BAB II

KONSEP DASAR

2.1. Dasar – dasar Rancangan Percobaan

Percobaan adalah penyelidikan yang direncanakan untuk memperoleh fakta yang baru atau untuk mendukung atau menyangkal hasil percobaan yang telah dilakukan oleh peneliti lain. (Sugandi dan Sugiarto, 1994)

Rancangan percobaan adalah langkah – langkah yang perlu diambil sebelum percobaan dilakukan supaya data yang semestinya diperlukan dapat diperoleh sehingga akan membawa kepada kesimpulan yang berlaku untuk persoalan yang sedang dibahas. Rancangan percobaan bertujuan untuk memperoleh atau mengumpulkan informasi sebanyak – banyaknya yang diperlukan dan berguna dalam melakukan penelitian persoalan yang akan dibahas. Penelitian hendaknya dilakukan seefisien mungkin mengingat waktu, biaya, tenaga, dan bahan yang harus digunakan. (Sudjana, 1994)

Satuan percobaan adalah satuan bahan tempat diterapkannya satu perlakuan dan perlakuan adalah prosedur yang pengaruhnya hendak diukur dan dibandingkan dengan perlakuan lain. (Steel dan Torrie, 1991) Galat ialah kesalahan – kesalahan yang disebabkan karena :

a) Adanya variasi dari materi percobaan yang seharusnya homogen tetapi kehomogenan sulit diperoleh peneliti.
b) Adanya kesalahan – kesalahan observasi.

(Sandra Widasari, 1988)

Prinsip dasar dalam rancangan percobaan ada tiga yaitu ulangan, pengacakan, dan kontrol lokal. (Sudjana, 1994)

1) Ulangan adalah frekuensi suatu perlakuan yang diselidiki dalam suatu percobaan. Ulangan ini berfungsi untuk menghasilkan suatu estimasi tentang galat dan menghasilkan ukuran pengaruh perlakuan – perlakuan yang lebih tepat terhadap hasil percobaan. (Kemas Ali Hanafiah, 1997)
2) Pengacakan dilakukan karena menyebabkan asumsi tentang independen dipenuhi sehingga dapat melakukan pengujian misalnya tes signifikansi dan menyebabkan pula memungkinkannya data dianalisis. (Sudjana, 1994)
3) Kontrol lokal biasanya merupakan langkah – langkah atau usaha – usaha yang berbentuk pengelompokan dan pemblokan. Pengelompokan adalah penempatan sekumpulan unit percobaan yang homogen ke dalam kelompok – kelompok supaya kelompok yang berbeda memungkinkan untuk mendapatkan perlakuan yang berbeda pula. Pemblokan berarti pengalokasian unit – unit percobaan ke dalam blok sedemikian sehingga unit – unit dalam blok secara relatif bersifat homogen. (Sudjana, 1994)

2.2. Variabel Random dan Sampel Random

Definisi 1. Variabel Random. Variabel random ialah suatu fungsi yang mengaitkan suatu bilangan riil pada setiap unsur dalam ruang sampel. (Walpole dan Myers, 1995)

Definisi 2. Sampel Random. Misalkan X sebuah variabel random dengan distribusi peluang f(x). Kemudian himpunan n observasi $X_1, X_2, \dots, X_n$ diambil pada variabel random X dan mempunyai hasil $x_1, x_2, \dots, x_n$ disebut sampel random jika observasi diperoleh dengan mengamati X secara bebas dengan kondisi yang tidak berubah untuk n kali. (Montgomery dan Hines, 1990)

2.3. Rataan

Rataan Variabel random X biasa disebut nilai harapan variabel random, dinyatakan dengan E(X) , dan ditulis sebagai μ_x atau cuma μ bila jelas variabel mana yang dimaksudkan. (Walpole dan Myers, 1995)

Definisi 3. Rataan. Misalkan X suatu variabel random dengan distribusi peluang f(x). Rataan atau nilai harapan X ialah :

$$\mu = E(X) = \sum_x x\, f(x)$$

bila X diskret, dan

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

bila X kontinu

(Walpole dan Myers, 1995)

Teorema 1. Bila a dan b tetapan, maka E(aX + b) = a E(X) + b

Bukti :

Menurut definisi 3 :

$$E\,(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)\, f(x)\, dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

Integral pertama di sebelah kanan adalah E(X) dan integral kedua sama dengan 1.

