

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Rancangan Block Tidak Lengkap Seimbang merupakan suatu persoalan yang cukup terkenal dalam analisa kombinatorik, yang secara umum mempunyai definisi sebagai penyusunan v objek yang berbeda kedalam b block sedemikian sehingga setiap block memuat tepat k objek yang berbeda, setiap objek terdapat didalam tepat r block yang berbeda, dan semua pasangan objek a_i, a_j yang berbeda terdapat didalam tepat λ block.

Aplikasi dari teori Rancangan Block Tidak Lengkap Seimbang cukup banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, terutama dalam proses pengkombinasian sejumlah objek tertentu untuk mendapatkan hasil kombinasi yang sesuai dengan spesifikasi yang diinginkan oleh pelaku. Berikut diberikan dua ilustrasi tentang aplikasi dari teori ini.

Pada tahun 1847, Thomas P. Kirkman mengajukan suatu masalah yang dikenal sebagai *Kirkman's Schoolgirl Problem* dalam suatu artikel yang muncul pada *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. Isi dari persoalan tersebut adalah sebagai berikut. Seorang guru akan mengajak 15 orang siswinya untuk berjalan-jalan. Siswi-siswi tersebut akan diatur dalam 5 baris dengan masing-masing baris terdiri atas 3 orang, sehingga setiap orang mempunyai 2 teman dalam satu baris. Akan dibuat suatu rancangan perjalanan selama 7 hari berturut-

turut sedemikian sehingga tidak ada siswi yang berjalan dengan setiap temannya yang lain dalam suatu baris lebih dari satu kali.

Ilustrasi kedua dinyatakan sebagai berikut. Suatu perusahaan kopi merencanakan untuk membandingkan 9 jenis kopi yang diproduksinya dengan memberikan kesembilan jenis kopi tersebut kepada 12 rumah tangga. Pada masing-masing rumah akan diberikan 3 jenis kopi yang berbeda. Akan dibuat suatu rancangan sedemikian sehingga setiap pasangan yang berbeda dari kesembilan jenis kopi tersebut hanya dibandingkan oleh tepat satu rumah tangga.

Kedua ilustrasi di atas pada dasarnya menggambarkan tentang persoalan merancang suatu Sistem Triple Steiner, yang merupakan bentuk khusus dari suatu Rancangan Block Tidak Lengkap Seimbang, dengan spesifikasi tertentu pada nilai-nilai dari parameternya.

Sistem triple Steiner merupakan suatu bentuk khusus dari Rancangan Block Tidak Lengkap Seimbang dengan nilai dari parameter $k = 3$ dan $\lambda = 1$. Eksistensi sistem triple steiner ini telah dibuktikan oleh Reiss pada tahun 1859, yang merupakan jawaban atas problem tentang itu yang diajukan oleh Steiner sejak tahun 1853, dan diuraikan dalam suatu makalah yang muncul dalam *Crelle's Journal*.

Karena mempunyai manfaat yang cukup besar dalam aktifitas pendistribusian sejumlah objek kedalam sejumlah block dengan suatu keseragaman tertentu untuk memperoleh hasil distribusi dengan spesifikasi parameter yang telah ditentukan maka Rancangan Block Tidak lengkap Seimbang merupakan teori yang cukup penting dan menarik untuk dipelajari.

1.2. Permasalahan

Lingkup permasalahan yang akan dibahas adalah mengenai teori umum dari Rancangan Block Tidak Lengkap Seimbang (terdiri dari definisi umum RBTLS, matriks incidence dari suatu RBTLS dan RBTLS simetris), teori mengenai Sistem Triple Steiner sebagai bentuk khusus dari Rancangan Block Tidak Lengkap Seimbang (yang mencakup teori umum dan *Kirkman's schoolgirl problem*), dan bagaimana metode pembentukan langsung (*Direct Construction Methods*) untuk Sistem Triple Steiner.

1.3. Pembahasan

Suatu rancangan block tidak lengkap seimbang (RBTLS) dengan parameter-parameter (v, b, r, k, λ) didefinisikan sebagai suatu penyusunan terhadap v objek yang berbeda a_1, \dots, a_v ke dalam b block B_1, \dots, B_b , sedemikian sehingga :

1. Setiap block B_j memuat tepat k objek yang berbeda
2. Setiap objek a_i muncul di dalam tepat r block yang berbeda
3. Setiap pasangan tak terurut a_i, a_j dari objek-objek yang berbeda, muncul bersama dalam tepat λ block.

Contoh 1. RBTLS dengan $v = 7, b = 7, k = 3, r = 3$ dan $\lambda = 1$

$B_1 : 1, 2, 4; \quad B_3 : 3, 4, 6; \quad B_5 : 5, 6, 1; \quad B_7 : 7, 1, 3.$

$B_2 : 2, 3, 5; \quad B_4 : 4, 5, 7; \quad B_6 : 6, 7, 2;$

Parameter-parameter v, b, r, k, λ dari suatu RBTLS harus memenuhi relasi

$$bk = vr$$

$$r(k-1) = \lambda(v-1)$$

dan memenuhi ketidaksamaan Fisher $b \geq v$ dan $r \geq k$.

Suatu rancangan block tidak lengkap seimbang $D(v, b, r, k, \lambda)$ dengan $k = 3$, disebut sebagai sistem triple. Suatu sistem triple dengan $\lambda = 1$ disebut sebagai sistem triple Steiner dengan kondisi penting yang harus dipenuhi

$$v \equiv 1,3 \pmod{6}$$

Berikut diberikan contoh-contoh sistem triple Steiner dengan orde $v = 3, 7, 9$

$v = 3$

123

$v = 7$

123 246

145 257

167 347

356

$v = 9$

123

145 249 348

168 256 357 467

179 278 369 589

Pembahasan dan penjelasan lebih rinci mengenai sistem triple steiner dan metode pembentukannya akan diuraikan pada bab III.

1.4. Pembatasan

Salah satu metode yang digunakan untuk membentuk suatu Rancangan Block Tidak Lengkap Seimbang adalah metode pembentukan langsung (*Direct Construction Methods*). Dalam metode ini digunakan teori Galois Field $GF(p^n)$,

dengan p adalah bilangan prima, sebagai teori penunjang. Pembahasan akan dibatasi hanya untuk Galois Field dengan nilai $n = 1$.

1.5. Sistematika

Dalam bab II dibahas mengenai teori himpunan dan bilangan, relasi dan fungsi, teori grup, Galois Field GF_p dan teori matriks yang dapat menunjang pembahasan pada bab III.

Dalam bab III dibahas mengenai teori umum dari Rancangan Block Tidak Lengkap Seimbang (terdiri dari definisi umum RBTLS, matriks incidence dari suatu RBTLS dan RBTLS simetris), Sistem Triple Steiner sebagai bentuk khusus dari Rancangan Block Tidak Lengkap Seimbang (yang mencakup teori umum dan *Kirkman's schoolgirl problem*), dan metode pembentukan langsung (*Direct Construction Methods*) untuk Sistem Triple Steiner.

Dan terakhir dalam bab IV akan dibahas mengenai kesimpulan dari pembahasan dan keseluruhan bab.