BAB II

PROSES STOKASTIK STASIONER

2.1. Definisi dari Proses Stasioner

Di dalam ilmu statistik dikenal beberapa macam proses salah satunya adalah proses stokastik. Proses stokastik itu sendiri ada yang stasioner dan ada yang tidak stasioner.

Definisi 2.1.1.

Suatu proses stokastik random $\{\pounds_t\}$adalah suatu kumpulan dari variabel-variabel acak bernilai real atau kompleks, yang diberi indeks t, dimana t diambil dari harga-harga dalam suatu himpunan indeks T.

Contoh untuk T antara lain $[0,1]$, $[0,\infty)$, $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ dan lain sebagainya.

Definisi 2.1.2

Sebuah proses stokastik $\{\pounds_t\}$ dikatakan sebagai proses stasioner yang kuat jika distribusi bersama dari $(\pounds_{t_1}, \pounds_{t_2}, \ldots \pounds_{tn})$ sama dengan distribusi bersama dari $(\pounds_{t_1+\gamma}, \pounds_{t_2+\gamma} \ldots \pounds_{tn+\gamma})$. Untuk semua $t_1, t_2, \ldots, tn$ dan $\gamma \in R$, atau dengan kata lain $\pounds_t$ dan $\pounds_{t+\gamma}$ mempunyai distribusi yang sama untuk semua t dan γ $(t, \gamma \in (-\infty, \infty))$

Jika moment tingkat satu ada, ambil $\gamma = -t$, dan oleh karena $\pounds_t$ dan $\pounds_{t+\gamma}$ mempunyai distribusi yang sama untuk semua t dan γ, maka nilai harapan dari $\pounds_t$:

$E[\varepsilon_t] = E[\varepsilon_{t+\gamma}]$

$= E[\varepsilon_{t-t}]$

$= E[\varepsilon_o] = m = \text{konstant}$ 2.1.1

Dan juga, oleh karena stasioner berarti bahwa (ε_t, ε_s) dan ($\varepsilon_{t+\gamma}$, ε_{s+} ε_γ) mempunyai distribusi yang sama untuk semua t, s, γ, dan dipilih γ = -s, maka jika moment tingkat II ada, berlaku :

$E[\varepsilon_t \varepsilon_s] = E[\varepsilon_{t+\gamma}\varepsilon_{s+\gamma}]$

$= E[\varepsilon_{t-s}, \varepsilon_{s-s}]$

$= E[\varepsilon_{t-s}, \varepsilon_o]$

atau $R(t,s) = \text{cov}[\varepsilon_t, \varepsilon_s] = R[t-s]$ = kovariansi dari ε_t dan ε_s.

Jadi fungsi autokovariansi dari proses stasioner bernilai real adalah sebuah fungsi lag γ saja, sehingga $R(\gamma) = \text{cov}[\varepsilon_{t+\gamma}\varepsilon_t] = \text{cov}[\varepsilon_\gamma \varepsilon_o]$ 2.1.2

Definisi 2.1.3 :

Jika suatu proses stokastik memenuhi syarat 2.1.1 dan 2.1.2, maka dikatakan proses itu merupakan suatu proses stasioner yang lemah atau stasioneritas dalam arti luas, atau kadang-kadang disebut sebagai stasioneritas tingkat dua.

2.2. Proses Stasioner Bernilai Kompleks

Diberikan sebuah variabel random kompleks X yang mempunyai bentuk umum $X = U + iV$ dan mempunyai sekawan (konjugate) $\overline{X} = U - iV$, dimana U, V adalah variabel-variabel random bernilai real dan i = bilangan imaginer $= \sqrt{-1}$, maka akan berlaku :

(i) $|X|^2 = X \cdot \overline{X}$

$$= (U + iV)(U - iV)$$

$$= U^2 - i^2 V^2$$

$$= U^2 - (-1)^2 V^2$$

$$= U^2 + V^2$$

(ii) $E[X] = E[U] + i\,E[V]$, dan

(iii) $E[|X|^2] = E[U^2 + V^2]$

Diberikan pula sebuah proses stokastik bernilai komplex $\{£_t\}$ yang terbentuk dari dua proses stokastik bernilai real $\{U_t\}$ dan $\{V_t\}$ sedemikian sehingga $£_t = U_t + i\,V_t$.

Definisi 2.2.1.

Proses stokastik $\{£_t\}$, dikatakan sebagai proses stasioner kompleks yang kuat jika distribusi-distribusi dimensional terbatas dari vektor-vektor $(U_{t_1}, U_{t_2}, \ldots, U_{tn}, V_{t_1}, \ldots, V_{tn})$ untuk semua $t_1, t_2, \ldots, tn$ yang mungkin, tetap tidak berubah dibawah pergantian waktu, tepat seperti dalam kejadian proses bernilai real.

