BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 Matriks

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan ini disebut entri dalam matriks. Entri dalam matriks biasa ditulis dengan huruf kecil, sedangkan matriksnya dengan huruf besar. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut, dan biasa ditulis dengan m x n dengan m merupakan jumlah baris dan n jumlah kolom.

Bentuk umumnya :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } [a_{ij}]_{m \times n}$$

A = a_{ij} artinya suatu matriks A dengan elemen-elemenya adalah a_{ij} dimana i = 1,2,…..,m menyatakan jumlah baris dan j = 1,2,…..,n menyatakan jumlah kolom.

2.1.1 Operasi Elementer pada Baris dan Kolom Suatu Matriks

Yang dimaksud dengan operasi elementer pada baris atau kolom suatu matriks A adalah sebagai berikut :

(1a) Penukaran tempat baris ke-i dan baris ke-j (baris ke- i dijadikan baris ke-j dan baris ke-j dijadikan baris ke- i), ditulis: H_{ij} (A).

(1b) Penukaran tempat kolom ke- i dan kolom ke-j (kolom ke- i dijadikan kolom ke-j dan kolom ke-j dijadikan kolom ke- i), ditulis: K_{ij} (A).

(2a) Mengalikan baris ke- i dengan skalar $\lambda \neq 0$ ditulis: $H_i^{(\lambda)}$ (A).

(2b) Mengalikan kolom ke- i dengan skalar $\lambda \neq 0$ ditulis: $K_i^{(\lambda)}$ (A).

(3a) Menambah baris ke- i dengan λ kali baris ke-j, ditulis: $H_{ij}^{(\lambda)}$ (A).

(3b) Menambah kolom ke- i dengan λ kali kolom ke-j, ditulis: $K_{ij}^{(\lambda)}$ (A).

2.1.2 Rank Matriks

Definisi 2.1.2.1

Rank baris dari matriks A adalah dimensi dari ruang baris matriks A. Rank kolom dari matriks A adalah dimensi ruang kolom matriks A. Jika rank baris = rank kolom, maka rank matriks A didefinisikan sebagai harga rank baris = rank kolom dari A tersebut, yang ditulis r(A).

Definisi 2.1.2.2

Rank dari matriks menyatakan jumlah maksimum vektor-vektor baris atau kolom yang bebas linier, untuk mencari rank suatu matriks dapat digunakan operasi elementer. Dan diusahakan mengubah sebanyak mungkin baris atau kolom menjadi vektor nol (karena vektor nol bergantung linier).

2.2 Determinan

Misalkan A adalah matriks kuadrat. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan didefinisikan det(A) sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Jumlah det(A) dinamakan determinan A.

Misal A sebarang matriks, determinan dari matriks A sering ditulis sebagai det(A) atau dapat dituliskan dengan memberi garis-garis vertikal di samping matriks. Untuk menghitung determinan suatu matriks kuadrat yang berordo dua dan matris kuadrat berordo tiga dapat menggunakan rumus dibawah ini :

(i). $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(ii). $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$

$- \quad a_{11}a_{23}a_{32}$

Selanjutnya untuk mencari determinan matriks kuadrat berordo lebih dari tiga dengan menggunakan ekspansi kofaktor.

Definisi 2.2.1

Jika A adalah matriks kuadrat, maka minor entri a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks yang tetap setelah baris ke i dan kolom ke j dicoret dari A. Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan dinamakan kofaktor entri a_{ij}.

Definisi 2.2.2

Determinan matriks A yang berukuran n x n dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil kali yang dihasilkan; yakni, untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$, maka

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke j)

dan

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke i)

Definisi 2.2.3

Jika A adalah sebarang matriks n x n dan Cij adalah kofaktor aij, maka

matriks $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \dots C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} \dots C_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} \dots C_{nn} \end{bmatrix}$

dinamakan matriks kofaktor A. Transpos matriks ini dinamakan adjoin A dan dinyatakan dengan adj(A).

Teorema 2.2.1

Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Bukti.

