakan suatu hal yang membedakan analisa waktu hidup dari bidang ilmu statistik yang lain. Data tersensor adalah data yang diperoleh sebelum hasil yang diinginkan dari pengamatan terjadi, sedangkan waktu pengamatan tersebut telah berakhir atau oleh suatu sebab yang lain. Data yang mengalami penyensoran hanya memuat sebagian informasi mengenai variabel random yang diperhatikan, namun berpengaruh terhadap pengertian-pengertian dan perhitungan statistik.

Dalam tugas akhir ini hanya akan dibahas mengenai jenis penyensoran Type II.

2.5.1 Penyensoran Type II

Sampel tersensor type II adalah sampel dimana hanya r pengamatan-pengamatan terkecil dalam sampel random dari n individu yang diamati ($1 \leq r \leq n$). Sebagai contoh dalam uji waktu hidup meliputi penyensoran type II, seluruh n individu ditempatkan dalam pengamatan, tetapi pengamatan diakhiri pada saat data waktu hidup individu ke -r diperoleh.

Cara pengamatan tersebut dapat menghemat biaya dan waktu karena untuk menunggu seluruh individu gagal akan membutuhkan waktu yang sangat lama dan biaya yang tidak sedikit.

Harus ditekankan bahwa dengan penyensoran type II jumlah pengamatan r diputuskan sebelum data tersebut dikumpulkan. Data terdiri dari r waktu hidup terkecil $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \ldots \leq T_{(r)}$ dari sampel random n waktu hidup $T_{(1)}, \ldots, T_{(n)}$ dari distribusi waktu hidup yang bersangkutan. Bila $T_{(1)}, \ldots, T_{(n)}$ i.i.d dan berdistribusi kontinu dengan p.d.f f(t) dan fungsi waktu hidup S(t), maka p.d.f bersama dari $T_{(1)}, \ldots, T_{(r)}$ (berdasarkan definisi (2.2.7)) adalah

$$\frac{n!}{(n-r)!} f(t_{(1)}) \cdots f(t_{(r)}) [S(t_{(r)})]^{n-r}$$

2.6 Prinsip Dasar Metode Maksimum Likelihood

Metode maksimum likelihood merupakan salah satu cara untuk memperoleh estimasi parameter dari suatu distribusi. Metode ini dapat juga digunakan untuk

menentukan estimasi dari data waktu hidup yang diasumsikan mempunyai pola suatu distribusi tertentu.

2.6.1 Untuk data tidak tersensor

Definisi 2.6.1.1 :

Data lengkap atau data tidak tersensor adalah data waktu hidup yang diperoleh dari suatu pengamatan dimana status waktu hidup seluruh individu gagal.

Diasumsikan $T_1, T_2, \ldots, T_n$ adalah sampel random dari variabel random T yang mempunyai fungsi densitas peluang f(t) dan tergantung pada parameter yang tidak diketahui misalnya θ dengan $\theta \in \Omega$ dan Ω adalah ruang parameter.

Maka fungsi likelihood sampel random tersebut dinyatakan dengan

$L(T/\theta) = f(t_1) \cdot f(t_2) \ldots f(t_n)$, T kontinu

Fungsi likelihood yaitu $L(T/\theta)$ menyatakan probabilitas nilai pengamatan yang dihasilkan sebagai fungsi θ.

Jika T variabel random kontinu dan sampel randomnya memuat nilai-nilai yang terletak dalam interval $t_1 \leq T_1 \leq t_1+\Delta t$, $t_2 \leq T_2 \leq t_2+\Delta t$, ..., $t_n \leq T_n \leq t_n+\Delta t$.

Probabilitas nilai pengamatan sampelnya adalah

$P(t_1 \leq T_1 \leq t_1+\Delta t,\ t_2 \leq T_2 \leq t_2+\Delta t,\ \ldots,\ t_n \leq T_n \leq t_n+\Delta t)$

$= f(t_1)\Delta t \cdot f(t_2)\Delta t \ldots f(t_n)\Delta t$.