Jadi, diperoleh $E(aX + b) = aE(X) + b$ (Walpole dan Myers, 1995)

2.4. Variansi

Variansi variabel random X dinyatakan dengan Var(X) , dan ditulis sebagai σ^2_X atau cuma σ^2 bila jelas variabel mana yang dimaksudkan.

Definisi 4. Variansi. Misalkan X variabel random dengan distribusi peluang f(x) dan rataan μ.

Variansi X adalah :

$$\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

bila X diskret, dan

$$\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$$

bila X kontinu.

(Walpole dan Myers, 1995)

Teorema 2. Bila a dan b tetapan, maka :

$$\mathrm{Var}(aX + b) = \sigma^2_{aX+b} = a^2\sigma^2_x = a^2\sigma^2$$

Bukti :

Menurut definisi 4 , maka :

$$\sigma^2_{aX+b} = E\{ [(aX+b) - \mu_{aX+b}]^2 \}$$

Menurut teorema 1, maka :

$$\mu_{aX+b} = E(aX + b) = a\mu + b$$

Jadi,

$$\sigma^2_{aX+b} = E[(aX + b - a\mu - b)^2]$$
$$= a^2 \; E[(X - \mu)^2]$$
$$= a^2\sigma^2$$

Akibat Bila b = 0 maka $\sigma^2_{aX} = a^2\sigma^2_X = a^2\sigma^2$

(Walpole dan Myers, 1995)

2.5.Distribusi F

Teorema 3. U adalah variabel random khi – kuadrat dengan derajat kebebasan m, V adalah variabel random khi – kuadrat dengan derajat kebebasan n. Jika U dan V independen maka variabel random :

$$X = (U/m) / (V/n)$$

berdistribusi F dengan derajat kebebasan m dan n.

(Mood, Graybill, Boes, 1974)

Bukti :

Dapat dilihat pada : Mood, Graybill, Boes, Introduction to the Theory of Statistics, 1974 halaman 246

Akibat. Jika $x_1, \ldots, x_{m+1}$ sampel random berukuran m+1 dari populasi normal dengan rataan μ_x dan variansi σ^2, jika $y_1, \ldots, y_{n+1}$ sampel random berukuran n+1 dari populasi normal dengan rataan μ_y dan variansi σ^2, dan jika kedua sampel random tersebut independen, maka $(1/\sigma^2) \sum_{1}^{m+1} (x_i - \bar{x})^2$ berdistribusi khi – kuadrat dengan derajat kebebasan m dan $(1/\sigma^2)\sum_{1}^{n+1}(y_j-\bar{y})^2$ berdistribusi khi – kuadrat dengan derajat kebebasan n, sehingga statistik :

$$\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2/m}{\sum (y_j-\bar{y})^2/n}$$

berdistribusi F dengan derajat kebebasan m dan n.

(Mood, Graybill, Boes, 1974)

Teorema 4. Jika $f_\alpha(v_1,v_2)$ untuk f dengan derajat kebebasan v_1 dan v_2, maka :

$$f_{1-\alpha}(v_1,v_2) = 1/(f_\alpha(v_2,v_1))$$

(Walpole dan Myers, 1995)

2.6. Model Regresi Linier Berganda

Sebuah model regresi yang mencakup lebih dari satu variabel bebas dengan koefisien - koefisiennya (nilai β) yang tidak diketahui disebut model regresi linier berganda, disebut linier karena model regresi yang linier dalam koefisien - koefisiennya (nilai β) adalah sebuah model regresi linier. (Montgomery dan Hines, 1990)

Model tersebut :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

disebut sebuah model regresi linier berganda dengan k variabel bebas. Diasumsikan bahwa ε dalam model tersebut berdistribusi normal dengan $E(\varepsilon) = 0$, $V(\varepsilon) = \sigma^2$ dan $\{\varepsilon_i\}$

adalah variabel – variabel random yang tidak berhubungan. (Montgomery dan Hines, 1990)