Mula-mula akan diperlihatkan bahwa A adj(A) = det(A)I

$$A\,adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{in} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \dots C_{j1} \dots C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} \dots C_{j2} \dots C_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} \dots C_{jn} \dots C_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri dalam baris ke i dan kolom ke j dari A adj(A) adalah

$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn}$ ....(2.1)

Jika i = j, maka persamaan (2.1) adalah ekspansi kofaktor dari det(A) sepanjang baris ke i dari A (definisi 2.2.2). Sebaliknya, jika i ≠ j, maka koefisien-koefisien a dan kofaktor-kofaktor berasal dari baris-baris A yang berbeda, sehingga nilai dari persamaan (2.1) sama dengan nol. Maka,

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2.2)$$

Karena A dapat dibalik, maka det(A) $\neq$ 0. Selanjutnya, persamaan (2.2) dapat dituliskan kembali sebagai

$$\frac{1}{\det(A)}\left[A\,adj(A)\right] = I$$

atau

$$A\left[\frac{1}{\det(A)}adj(A)\right] = I$$

Dengan mengalikan kedua ruas dari kiri dengan A^{-1} akan menghasilkan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}adj(A)$$

Contoh 2.3.1

Akan ditentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

Kofaktor dari elemen dari matriks *A* adalah sebagai berikut :

$C_{11} = +\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18,\ C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2,\quad C_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$

$C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11,\quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14,\ C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$

$C_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10,\ C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,\ C_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$

$$\text{Sehingga adj. A} = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(-4)(5)+(3)(2)(1)+(-4)(0)(-1)-(3)(0)(5)-(2)(2)(-1)-(-4)(-4)(1) = -50$$

$$\text{Jadi } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

$$= \frac{1}{-50} \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9/25 & 11/50 & 1/5 \\ -1/25 & -7/25 & 2/25 \\ -2/25 & -1/10 & 4/25 \end{bmatrix}$$

2.3 Sistem Persamaan Linier (D. Suryadi dan S. Harini, 1986)

Persamaan linier dalam peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sebagai persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots + a_nx_n = b$$

dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan b adalah konstanta-konstanta riel.

Sistem persamaan linier dapat juga ditulis dalam bentuk

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3)$$

atau AX = B

dan dapat juga ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

dimana x_1, x_2, ……,x_n adalah anu (bilangan-bilangan takdiketahui), sedangkan *a* dan *b* adalah konstanta-konstanta.

Definisi 2.3.1

Suatu susunan persamaan linier akan mempunyai jawab (*consistent*) apabila rank matriks koefisien = rank matriks lengkap atau bila r(A) = r(A,B).

2.3.1 Sistem Persamaan Linier Homogen

Jika semua konstanta B = 0 (pada persamaan 2.3) maka AX = 0, sehingga bentuk umum dari persamaan (2.3) menjadi

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.4)$$

Jelas terlihat bahwa r(A) = r(A,0), jadi sistem persamaan linier homogen selalu mempunyai jawab. Harga-harga $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ jelas memenuhi susunan dari persamaan (2.4). Jadi [0, 0,……, 0] pasti merupakan jawab dari sistem persamaan linier homogen yang manapun.

Definisi 2.3.1.1

Sistem persaman linier homogen selalu mempunyai paling sedikit satu jawab [0, 0,……., 0] yang disebut jawab nol atau jawab trivial.

Definisi 2.3.1.2

Semua jawab vektor dari sistem persamaan linier homogen akan membentuk suatu ruang vektor di R^n yang disebut ruang jawab (*solution space*)L. Dimensi L = (n – r), dimana n = banyaknya anu dan r = rank matriks koefisien A.

Definisi 2.3.1.3

Jika r < n, berarti dimensi ruang jawab n – r > 0 maka akan didapatkan jawab yang tidak nol (nontrivial), sedangkan jika r = n, maka dimensi ruang jawab n – r = 0, sehingga akan didapatkan jawab nol (trivial).

Definisi 2.3.1.4

Jika sistem persamaan linier mempunyai m buah persamaan, dengan vektor-vektor kolom A_1, A_2, ….,A_n yang berkomponen dengan m buah persamaan, maka jumlah maksimum vektor-vektor kolom matriks A yang bebas linier = m, atau r(A) paling besar = m. Jadi m < n, pasti ada jawab nontrivial.

