BAB II

MATERI PENUNJANG

Pada penulisan tugas akhir ini akan dibahas mengenai pembentukan fungsi polinomial dari Metode Least Squares (PKT / Pendekatan Kuadrat Terendah) dengan penyelesaian secara metode polinomial ortogonal, karena didalam perhitungan nantinya akan banyak berkaitan dengan Matrik Bujur sangkar berorde besar (lebih atau sama dengan 4) dan juga masalah keortogonalan matrik, maka perlu adanya beberapa definisi dan teorema berikut.

2.1. Matrik

Matrik dapat ditinjau dari vektor - vektor baris dan vektor - vektor kolom. Sub-ruang dari R^m yang direntang oleh vektor -vektor baris dinamakan Ruang baris, sedangkan Sub-ruang dari R^n yang direntang oleh vektor - vektor kolom dinamakan Ruang kolom.

Definisi 2.1.1

Matrik berukuran mxn adalah kumpulan bilangan yang disusun secara kusus berbentuk empat persegi panjang dengan m baris serta n kolom,

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & & m_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad [M_{ij}]_{mxn}$$

Definisi 2.1.2

Jika $A = [a_{ij}]_{mxn}$ dan $B = [b_{ij}]_{mxn}$ maka **penjumlahan matrik** $A + B$ adalah suatu matrik $C = [c_{ij}]_{mxn}$ dengan $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

untuk $i = 1,2,3, \ldots, m$ dan $j = 1,2,3, \ldots, n$

Definisi 2.1.3

Jika $A = [a_{ij}]_{mxp}$ dan $B = [b_{ij}]_{pxn}$ maka **perkalian matrik A.B** adalah

$$C = [c_{ij}]_{mxn} \text{ dengan } c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Untuk setiap $i = 1,2, \ldots, m$ dan $j = 1,2, \ldots, n$

Definisi 2.1.4

Transpose dari matrik $A = [a_{ij}]_{mxn}$ adalah perubahan dari baris menjadi kolom serta kolom menjadi baris, dan dinotasikan dengan

$$A^T = [a_{ji}]_{nxm}$$

Definisi 2.1.5

Suatu matrik disebut **Matrik diagonal** jika $a_{ij} = 0$. $i \neq j$ atau matrik yang semua elemennya berharga nol kecuali elemen diagonalnya.

$$\text{misal : } \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.6

Matrik diagonal yang elemen diagonalnya 1 disebut **Matrik Identitas** dan dinotasikan dengan I_n

$$\text{Misal } I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.7.

1. Matrik A_{nxn} **non singuler** jika terdapat matrik B_{nxn} yang bersifat **BA = I = AB**
   B merupakan **invers** A dan dinotasikan A^{-1}, demikian pula A merupakan **invers** B dan dinotasikan B^{-1}.
2. Matrik $A = [a_{ij}]_{nxn}$ **non singuler** jika mempunyai nilai determinan $D \neq 0$ serta, dan disebut **singuler** jika mempunyai determinan $D = 0$.

Teorema 2.1.1

Matrik diagonal B_{nxn} saling *invers* dengan **matrik diagonal** A_{nxn} jika elemen diagonal masing - masingnya berkebalikan.

bukti :

akan dibuktikan bahwa matrik Diagonal A dan matrik Diagonal B saling invers jika elemen diagonal masing - masing saling berkebalikan

$$\text{misal } A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

berdasarkan definisi 2.1.7. ($BA = I = AB$) maka

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

dengan demikian $a_{ij}\, b_{ij} = 0$, $j \neq i$ dan $a_{ij}\, b_{ij} = 1$, $j = i$

agar syarat $a_{ij}\, b_{ij} = 1$ terpenuhi, maka $a_{ij} = 1/\, b_{ij}$ (saling berkebalikan), dengan demikian terbukti bahwa elemen diagonal A = a_{ij} berkebalikan dengan elemen diagonal B = b_{ij}