$= f(t_1) \cdot f(t_2) \ldots f(t_n)\,(\Delta t)^n$.

$= L(T/\theta)\,(\Delta t)^n$

Fungsi likelihood untuk sampel random kontinu secara umum yaitu :

$$L(T/\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i;\theta) = f(t_1;\theta)\cdot f(t_2;\theta)\cdots f(t_n;\theta) \tag{2.6.1}$$

Prinsip dasar metode maksimum likelihood adalah mencari suatu fungsi dari $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sedemikian hingga jika θ diganti dengan $\hat{\theta}$ ($T_1, T_2, \ldots, T_n$) fungsi likelihood L adalah suatu maksimum, yaitu:

$$L\left[\hat{\theta}(T_1, T_2, \ldots, T_n); (T_1, T_2, \ldots, T_n)\right] \geq L\left[\theta; T_1, T_2, \ldots, T_n\right]$$

untuk setiap $\theta \in \Omega$. Jika statistik $\hat{\theta}$ ($T_1, T_2, \ldots, T_n$) bernilai, maka $\hat{\theta}$ ($T_1, T_2, \ldots, T_n$) merupakan estimasi maksimum likelihood dari θ. Sedangkan estimasi maksimum likelihood dari θ yaitu $\hat{\theta}$ dapat diperoleh dengan mendifferensialkan fungsi likelihood $L(T/\theta)$ sama dengan nol, yaitu :

$$\frac{dL(T/\theta)}{d\theta} = 0$$

Estimator maksimum likelihood $\hat{\theta}$ adalah nilai θ yang memaksimalkan fungsi likelihood $L(T/\theta)$.

Jika terdapat beberapa parameter yang tidak diketahui dalam fungsi distribusi misalnya $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ maka fungsi likelihoodnya

$$L(T/\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \qquad , \qquad n > k$$

Jika $f(t; \theta)$ kontinu maka estimator maksimum likelihood untuk $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$ dapat ditentukan dengan mendifferensialkan parsial pertama fungsi likelihoodnya sama dengan nol, yaitu :

$$\frac{\partial L(T / \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_i} = 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,k$$

Harga-harga $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$ merupakan calon estimator maksimum likelihood yang mungkin, untuk memperoleh estimator θ_1, θ_2, ..., θ_k yang memaksimalkan fungsi likelihood $L(T/\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ harus memenuhi :

$$\left.\frac{\partial^2 L(T / \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_i^2}\right|_{\theta_i = \hat{\theta}_i} < 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,k$$

Karena fungsi logaritma monoton naik pada $[0,\infty]$ yang berarti bahwa $L(T/\theta)$ dan $\ln L(T/\theta)$ akan mempunyai nilai ekstrem yang sama, sehingga akan lebih mudah menggunakan differensial dari logaritma natural, yaitu :

$$\frac{\partial \ln L(T / \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_i} = 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,k$$

yang merupakan persamaan maksimum likelihood.

2.6.2 Untuk data tersensor type II

Definisi 2.6.2.1 :

Data tidak lengkap atau data tersensor type II adalah data waktu hidup yang diperoleh dari suatu pengamatan dimana tidak semua status waktu hidup individu adalah gagal, tetapi ada beberapa individu yang hilang (tidak terdeteksi) atau with drawn dan dimana pengamatan diakhiri saat individu ke-r gagal $(1 \le r \le n)$.

Untuk data yang mengalami penyensoran, estimasi maksimum likelihoodnya (berdasarkan definisi 2.2.7) adalah

$$L(T/\theta) = \frac{n!}{(n-r)!}\prod_{i=1}^{r} f(t_i)\left[S\left(t_{(r)}\right)\right]^{n-r} \tag{2.6.2}$$

Keterangan :

n = total data pengamatan

n – r = jumlah data pengamatan yang tidak teramati

$t_{(r)}$ = data pengamatan ke-r setelah diurutkan

Estimator-estimator maksimum likelihood $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$ diperoleh melalui persamaan

$$\frac{\partial \ln L(T/\theta)}{\partial \theta_i} = 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,k$$