2.3.2 Sistem Persamaan Linier Nonhomogen

Suatu sistem persamaan linier AX = B, dimana B ≠ 0, maka persamaan (2.3) menjadi

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.5)$$

Definisi 2.3.2.1

Suatu sistem persamaan linier nonhomogen akan mempunyai jawab bila r(A) = r(A,B), sedangkan bila r(A) ≠ r(A,B) maka sistem tersebut tidak punya jawab.

Definisi 2.3.2.2

Sistem persamaan linier nonhomogen akan mempunyai jawab unik (tunggal) bila r = n, sedangkan jika r < n sistem akan mempunyai jawab yang tidak tunggal.

2.4 Pemecahan Sistem Persamaan Linier

Sistem sistem persamaan linier yang mempunyai bentuk umum sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.6)$$

atau AX = B, jika

1. A = matriks yang mempunyai banyaknya persamaan sama dengan banyaknya variabel (A_{nxn}).
2. A = non singular matriks atau determinan dari matriks A ≠ 0.
3. r(A) = r(A,B) = n

Maka dapat dikatakan bahwa persamaan diatas mempunyai jawab unik (tunggal), pemecahan persamaan tersebut dapat dihitung dengan cara :

2.4.1 Eliminasi Gauss

Kita ingin memecahkan sistem persamaan diatas untuk memperoleh x_1, x_2, ….,x_n yang memenuhi persamaan tersebut. Prosedurnya adalah mengeliminasi atau menghapus variabel-variabel tersebut, tanpa menghilangkan sifat yang umum, dianggap $a_{11} \neq 0$. Sehingga persamaan dapat disusun pengaturan kembali nama-nama variabel sekaligus.

Kemudian dipecahkan secara eksplisit untuk x_1 dan diperoleh

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_2 - .... - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n - \frac{b_1}{a_{11}} \qquad \text{………………….(2.7)}$$

Dengan membagi persamaan pertama (dari persamaan 2.6) dengan a_{11} dan kemudian pergunakan persamaan (2.7) untuk menghitung x_1 didalam persamaan lain sisanya (n – 1), sehingga diperoleh

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ……… + a_{2n}x_n = b_2$$

$$x_1 = -\frac{a_{22}}{a_{21}}x_2 + \frac{a_{23}}{a_{21}}x_3 - .... - \frac{a_{2n}}{a_{21}}x_n + \frac{b_2}{a_{21}} \qquad \text{………………….(2.8)}$$

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - .... - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \qquad \text{………………….(2.9)}$$

Persamaan (2.8) dikurangi persamaan (2.9) sehingga diperoleh

$$\left(-\frac{a_{22}}{a_{21}} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(-\frac{a_{23}}{a_{21}} + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 + ... + \left(-\frac{a_{2n}}{a_{21}} + \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)x_n + \left(-\frac{b_2}{a_{21}} + \frac{b_1}{a_{11}}\right) =$$

$$\left(\frac{a_{22}}{a_{21}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(\frac{a_{23}}{a_{21}} - \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 + ... + \left(-\frac{a_{2n}}{a_{21}} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)x_n = \left(\frac{b_2}{a_{21}} - \frac{b_1}{a_{11}}\right)$$

$$\left(a_{22}-a_{21}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\right)x_2+\left(a_{23}-a_{21}\left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)\right)x_3+\ldots\ldots+\left(a_{2n}-a_{21}\left(\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)\right)x_n=b_2-a_{21}\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)$$

dan seteruskannya.

$$\left(a_{n2}-a_{n1}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\right)x_2+\left(a_{n3}-a_{n1}\left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)\right)x_3+\ldots\ldots+\left(a_{nn}-a_{n1}\left(\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)\right)x_n=b_n-a_{n1}\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)$$

atau

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + a^1_{12}x_2 + a^1_{13}x_3 + \ldots\ldots + a^1_{1n}x_n = b^1_1 \\ \quad a^1_{22}x_2 + a^1_{23}x_3 + \ldots\ldots + a^1_{2n}x_n = b^1_2 \\ \quad\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \quad a^1_{n2}x_2 + a^1_{n3}x_3 + \ldots\ldots + a^1_{nn}x_n = b^1_n \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.10)$$

