BAB II

KONSEP DASAR

2.1 Vektor dan Matriks

Definisi 1.

Suatu matrik a dikatakan sebuah vektor kolom jika matrik tersebut terdiri dari satu kolom.

Notasi : $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ adalah vektor berukuran m x 1

Transpose dari vektor a (dinotasikan a') adalah berbentuk matriks berukuran 1 x m yang dinamakan vektor baris.

Notasi : $a' = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix}$

Vektor a' dapat ditulis dalam bentuk $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix}$

Definisi 2.

Suatu matrik $A = (a_{ij})$, dengan $i = 1,2,...,m$ dan $j = 1,2,...,n$ berukuran (m x n). Transpose dari A bernotasi A' adalah berukuran (n x m) yang didapat dari matrik A yang menuliskan baris ke-i dari matrik A sebagai kolom ke-i dari A', atau dapat ditulis $A = (a_{ji})$. Beberapa sifat dari matriks transpose :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

1. $(A+B)' = A'+B'$

2. $(A')' = A$

3. $c(A') = (cA)'$, c adalah skalar sembarang

4. $(AB)' = B'A'$

Definisi 3.

A suatu matrik bujur sangkar berukuran (n x n). Trace dari matrik A ditulis tr(A) adalah jumlah elemen-elemen pada diagonal utama. Bila A dan B suatu matrik bujur sangkar berukuran (n x n), h adalah vektor berukuran (n x 1) dan c adalah suatu skalar, maka

1. $tr(cA) = ctr(A)$

2. $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$

3. $tr(AB) = tr(BA)$

4. $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$

5. $tr(A) = tr(h'Ah) = tr(Ah'h)$

Definisi 4.

Misalkan A matriks simetris berukuran (n x n) dan h vektor berukuran (n x 1). Matriks A dikatakan definit positif jika h'Ah > 0 untuk semua h tidak sama dengan nol.

Definisi 5

Suatu matriks bujur sangkar A disebut singular apabila $\det(A) = 0$ apabila $\det(A) \neq 0$ maka disebut matriks non singular. Matriks yang non singular mempunyai invers, sedangkan matriks singular tidak mempunyai invers. Sifat-sifat determinan dari suatu matriks A berukuran (n x n) adalah :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

1. Untuk matriks definit positif A

$$|A| > 0$$

2. Untuk matriks bujur sangkar A dan B berukuran (n x n)

$$|AB| = |A||B|$$

3. Untuk matriks non singular

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

4. Untuk c skalar sebarang

$$|cA| = c|A|$$

2.2 Diskripsi Data Multivariat

Di dalam pengendali kualitas statistik univariat, secara umum kita menggunakan distribusi normal untuk menggambarkan karakteristik kualitas yang kontinu. Fungsi densitas probabilitas normal adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Rata-rata distribusi normal adalah μ dan variannya adalah σ^2. Dengan catatan eksponen dari distribusi normal dapat dituliskan sebagai :

$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = (x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu) \qquad (2.1)$$

merupakan besaran yang menunjukkan ukuran standar kuadrat jarak dari x ke rata-rata μ, dimana dengan istilah terstandar dimaksudkan bahwa jarak adalah ekspresi dalam unit standar deviasi. Fungsi densitas normal dengan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

mean μ dan variansi σ^2 ditulis dengan notasi N(μ,σ^2). Notasi ini dapat diperluas untuk kasus multivariat.

Pendekatan dalam kasus multivariat akan ditunjukkan sebagai berikut. Dipunyai p variabel, diberikan dengan $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Susunan variabel ini dalam p-vektor komponen $\mathbf{X}' = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Dengan $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p)$ merupakan vektor rata-rata dari x, kemudian varian dan kovarian dari variabel random dalam $\mathbf{X}$ dituliskan dalam sebuah matrik kovarian $\boldsymbol{\Sigma}$ berukuran $p \times p$. Kuantitas pada kasus univariat diperluas untuk vektor $\mathbf{X}$ dengan dimensi p menjadi

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \qquad (2.2)$$

dengan $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X})$

$\boldsymbol{\Sigma} = Kov(\mathbf{X})$

$\boldsymbol{\Sigma}$ dianggap definit positif

Persamaan (2.2) diatas merupakan jarak antara x dan μ untuk multivariat.