Sebagai contoh, misalkan bahwa daya tahan efektif sebuah alat pemotong tergantung pada kecepatan memotong dan bentuk alat tersebut. Sebuah model regresi linier berganda dapat menerangkan hubungan tersebut, yaitu :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$$

Persamaan di atas adalah sebuah model regresi linier berganda dengan dua variabel bebas dan merupakan fungsi linier dengan koefisien β_0 , β_1 , dan β_2 yang tidak diketahui, y menyatakan daya tahan efektif alat tersebut, x_1 menyatakan kecepatan memotong, dan x_2 menyatakan bentuk alat tersebut.

Dalam susunan percobaan, regresi linier berganda dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$y = X\beta + \varepsilon$$

dimana :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & . & . & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & . & . & x_{2k} \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ 1 & x_{n1} & . & . & x_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ . \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \\ \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Pada umumnya , y adalah sebuah vektor (nx1) dari pengamatan atau percobaan, X adalah sebuah matriks (nxp) dari variabel – variabel bebas, β adalah sebuah vektor (px1) dari koefisien – koefisien regresi, dan ε adalah sebuah vektor (nx1) dari galat random.

(n = banyaknya pengamatan atau percobaan dan p = banyaknya koefisien β)

Metode kuadrat terkecil dengan menggunakan matriks dapat digunakan untuk mencari estimator koefisien regresi dalam model regresi linier berganda.

Fungsi kuadrat terkecil adalah :

$$L = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2_i$$

$$= \varepsilon'\varepsilon$$

$$= (y - X\beta)'(y - X\beta)$$

$$= y'y - \beta'X'y - y'X\beta + \beta'X'X\beta$$

$$= y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta$$

karena $\beta'X'y$ adalah sebuah matriks (1x 1) atau sebuah matriks skalar sehingga

$$(\beta'X'y)' = y'X\beta$$

Estimator – estimator kuadrat terkecil harus memenuhi :

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{b} = -2X'y + 2X'Xb = 0$$

$$X'y = X'Xb$$

Maka estimator kuadrat terkecil untuk β adalah :

$$b = (X'X)^{-1}X'y$$

dan perkiraan model regresi tersebut adalah :

$$\hat{y} = X b$$

(Montgomery dan Hines, 1990)

Analisis variansi dihasilkan dari pembagian total variabilitas data ke dalam bagian – bagian tertentu. (Montgomery dan Hines, 1990)

Secara simbolik dapat ditulis sebagai berikut :

JKT = JKR + JKG

JKR (Jumlah Kuadrat Regresi) = $\sum_{u=1}^{n} (\hat{y}_u - \bar{y})^2 = b'X'y - n\bar{y}^2$

JKG (Jumlah Kuadrat Galat) = $\sum_{u=1}^{n} (y_u - \hat{y}_u)^2 = y'y - b'X'y$

JKT (Jumlah Kuadrat total) = JKR + JKG = $\sum_{u=1}^{n} (y_u - \bar{y})^2 = y'y - n\bar{y}^2$

dimana :

y_u = respon yang diamati pada percobaan ke-u,

$\hat{y}_u$ = respon yang diharapkan pada percobaan ke-u, dan

$\bar{y}$ = rata - rata respon yang diamati pada percobaan.

Masing – masing Jumlah Kuadrat mempunyai derajat kebebasan. JKT mempunyai derajat kebebasan n-1, JKR mempunyai derajat kebebasan p-1, dan JKG mempunyai derajat kebebasan n-p. Rata-rata Jumlah Kuadrat masing-masing sumber variansi didapat dari Jumlah Kuadrat dibagi dengan masing - masing derajat kebebasannya. Analisis Variansi ini biasanya disajikan dalam bentuk tabel.