Jika salah satu dari a^1_{ij} $(i = j = 2, \ldots\ldots, n)$ tidak sama dengan nol, maka dapat menganggap tanpa mengurangi sifat – sifat umum bahwa $a^1_{22} \neq 0$. Proses pengurangan diteruskan dengan membagi persamaan kedua dari persamaan (2.10) dengan a^1_{22}, dan persamaan ini digunakan untuk mengeliminasi x_2 didalam persamaan ketiga sampai ke-n. Kemudian seperti proses diatas maka x_3 dieliminasi dari persamaan keempat sampai ke-n. Demikian seterusnya sehingga diperoleh suatu sistem persamaan sebagai berikut :

$$\begin{array}{l} x_1 + h_{12}x_2 + \ldots + h_{1n}x_n = g_1 \\ \qquad x_2 + \ldots\ldots + h_{2n}x_n = g_2 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad x_{n-1} + h_{(n-1)n}x_n = g_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad x_n = g_n \end{array}$$

Akhirnya diperoleh nilai $x_n = g_n$. Nilai x_n ini kemudian disubsitusikan kedalam persamaan sebelumnya sebanyak (n – 1) persamaan.

Jadi

$$x_{n-1} = g_{n-1} - h_{(n-1)n} x_n$$

Dari sini akan diperoleh x_{n-1}, hasil x_{n-1} juga disubsitusikan kedalam persamaan-persamaan terdahulu atau sebelumnya sebanyak (n - 2) persamaan. Demikian seterusnya dengan melanjutkan proses ini dengan subsitusikan kebelakang (*back subsitution*), sehingga diperoleh nilai x_i. Cara ini disebut eliminasi Gauss (*Gaussian Eliminations*).

Bila diadakan observasi selanjutnya, maka akan diperoleh bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & h_{12} \dots & h_{1n} \\ 0 & 1 \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

atau Hx = g

Dalam hal ini H menunjukkan eselon matriks yang diperoleh dari A. Bila dilihat kembali hasil dari operasi yang dikerjakan terhadap unsur atau elemen A, maka skema eliminasi Gauss dimaksudkan mengubah A kedalam matriks H.

Contoh 2.4.1

Akan ditentukan penyelesaian dari persamaan linier berikut

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 16 \end{aligned}\right\}$$

dengan eliminasi Gauss.

Penyelesaian :

Pemecahan persamaan linier dengan eliminasi Gauss, dilakukan dengan menggunakan persamaan pertama untuk mencari x_1 dan kemudian disubstitusikan kedalam persamaan kedua dan ketiga.

Hasilnya adalah

$x_1 + 1/2x_2 + 2x_3 = 8$

$x_1 = 8 - 1/2x_2 - 2x_3$ …………………(*)

Nilai x_1 dimasukkan kedalam persamaan kedua dan ketiga

Jadi persamaan kedua diperoleh

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$

$3(8 - 1/2x_2 - 2x_3) + 2x_2 + x_3 = 10$

$24 - 3/2x_2 - 3/2\, x_3 + 2x_2 + x_3 = 10$

$1/2x_2 - 5x_3 = -14$ ………………..(**)

Sedangkan untuk persamaan ketiga

$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16$

$8 - 1/2x_2 - 2x_3 + 3x_2 + 3x_3 = 16$

$5/2x_2 + x_3 = 8$ ………………..(***)

Dengan menggunakan persamaan (**), selanjutnya eliminasikan x_2 kedalam persamaan (***), sedangkan persamaan (*) tidak mengalami perubahan

$1/2x_2 - 5x_3 = -14$

$x_2 - 10x_3 = -28$

$x_2 = 10x_3 - 28$ ………………..(****)

sehingga diperoleh persamaan (***) yang baru, yang diperoleh dari substitusi nilai x_2, sehingga menjadi

$$5/2x_2 + x_3 = 8$$

$$5/2(10x_3 - 28) + x_3 = 8$$

$$25x_3 - 70 + x_3 = 8$$

$$26x_3 = 78$$

$$x_3 = \frac{78}{26}$$

$$= 3$$

Nilai x_3 kemudian dimasukkan kedalam persamaan (****) dan persamaan (*) sehingga diperoleh