Fungsi densitas normal multivariat adalah perolehan yang sederhana dengan mengganti tempat ukuran terstandar jarak dari persamaan (2.1) dengan jarak multivariat secara umum dalam persamaan (2.2) dan mengganti istilah konstan $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ ke bentuk umum yang membuat suatu daerah dibawah fungsi densitas probabilitas yang tanpa menghiraukan harga p. Dengan kata lain supaya volume di bawah luasan

$$e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)' \Sigma^{-1} (X-\mu)}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

sama dengan satu maka diperlukan konstan $(2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}$.

Oleh karena itu digambarkan fungsi densitas probabilitas normal multivariat p dimensi adalah sebagai berikut

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)}$$

dengan $-\infty < x_j < \infty$, j = 1,2,...,p

diberi notasi $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

Suatu distribusi normal multivariat untuk variat p = 2 disebut suatu normal bivariat.

2.3 Vektor Rata-Rata Sampel dan Matrik Kovarian

Diberikan suatu sampel random dari suatu populasi normal multivariat yang disajikan dalam suatu bentuk matrik $\mathbf{X}$. Matrik $\mathbf{X}$ ini memuat x_{ij} yang menunjukkan harga tertentu pada variabel ke-i dan pengamatan ke-j. Dengan i=1,2,...p dan j=1,2,...n, matrik tersebut disajikan sebagai berikut :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_{11}, x_{12}, \cdots x_{1n}$ adalah pengukuran pada variabel 1. Rata-rata pengukuran yang juga disebut rata-rata (mean) sampel ditulis dengan $\bar{x}_1$ adalah

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\overline{x_1} = \frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n} x_{1j}$$

Secara umum adalah mean sampel ke-i bila ada p variabel dan n pengukuran adalah

$$\overline{x_i} = \frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n} x_{ij} \qquad i = 1,2,\ldots,p$$

Variansi sampel untuk variabel ke i adalah

$$S_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - \overline{x}_i\right)^2 \quad i = 1,2,\ldots,p$$

dan kovarian sampel adalah

$$S_{ik} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - \overline{x}_i\right)\left(x_{kj} - \overline{x}_k\right)$$

Sehingga didapat vektor rata-rata sampel adalah

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_p \end{bmatrix}$$

matrik variansi dan kovarian sampel adalah

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix}$$

Dapat ditunjukkan bahwa vektor rata-rata sampel dan matrik kovarian sampel merupakan estimasi tak bias dari suatu populasi, sehingga didapat $\mathrm{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$ dan $\mathrm{E}(\mathbf{S}) = \boldsymbol{\Sigma}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Theorema :

$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}n$ adalah sampel random dari distribusi normal multivariat dengan mean μ dan kovarian Σ. Bila $\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j$ dan $\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{X}_j - \overline{\mathbf{X}}_j)(\mathbf{X}_j - \overline{\mathbf{X}}_j)'$ adalah penduga likelihood maksimum dari μ dan Σ maka :

$E(\overline{\mathbf{X}}) = \mu$ dan $E(\mathbf{S}) = \Sigma$

Bukti :

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j$$

$$= \frac{1}{n}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_n)$$

$$E(\overline{\mathbf{X}}) = E\left(\frac{1}{n}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n}E(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_n)$$

$$= \frac{1}{n}(\mu + \mu + \ldots + \mu)$$

$$E(\overline{\mathbf{X}}) = \boldsymbol{\mu}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{X}_j - \overline{\mathbf{X}}_j)(\mathbf{X}_j - \overline{\mathbf{X}}_j)'$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{X}_j - \overline{\mathbf{X}}_j)\mathbf{X}_j' + \sum_{j=11}^{n}(\mathbf{X}_j - \overline{\mathbf{X}}_j)(-\overline{\mathbf{X}})'\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j\mathbf{X}_j' - n\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{X}}'\right]$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$E(\mathbf{S}) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j\mathbf{X}_j' - n\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{X}}'\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n}E(\mathbf{X}_j\mathbf{X}_j') - nE(\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{X}}')\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\Sigma + \mu\mu'\right) - n\left(\frac{1}{n}\Sigma + \mu\mu'\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[n\Sigma + n\mu\mu' - \Sigma - n\mu\mu'\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[(n-1)\Sigma\right]$$