Tabel analisis variansi untuk model regresi linier berganda :

Sumber Variansi	Derajat Kebebasan	Jumlah Kuadrat	Rata - rata Kuadrat
Regresi	p - 1	JKR	RKR = JKR / (p - 1)
Galat	n - p	JKG	RKG = JKG / (n - p)
Total	n - 1	JKT	

Dimana : p = banyaknya koefisien β, dan

n = banyaknya pengamatan atau percobaan

(Montgomery dan Hines, 1990)

Nilai harapan dari RKG adalah σ^2 , maka estimator σ^2 yang biasa disebut s^2 adalah RKG. (Montgomery dan Hines, 1990)

Pengujian untuk menentukan apakah ada sebuah hubungan antara variabel tidak bebas y dan variabel bebas $x_1, x_2, \ldots ,x_k$. Hipotesisnya adalah :

H_0 : $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$

H_1 : $\beta_j \neq 0$ untuk paling sedikit satu j

Menggunakan statistik uji :

$$F_{hitung} = RKR \ / RKG$$

dimana : RKR = Rata-rata Kuadrat Regresi, dan

RKG = Rata-rata Kuadrat Galat.

Menggunakan distribusi F karena diasumsikan $\varepsilon_u \sim$ iid N ($0,\sigma^2$) dan $y_u \sim$ iid N (η_u,σ^2) maka JKG ~ khi – kuadrat dengan derajat kebebasan n-p dan JKR ~ khi – kuadrat dengan derajat kebebasan p – 1, akibatnya :

$$(JKR/(p-1)) / (JKG/(n-p)) = RKR / RKG \sim F_{p-1,n-p}$$

F_{hitung} ini kemudian dibandingkan dengan nilai F pada tabel dengan derajat kebebasan p-1 dan n-p. Jika $F_{hitung} > F_{tabel}$ maka menolak hipotesis nol. (Montgomery dan Hines, 1990)

2.7. Regresi Polinomial

Model linier $y = X\beta + \varepsilon$ adalah sebuah model umum yang dapat digunakan untuk mencocokkan beberapa hubungan linier dengan koefisien β yang tidak diketahui.

Model regresi polinomial termasuk dalam model regresi linier, misalnya :

model regresi polinomial berderajat dua pada satu variabel :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_{11} x^2 + \varepsilon$$

dan model regresi polinomial berderajat dua pada dua variabel :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$

(Montgomery dan Hines, 1990)

2.8. Interval Konfidensi

Sebuah perkiraan tunggal kadang-kadang tidak memberikan cukup penjelasan tentang parameter. Untuk membuat interval konfidensi, harus ditentukan dulu dua statistik L dan U, sehingga interval yang dihasilkan : $L \leq \theta \leq U$

Interval konfidensi 100 (1-α) persen untuk parameter θ yang tidak diketahui adalah :

$$P\{ L \leq \theta \leq U \} = 1-\alpha$$

L dan U disebut batas keyakinan bawah dan atas, dan 1-α disebut koefisien konfidensi.

(Montgomery dan Hines, 1990)

2.9. Uji Liliefors

Uji Liliefors adalah salah satu uji yang digunakan untuk menguji kenormalan dengan prosedur sebagai berikut :

a) Pengamatan $x_1, x_2, \ldots, x_3$ dijadikan bilangan baku $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dengan menggunakan rumus $z_i = (x_i - \bar{x}) / s$

b) Untuk tiap bilangan baku ini dan menggunakan daftar distribusi normal baku, kemudian dihitung peluang $F(z_i) = P (z \leq z_i)$

c) Selanjutnya dihitung proporsi $z_1, z_2, \ldots, z_n$ yang lebih kecil atau sama dengan z_i. Jika proporsi ini dinyatakan oleh $S(z_i)$, maka $S(z_i)$ = (banyaknya $z_1, z_2, \ldots, z_n$ yang $\leq z_i$)/ n

d) Mengitung selisih $F(z_i) - S(z_i)$ kemudian ditentukan harga mutlaknya.

e) Mengambil harga yang paling besar diantara harga – harga mutlak selisih tersebut dan disebut L_0 .

H_0 ditolak bila L_0 lebih dari nilai kritis L untuk uji Liliefors.

(Sudjana,1996)