$$x_2 = 10x_3 - 28$$

$$= 10\left(\frac{78}{26}\right) - 28$$

$$= 30 - 28$$

$$= 2$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai x_1

$$x_1 = 8 - 1/2x_2 - 2x_3$$

$$= 8 - 1/2(2) - 2(3)$$

$$= 1$$

Jadi $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ dan $x_3 = 3$

2.4.2 Eliminasi Gauss Jourdan

Pemecahan persamaan linier dengan eliminasi Gauss Jourdan, hampir sama dengan eliminasi Gauss. Perbedaannya adalah pada eliminasi Gauss Jourdan dari persamaan kedua dari persamaan (2.10) dicari nilai x_2 dan hasilnya disubsitusikan kedalam persamaan lainnya.

Contoh 2.4.2

Akan ditentukan penyelesaian dari persamaan linier berikut

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16$$

dengan eliminasi Gauss Jourdan.

Penyelesaian :

Dari penyelesaian pada contoh 2.4.1 dengan cara penghapusan atau eliminasi Gauss diperoleh

$$x_1 + 1/2x_2 + 2x_3 = 8 \qquad \text{.................................(*)}$$

$$1/2x_2 - 5x_3 = -14 \qquad \text{.......................(**)}$$

$$5/2x_2 + x_3 = 8 \qquad \text{.............................(***)}$$

Dengan menggunakan persamaan (**), selanjutnya akan ditentukan nilai x_2 ,hasil x_2 tersebut disubstitusikan kedalam persamaan (*) dan persamaan (***), sehingga diperoleh

$$1/2x_2 - 5x_3 = -14$$

$$x_2 - 10x_3 = -28$$

$$x_2 = 10x_3 - 28$$

Hasil x_2 tersebut disubstitusikan kedalam persamaan (*) jadi

$$x_1 + 1/2x_2 + 2x_3 = 8$$

$$x_1 + 1/2(\ 10x_3 - 28\ ) + 2x_3 = 8$$

$$x_1 + 5x_3 - 14 + 2x_3 = 8$$

$$x_1 + 7x_3 = 22$$

Nilai x_2 diatas juga disubstitusikan kedalam persamaan (***), sehingga diperoleh

$$5/2x_2 + x_3 = 8$$

$$5/2(10x_3 - 28) + x_3 = 8$$

$$25x_3 - 70 + x_3 = 8$$

$$26x_3 = 78$$

$$x_3 = \frac{78}{26}$$

$$= 3$$

Dengan demikian diperoleh

$$x_1 = 22 - 7x_3$$

$$= 22 - 7(3)$$

$$x_1 = 1$$

dan $x_2 = 10x_3 - 28$

$$= 10(3) - 28$$

$$= 2$$

Jadi $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ dan $x_3 = 3$

2.4.3 Aturan Cramer

Bila dilihat kembali sistem persamaan linier dengan n buah persamaan dan n variabel yang tidak diketahui dengan

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}$$

atau AX = B

dimana A = a_{ij} i,j = 1,2,…,n dan

$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$

$B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$

Dalam hal ini terlebih dahulu diasumsikan bahwa rank (A) = r(A) = n, sehingga matriks A merupakan matrik non singular atau det(A) $\neq 0$.

Aturan Cramer menggunakan cara menginversikan suatu matriks untuk memecahkan persamaan-persamaan linier, sehingga dalam hal ini akan dicari invers matriks A, yaitu A^{-1} dan diperoleh

$A^{-1}AX = 1X = X = A^{-1}B$

Bila A adalah non singular matriks, maka diperoleh pemecahan yang unik(tunggal) yaitu

$X = A^{-1}B$

untuk suatu kumpulan persamaan. Pemecahannya unik, hanyalah bila inversnya unik. Dalam hal ini dilakukan pemecahan secara eksplisit untuk suatu kumpulan persamaan dengan menggunakan invers matriks.

$A^{-1} = |A|^{-1} A^{+}$

yaitu $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ adj.A

dimana $A^{+} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \ldots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \ldots A_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} \ldots A_{nn} \end{bmatrix}$

dan A_{ij} adalah kofaktor dari elemen a_{ij} dalam A.