$$E(\mathbf{S}) = \mathbf{\Sigma}$$

2.4. Pengendalian Kualitas Multivariat

Masalah pengendalian kualitas dengan beberapa variat dinamakan pengendalian kualitas multivariat. Subyek tersebut saat ini sangat penting karena prosedur pemeriksaan otomatis membuatnya relatif mudah untuk mengukur banyak parameter pada tiap unit produk yang dihasilkan.

Misalkan ada dua karakteristik kualitas x_1 dan x_2 berdistribusi bersama menurut distribusi normal bivariat. Misalkan $\overline{\overline{x}}_1$ dan $\overline{\overline{x}}_2$ nilai mean nominal karakteristik kualitas itu, dan misalkan variansi x_1 dan x_2 masing-masing ditaksir dengan variansi sampel S_{11} dan S_{22}. Kovariansi antara x_1 dan x_2 adalah ukuran dependensi antara dua karakteristik kualitas itu, dan ditulis sebagai S_{12}. Jika $\overline{x}_1$ dan $\overline{x}_2$ mean sampel kedua

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

karakteristik kualitas yang dihitung dari himpunan bagian berukuran n, maka statistik

$$T^2 = \frac{n}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}\left[S_{22}(\bar{x}_1 - \bar{\bar{x}}_1)^2 + S_{11}(\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2)^2 - 2S_{12}(\bar{x}_1 - \bar{\bar{x}}_1)(\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2)\right]$$

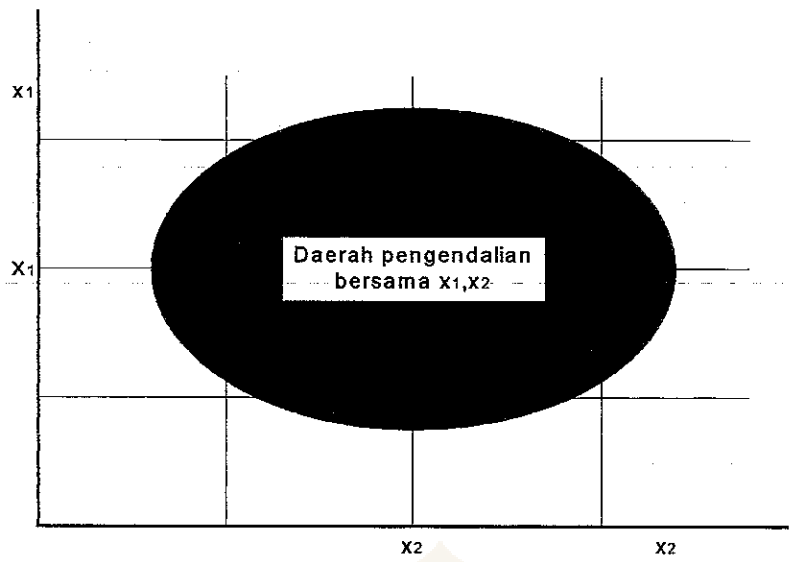
(2.1)

mempunyai distribusi mengikuti distribusi Hotelling dengan derajat bebas 2 dan (n-1).

Jika $T^2 > T^2_{\alpha;2;n-1}$, maka paling sedikit satu dari karakteristik kualitas itu tak terkendali; dengan $T_{\alpha;2;n-1}$ adalah titik persentasi α atas distribusi T^2 dengan derajat bebas 2 dan (n-1).