Teorema 2.1.2

Matrik A_{nxn} dan matrik B_{nxn} merupakan matrik - matrik yang non singuler, maka matrik A.B juga non singuler dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

bukti :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(AA^{-1})B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

jadi AB merupakan matrik yang non singuler, dan inversnya $B^{-1}A^{-1}$

Lemma 2.1.3

Jika Matrik A_{nxn} mempunyai invers maka akan berlaku

$$\det(A).\det(A^{-1}) = 1$$

Bukti :

Karena $A A^{-1} = I$ maka $\det(A A^{-1}) = \det(I)$

berdasarkan **teorema 2.1.2** . bahwa $(A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ maka

$$(A A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1} A^{-1}$$

$$= A A^{-1}$$

sehingga $\det(A A^{-1})^{-1} = \det(A) \det(A^{-1})$

$$\det(I)^{-1} = \det(A) \det(A^{-1})$$

$$1 = \det(A) \det(A^{-1})$$

jadi terbukti sudah $\det(A) \det(A^{-1}) = 1$

Teorema 2.1.4.

Matrik A dan B nonsinguler, maka akan berlaku $(AB)^T = B^T A^T$

Bukti :

Misal matrik A_{nxp} digandakan dengan matrik B_{pxn} maka elemen **baris ke- i** dan **kolom ke- j** untuk i,j sembarang ialah

$$a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$$

Yang merupakan elemen **baris ke- j** dan **kolom ke- i** dari **matrik** AB^T.

Di lain pihak **baris ke- j** dari B^T merupakan **kolom ke-j** dari B dengan elemen sebagai berikut $\begin{bmatrix} b_{1j} & b_{2j} & b_{3j} & \cdots & b_{pj} \end{bmatrix}$

Dan **kolom ke- i** dari A^T merupakan **baris ke – i** dari A dengan elemen – elemen

sebagai berikut $\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ \vdots \\ a_{ip} \end{bmatrix}$

Jadi elemen pada **baris ke- j** dan **kolom ke-i** dari matrik pergandaan $A^T B^T$ adalah

$$\begin{bmatrix} b_{1j} & b_{2j} & b_{3j} & \cdots & b_{pj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ \vdots \\ a_{ip} \end{bmatrix} = b_{1j} a_{i1} + b_{2j} a_{i2} + b_{3j} a_{i3} + \dots + b_{pj} a_{ip}$$

$$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$$

akan sama dengan elemen **baris ke- j** dan **kolom ke- i** dari matrik $(AB)^T$

sehingga terbuktilah $A^T B^T = (AB)^T$

Lemma 2.1.5

Jika Matrik A_{nxn} non singuler maka $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

bukti :

$A A^{-1} = A^{-1} A = I$ dan karena $I^T = I$ maka berdasarkan **teorema 2.1.4**

$(A^{-1})^T A^T = I = A^T (A^{-1})^T$

dengan demikian $(A^{-1})^T$ dan $(A^T)^{-1}$ merupakan invers dari A^T, sehingga terbuktilah bahwa $(A^{-1})^T = (A^{-1})^T$

2.2. Akar karakteristik

Definisi 2.2.1

Matrik A bujursangkar, λ (skalar) yang memenuhi persamaan $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ***1), untuk suatu vektor kolom $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, maka dapat dikatakan λ adalah suatu akar karakteristik dari **A**, dan **v** yang memenuhi persamaan tersebut disebut sebagai vektor karakteristik yang bersangkutan dengan λ.

Persamaan *** 1) dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$[A - \lambda I]\,[x] = [0]$ dengan I matrik identitas. **(Pers.2.2.1)**

Selanjutnya untuk mendapat harga Eigen dan Vektor Eigen dari suatu matrik A_{nxn} dapat dipergunakan langkah - langkah sebagai berikut :

- mula - mula diselesaikan dahulu determinan : $|A - \lambda I| = 0$.
- selanjutnya mencari akar persamaan λ dari polinomial berderajat n.
- kemudian kita bentuk persamaan simultan dari $[A - \lambda I]\,[x] = [0]$ dengan memasukkan harga λ yang didapatkan dari langlah kedua.
- terakhir selesaikan persamaan linear simultan untuk mendapat vektor Eigen X.