Dengan demikian komponen dalam vektor x dapat ditulis

$$x_i = |A|^{-1}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_j = |A|^{-1}\sum_{j=1}^{n} B_j A_{ji}$$

Seperti yang telah ketahui bahwa

$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{ji}$ adalah ekspansi dari | A | dengan kolom ke-i.

Sebagai perbandingan kita lihat $\sum_{j=1}^{n} B_{ji}A_{ji}$ adalah ekspansi atau minus dari det(A) dengan menganti kolom ke-i dengan kolom ke-B, sehingga hasil yang diperoleh dengan cara ini disebut Aturan Cramer.

Untuk memperoleh vektor x_i maka akan diperoleh dengan membagi determinan dari matriks A (matriks A yang kolom i-nya diganti dengan kolom atau vektor B).

Jadi

$$\text{bila i = 1 maka } x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\ldots a_{1n} \\ b_2 & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ b_n & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{bila i = 2 maka } x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\ldots a_{1n} \\ a_{22} & b_2\ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{2n} & b_n\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

demikian seterusnya sampai dengan

$$\text{bila i = n maka } x_n = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1(n-1)}b_1 \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2(n-1)}b_2 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{n(n-1)}b_n \end{vmatrix}$$

Bila dari penyelesaian dari sistem persamaan linier dengan menggunakan Aturan Cramer, maka terlihat bahwa cara pengerjaan Aturan Cramer adalah kurang efisien, dibandingkan dengan cara eliminasi Gauss atau eliminasi Gauss Jourdan. Hal ini karena untuk mencari nilai dari variabel sebanyak n dibutuhkan usaha untuk mencari determinan sebanyak (n +1) dan merupakan pekerjaaan yang terlalu banyak. Walaupun demikian secara penelaahan teoritis Aturan Cramer sangat penting karena $X= A^{-1}B$ merupakan pemecahan secara eksplisit.

Contoh 2.4.3

Akan ditentukan penyelesaian sistem persamaan linier nonhomogen berikut ini dengan menggunakan Aturan Cramer

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \qquad 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Penyelesaian :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(4)(3)+(0)(6)(-1)+(2)(-3)(-2)-(0)(-3)(3)-(1)(6)(-2)-(2)(4)(-1) = 44$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (6)(4)(3)+(0)(6)(8)+(2)(30)(-2)-(0)(30)(3)-(6)(6)(-2)-(1)(4)(8) = -40$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 30 & 6 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(30)(3)+(6)(6)(-1)+(2)(-3)(8)-(6)(-3)(3)-(1)(6)(8)-(2)(30)(-1) = 72$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(4)(8)+(0)(30)(-1)+(6)(-3)(-2)-(0)(-3)(8)-(1)(30)(-2)-(6)(4)(-1) = 152$$

maka $x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$ $\qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

2.5 Vektor

Definisi 2.5.1

Secara matematis vektor merupakan pasangan bilangan terurut (n tuple) yaitu. $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Himpunan n bilangan terurut disebut ruang n (R^n).

Anggota-anggota dari R^n adalah n tuple $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah suatu titik suatu koordinat kartesian dari n sumbu, dimana

x_1 = koordinat pertama

x_2 = koordinat kedua

$\vdots$

x_n = Koordinat ke-n

Dapat juga $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ditulis dalam matriks kolom yaitu

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2.6 Ruang Vektor

Definisi 2.6.1

Misal R adalah himpunan tak kosong, R dikatakan lapangan bilangan riil setiap a,b,c $\in$R memenuhi aksioma berikut :

Aksioma jumlahan

1. a + b $\in$R
2. a + (b + c) = (a + b) +c
3. $\exists$ 0 $\in$R sedemikian hingga a + 0 = a
4. $\forall$ a $\in$R, $\exists$ -a $\in$R sedemikian hingga a + (-a) = 0
5. a + b = b + a

Aksioma pergandaan

6. a.b $\in$R
7. a.(b.c) = (a.b).c
8. $\exists$ 1 $\in$R sedemikian hingga a.1 = a
9. $\forall$ a $\in$R, $\exists$ a^{-1} $\in$R (dengan a $\neq$ 0) sedemikian hingga a.a^{-1} = 1

Aksioma distribusi

10. a.(b + c) = a.b + a.c

Definisi 2.6.2

Misal V adalah sebarang himpunan tak kosong yang didalamnya didefinisikan dua operasi yaitu : operasi penjumlahan dan perkalian skalar.