Prosedur pengendalian dapat dilakukan dengan grafik. Dilihat keadaan dengan $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ independen, yakni $S_{12} = 0$. Jika $S_{12} = 0$, persamaan (2.1) mendefinisikan ellips berpusat $(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2)$ dengan sumbu utama sejajar dengan sumbu-sumbu $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.1.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

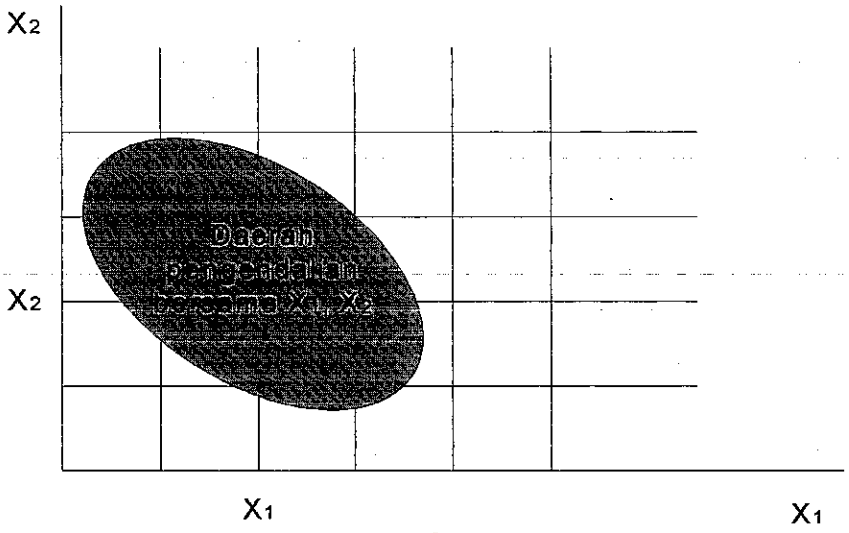


Gambar 2.1. Pengendali Ellips dengan kov = 0

Dengan mengambil T^2 dalam (2.1) sama dengan $T_{\alpha;2;n-1}$ berarti bahwa sepasang mean sampel yang diamati $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ jatuh di dalam ellips menunjukkan keadaan terkendali statistik, sedangkan sepasang mean sampel yang diamati jatuh diluar ellips menunjukkan proses tak terkendali. Sehingga gambar diatas sering kali dinamakan ellips pengendali.

Daerah pengendali bersama bagi $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ atau untuk dua karakteristik kualitas yang dependen dengan kata lain jika $S_{12} \neq 0$ akan digambarkan berbeda dari gambar sebelumnya. Ellips pengendali untuk dua karakteristik kualitas dependen akan terlihat sumbu utama ellips itu tidak lagi sejajar dengan sumbu $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$. Hal ini akan ditunjukkan dalam Gambar 2.2.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)



Gambar 2.2. Pengendali Ellips dengan Kov ≠ 0

Apabila keadaan dengan p karakteristik kualitas yang berhubungan yang dikendalikan bersama-sama. Dianggap bahwa distribusi probabilitas bersama p karakteristik kualitas itu adalah distribusi normal p-variat. Prosedur itu memerlukan penghitungan mean sampel bagi masing-masing p karakteristik kualitas dari sampel berukuran n. Himpunan mean karakteristik kualitas ini disajikan dengan vektor px1.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \dots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix}$$

Statistik penguji yang digambarkan pada grafik pengendali bagi masing-masing sampel adalah

$$T^2 = n(\bar{x} - \bar{\bar{x}})' S^{-1} (\bar{x} - \bar{\bar{x}})$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dengan $\bar{\bar{x}} = \left[\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \ldots, \bar{\bar{x}}_p\right]$ adalah vektor nilai nominal bagi setiap karakteristik kualitas dan S adalah matrik kovariansi p karakteristik kualitas $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Grafik pengendali mempunyai batas pengendali atas $T_{\alpha;p;a-1}$. Diperoleh titik persentase T^2 dari titik persentase distribusi F melalui hubungan

$$T^2_{\alpha;p;n-1} = \frac{p(n-1)}{n-p} F_{\alpha,p,n-p}$$

dengan α = tingkat kesalahan

p = banyaknya variat

n = banyaknya pengukuran atau pengamatan

F = tabel distribusi F

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)