Contoh 2.2.1.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ tentukan eigen value dan eigen vektor untuk matrik tersebut.

- bentuk determinan $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ mempunyai penyelesaian

$$(\lambda + 2)^2 + (\lambda - 4) = 0$$

sehingga didapat harga Eigen: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ dan $\lambda_3 = 4$

- Untuk mencari Vektor Eigen masukkan harga eigen ke

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan demikian harga yang mungkin didapat dari $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$

$$\begin{bmatrix} 1+2 & -3 & 3 \\ 3 & -5+2 & 3 \\ 6 & -6 & 4+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena rank = 1, cukup diambil satu persamaan misal **$3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0$** atau **$6x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0$**, sehingga akan diperoleh Ruang Jawab (**Eigen Space**) yang terbentuk dari 2 eigen vektor yang bebas linier.

Eigen Spacenya = **p** $[\,1\,,1\,,0\,]$ + **r** $[\,1\,,0\,,\,-1\,]$dengan **p, r** sembarang bilangan.

Sedangkan harga yang mungkin didapat dari $\lambda_3 = 4$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

selanjutnya akan dicari ranknya :

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} B_{21}^{(-1)} \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} B_{32}^{(-1)} \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jelas ranknya 2, sehingga cukup diambil 2 persamaan

$$-3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \;=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!> \; x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$6x_1 - 6x_2 \qquad = 0 \;=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!> \; x_1 - x_2 \qquad = 0$$

Ambil suatu parameter **$x_1 = p$, $x_2 = q$** dan **$x_3 = 2r$**, sehingga akan diperoleh Ruang Jawab (**Eigen Space**) yang terbentuk dari vektor eigen.berdimensi satu yaitu vektor eigen $[\,1\,,1\,,2\,]$

2.3. Ortogonalisasi Gram- Schmidt

Definisi 2.3.1.

Misal $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ dan $Y = [y_1, y_2, ... , y_n]$ dua vektor pada ruang R^n, maka **inner product** didefinisikan sebagaimana berikut

$$X \,.\, Y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + ... + x_ny_n$$

contoh 2.3.1.

untuk vektor $x_1 = [1,1,1]$; $x_2 = [2,1,2]$ dan $x_3 = [1,-2,1]$

$$x_1.x_2 = 1.2 + 1.1 + 1.2 = 5$$

$$x_1.x_3 = 1.1 + 1.(-2) + 1.1 = 0$$

$$x_2.x_3 = 2.1 + 1.(-2) + 2.1 = 2$$

Definisi 2.3.2.

Dua vektor dikatakan Ortogonal jika hasil inner productnya = 0, pada contoh diatas ditunjukkan oleh $x_1 \,.\, x_2$.

Definisi 2.3.3.

Besar / panjang vektor dinyatakan dalam $\|X\| = \sqrt{x \,.\, x} = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \ldots + x_x^{\,2}}$,

pada contoh diatas $\|x_2\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + .2^2} = 3$

Definisi 2.3.4.

1. Suatu matrik A_{nxn} dikatakan **Ortogonal** jika **inner product** antar *Vektor Kolom / Vektor Baris* memenuhi **definisi 2.3.2.**

2. Matrik Ortogonal A_{nxn} jika $\mathbf{A.A^T = A^T.A = I}$ dengan $\mathbf{A^T = A^{-1}}$

Definisi 2.3.5.

Dua matrik A dan B dikatakan similar ortogonal (Orthogonally similiar) jika terdapat suatu matrik ortogonal P sedemikian hingga $\mathbf{P^T A P = B}$.