Yang dimaksud operasi penjumlahan disini adalah suatu operasi yang menghubungkan setiap $\bar{u}, \bar{v}$ dalam V dengan elemen $\bar{u} + \bar{v}$, yang disebut sebagai jumlah $\bar{u}$ dan $\bar{v}$.

Sedangkan operasi perkalian skalar adalah suatu operasi yang menghubungkan setiap $\bar{u} \in V$ dan sebarang skalar k dengan eleman $k\bar{u}$, yang disebut sebagai perkalian skalar $\bar{u}$ oleh k.

Definisi 2.6.3

Misalkan V adalah himpunan tak kosong, V dikatakan sebagai ruang vektor jika untuk setiap $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ dan k, l sebarang skalar di lapangan F memenuhi 10 aksioma sebagai berikut :

1. Jika $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ maka $\bar{u} + \bar{v} \in V$

2. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

3. $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$

4. $\exists\ \bar{0} \in$ V sedemikian hingga $\bar{0} + \bar{u} = \bar{u} + \bar{0}, \forall \bar{u} \in V$

5. $\forall \bar{u} \in V, \exists -\bar{u} \in V$ sedemikian hingga $\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$

6. Untuk k sebarang skalar di F dan $\bar{u} \in V$ berlaku $k\bar{u} \in V$

7. $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$

8. $(k+l)\bar{u} = k\bar{u} + l\bar{u}$

9. $k(l\bar{u}) = (kl)\bar{u}$

10. $1\bar{u} = \bar{u}$

2.7 Kombinasi Linier

Definisi 2.7.1

Suatu vektor $\bar{w}$ dikatakan kombinasi linier vektor-vektor $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_r$ jika vektor-vektor tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$\bar{w} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ldots + k_r\bar{v}_r$,dengan $k_1, k_2, \ldots, k_r$ adalah skalar.

Contoh 2.7.1

Misalkan vektor-vektor $\bar{u}$ = (1,-1,3) dan $\bar{v}$ = (2,4,0) di R^3 . Akan ditunjukkan bahwa $\bar{w}$ = (4,6,2) adalah kombinasi linier $\bar{u}$ dan $\bar{v}$.

Penyelesaian:

Supaya $\bar{w}$ merupakan kombinasi linier dari vektor $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ maka harus ada skalar k_1 dan k_2 sedemikian sehingga: $\bar{w} = k_1\bar{u} + k_2\bar{v}$

$$(4,6,2) = k_1(1,-1,3) + k_2(2,4,0)$$

$$(4,6,2) = (k_1 + 2k_2, -k_1 + 4k_2, 3k_1)$$

Dengan menyamakan komponen yang berpadanan, akan diperoleh

$k_1 + 2k_2 = 4$

$-k_1 + 4k_2 = 2$

$3k_1 = 6$

Dengan memecahkan persoalan diatas,

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{21}^{(1)}} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{31}^{(-3)}} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{32}^{(1)}} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

r(A) = r(A,B) =2

$k_1 + 2k_2 = 4$

$6k_2 = 6$

$k_2 = 1$

$k_1 + 2 = 4$

$k_1 = 2$

diperoleh $k_1 = 2$ dan $k_2 = 1$, sehingga ditulis $\bar{w} = 2\bar{u} + \bar{v}$

Jadi $\bar{w}$ merupakan kombinasi linier dari vektor $\bar{u}$ dan $\bar{v}$.

Definisi 2.7.2

Jika $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_r$ adalah himpunan vektor-vektor didalam V dan jika setiap vektor didalam V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_r$, maka vektor-vektor tersebut dikatakan merentang V.

2.8 Vektor Bebas Linier dan Takbebas Linier

Definisi 2.8.1

Jika $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_r\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor tak kosong, maka persamaan vektor $k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ldots\ldots\ldots + k_r\bar{v}_r = \bar{0}$ mempunyai paling sedikit satu solusi, yaitu $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$.

Jika $k_i = 0$, untuk $i = 1, 2, \ldots, r$ adalah satu-satunya pemecahan, maka himpunan S disebut himpunan bebas linier (*Linearly Independent*), jika tidak semua $k_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$ maka himpunan S disebut himpunan takbebas linier (*Linearly dependent*).