Definisi 2.2.2. :

Proses stokastik $\{\pounds_t\}$ dikatakan sebagai proses stokastik bernilai kompleks yang lemah, jika :

a. Rata-ratanya adalah sebuah konstanta (bilangan kompleks yang bagian imaginernya = 0), misal = m

b. Autokovariansinya adalah fungsi dari lag (selang waktu) k.

Ditulis : $R_k = \text{Cov}(\pounds_{t+k}, \pounds_t)$

$$= E\left\{[\pounds_{t+k} - E[\pounds_{t+k}]]\,\overline{[\pounds_t - [\pounds_t]]}\right\}$$

$$= E\left[\pounds_{t+k} - m\right]\overline{\left[\pounds_t - m\right]}$$

$$= E\left[\pounds_{t+k}.\overline{\pounds_t} - \pounds_{t+k}.m - \overline{\pounds_t}.m + m^2\right]$$

$$= E\left[\pounds_{t+k}.\overline{\pounds_t}\right] - E\left[\pounds_{t+k}.m\right] - E\left[\overline{\pounds_t}.m\right] + E\left[m^2\right]$$

$$= E\left[\pounds_{t+k}.\overline{\pounds_t}\right] - mE\left[\pounds_{t+k}\right] - mE\left[\overline{\pounds_t}\right] + |m^2|$$

$$= E\left[\pounds_{t+k}.\overline{\pounds_t}\right] - |m.m| - |m.m| - |m|^2$$

Sehingga :

$$R_k = \text{Cov}(\pounds_{t+k}, \pounds_t)$$

$$= E\left[\pounds_{t+k}.\overline{\pounds_t}\right] - |m|^2$$

Difinisi 2.2.3.

White noise adalah barisan variabel acak $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots$ yang masing-masing tidak berkorelasi, dimana $\varepsilon_t \sim (0, \sigma_\varepsilon^2)$. ε_t berdistribusi normal.

Autokovarian lag k white noise adalah :

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = E\{[\varepsilon_t - E[\varepsilon_t]][\varepsilon_{t+k} - 0]\}$$

$$= E[(\varepsilon_t - 0)[\varepsilon_{t+k} - 0]]$$

$$= E[\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t+k}]$$

untuk $k = 0 \Rightarrow \mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = \mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+0})$

$$= E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+0})$$

$$= \sigma_\varepsilon^2$$

untuk $k \neq 0 \Rightarrow \mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = E[\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}]$

$$= 0$$

karena nilai-nilai dari white noise bersifat acak dan suatu nilai white noise tidak berkorelasi dengan nilai white noise sesudah dan sebelumnya.

Dari definisi 2.2.3 terlihat bahwa E $[\varepsilon_t] = 0$ = konstanta dan fungsi autokovariansi dari white noise adalah fungsi dari lag k. sehingga dapat dikatakan bahwa white noise adalah stasioner lemah.

2.3. Ukuran Spektral dan Distribusi Spektral

Ukuran spektral random yang dinyatakan dengan ξ (Λ) adalah sebuah satuan matematika yang mempunyai sifat-sifat yang hampir sama dengan ukuran tak random di dalam peranannya sebagai ukuran probabilitas, hanya saja $\xi(\Lambda)$ ditekankan pada himpunan-himpunan acak dan bernilai kompleks.

Sehingga pada tulisan ini ukuran spektral dipandang sebagai ukuran probabilitas. Perlu diketahui bahwa $\xi(\Lambda)$ adalah suatu fungsi, dengan daerah asal bilangan-bilangan real dan daerah hasilnya bilangan kompleks.

Definisi 2.3.1. :

Ukuran-ukuran spektral random $\xi(\Lambda_1)$ dan $\xi(\Lambda_2)$ adalah tidak saling berkorelasi atau orthogonal, jika Λ_1 dan Λ_2 adalah saling bebas($\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$)

Fungsi distribusi spektral di dalam tulisan ini disimbolkan dengan F (Λ) atau F (λ) dan kadang-kadang sering disebut juga dengan "Spektrum". Fungsi distribusi spektral F(Λ) bisa juga diinterpretasikan sebagai puncak dari daya atau variansi digabungkan dengan pita spektral Λ, dimana Λ adalah sebuah subset dari $(-\pi,\pi)$.

Sebagaimana pada kasus dengan distribusi-distribusi probabilitas, sebuah fungsi distribusi spektral mungkin mempunyai densitas spektral sedemikian sehingga :

$$F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega)\, d\omega, \text{ dimana } f(\lambda) = F'(\lambda) \text{ dan } -\pi \leq \lambda \leq \pi$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\, d\lambda$$

Menurut Benjamin Kedem (Time Series Analysis by Higher Order Crossings, halaman 3.95-3.96) maka dalam tulisan ini $f(\lambda)d\lambda = F(d\lambda)$

oleh karena $\dfrac{dF(\lambda)}{d\lambda} = f(\lambda)$, maka $dF(\lambda) = f(\lambda)d\lambda$

padahal $f(\lambda)d\lambda = F(d\lambda)$, sehingga pada tulisan ini $dF(\lambda) = F(d\lambda)$