Contoh 2.8.1

Tunjukkan vektor-vektor $\bar{i} = (1,0,0)$, $\bar{j} = (0,1,0)$, dan $\bar{k} = (0,0,1)$ dalam R^3 adalah bebas linier.

Penyelesaian:

Bentuk persamaan vektor

$$k_1\bar{i} + k_2\bar{j} + \ldots + k_3\bar{k} = \bar{0}$$

$$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$(k_1, k_2, k_3) = (0,0,0)$$

Dalam perhitungan diperoleh bahwa hanya ada satu solusi, yaitu $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Hal ini berarti bahwa $\left\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ adalah bebas linier.

2.9 Basis dan Dimensi

Definisi 2.9.1

Jika V adalah sebarang ruang vektor dan $S = \left\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_r\right\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor pada V, maka S kita namakan basis untuk V jika:

(i) S bebas linier

(ii) S merentang V

Contoh 2.10.1

Tunjukkan bahwa $\bar{i} = (1,0,0)$, $\bar{j} = (0,1,0)$, dan $\bar{k} = (0,0,1)$ adalah sebuah basis untuk R^3.

Penyelesaian:

(1) Akan ditunjukkan bahwa $\left\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ bebas linier

$$k_1\,\bar{i} + k_2\,\bar{j} + k_3\,\bar{k} = \bar{0}$$

$$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$(k_1, k_2, k_3) = (0,0,0)$$

atau $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$.

Jadi $\left\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ bebas linier.

(2) Akan ditunjukkan bahwa $\left\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ merentang R^3.

Ambil sebarang vektor $\bar{x} \in R^3$, maka $\bar{x}$ dapat dinyatakan sebagai $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$

Akan ditunjukkan bahwa $\bar{x} = k_1\,\bar{i} + k_2\,\bar{j} + k_3\,\bar{k}$

$(x_1, x_2, x_3) = k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1)$

$(x_1, x_2, x_3) = (k_1, k_2, k_3)$

atau $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$, $x_3 = k_3$

artinya x adalah kombinasi linier dari $\left\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$, sehingga $\left\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ merentang R^3.

Dari (1) dan (2) jelas bahwa $\left\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ adalah basis dari R^3.

2.10 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.10.1

Jika A adalah matriks nxn, maka vektor taknol $\bar{x}$ didalam R^n dinamakan vektor eigen dari A jika A$\bar{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\bar{x}$

yakni

$$A\bar{x} = \lambda \bar{x}$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan $\bar{x}$ dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran nxn, maka kita menuliskan kembali $A\bar{x} = \lambda \bar{x}$ sebagai

$$A\bar{x} = \lambda I\bar{x}$$

atau ekivalen

$$(\lambda I - A)\bar{x} = 0$$

Supaya λ menjadi nilai eigen maka harus ada pemecahan taknol, untuk itu kita menggunakan persamaan karakteristik yaitu :

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Contoh 2.10

Akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$\det A = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

sehingga nilai eigennya $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$

Vektor eigen untuk $\lambda_1 = 2$ adalah

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$3x_1 + 3x_2 = 0$

$-6x_1 - 6x_2 = 0$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 3 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{21}^{(2)}} \left[\begin{array}{cc:c} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

karena r(A)<n maka sistem mempunyai solusi, selanjutnya diambil sebarang parameter , misalkan $x_1 = t$ sehingga didapatkan

$3t = -3x_2$

$x_2 = -t$

dan $\bar{x} = (t, -t) = t(1,-1)$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 2$

Jadi basis ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 2$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Vektor eigen untuk $\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$6x_1 + 3x_2 = 0$

$-6x_1 - 3x_2 = 0$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 6 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{21}^{(1)}} \left[\begin{array}{cc:c} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

karena r(A)<n maka sistem mempunyai solusi, selanjutnya diambil sebarang parameter , misalkan $x_1 = t$ sehingga didapatkan

$$6t = -3\,x_2$$

$$x_2 = -\,2t$$

dan $\bar{x} = (t, -2t) = t\,(1,-2)$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -1$

Jadi basis ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -1$ adalah $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.