Pengortogonalan Gram- Schmidt

Misal $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ merupakan vektor pada ruang R, kemudian didefinisikan sebagai berikut

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_2 - \frac{y_1 . x_2}{y_1 . y_1} y_1$$

$$y_3 = x_3 - \frac{y_2 . x_3}{y_2 . y_2} y_2 - \frac{y_1 . x_3}{y_1 . y_1} y_1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$y_n = x_n - \frac{y_{n-1} . x_n}{y_{n-1} . y_{n-1}} y_{n-1} - \frac{y_{n-2} . x_n}{y_{n-2} . y_{n-2}} y_{n-2} - \dots - \frac{y_1 . x_n}{y_1 . y_1} y_1$$

dan vektor $G_i = \dfrac{y_i}{\| y_i \|}$, (i = 1,2,...,n) merupakan pengortogonal dari vektor x_i

bentuklah matrik X_{3x3} menjadi matrik ortogonal dengan vektor baris $X_1 = [1\ 1\ 1]$ $X_2 = [1\ -2\ 1]$ dan $X_3 = [1\ 2\ 3]$ dengan proses **ortogonalisasi gram-schmidt.**

Solusi :

1. $Y_1 = X_1 = [1\ 1\ 1]$

2. $Y_2 = X_2 - \frac{Y_1.X_2}{Y_1.Y_1} Y_1 = [1\ -2\ 1] - \frac{0}{3}[1\ 1\ 1] = [1\ -2\ 1]$

3. $Y_3 = X_3 - \frac{Y_2.X_3}{Y_2.Y_2} Y_2 - \frac{Y_1.X_3}{Y_1.Y_1} Y_1 = [1\ 2\ 3] - \frac{0}{6}[1\ \ -2\ 1] - \frac{6}{3}[1\ 1\ 1] = [-1\ 0\ 1]$

vektor $G_1 = \frac{Y_1}{\| Y_1 \|} = \frac{[1\ 1\ 1]}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

vektor $G_2 = \frac{Y_2}{\| Y_2 \|} = \frac{[1\ -2\ 1]}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}\ \ \frac{-2}{\sqrt{6}}\ \ \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$

vektor $G_3 = \frac{Y_3}{\| Y_3 \|} = \frac{[-1\ 0\ 1]}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}} = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Contoh : 2.3.2

bentuklah matrik X_{3x3} menjadi matrik ortogonal dengan vektor baris $x_1 = [1\ 1\ 1]$; $x_2 = [1\ -2\ 1]$ dan $x_3 = [1\ 2\ 3]$ dengan melalui proses **ortogonalisasi gram-schmidt.**

Solusi :

1. $y_1 = x_1 = [1\ 1\ 1]$

2. $y_2 = x_2 - \dfrac{y_1 . x_2}{y_1 . y_1} y_1 = [1\ -2\ 1] - \dfrac{0}{3}[1\ 1\ 1] = [1\ -2\ 1]$

3. $y_3 = x_3 - \dfrac{y_2 . x_3}{y_2 . y_2} y_2 - \dfrac{y_1 . x_3}{y_1 . y_1} y_1 = [1\ 2\ 3] - \dfrac{0}{6}[1\ -2\ 1] - \dfrac{6}{3}[1\ 1\ 1]$

$$= [-1\ 0\ 1]$$

vektor $G_1 = \dfrac{y_1}{\| y_1 \|} = \dfrac{[1\ 1\ 1]}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$

vektor $G_2 = \dfrac{y_2}{\| y_2 \|} = \dfrac{[1\ -2\ 1]}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{6}}\ \ \dfrac{-2}{\sqrt{6}}\ \ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right]$

vektor $G_3 = \dfrac{y_3}{\| y_3 \|} = \dfrac{[-1\ 0\ 1]}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = \left[\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ \ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

sehingga matrik $G_{3x3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ merupakan hasil **ortogonalisasi gram-schmidt** dari matrik $X_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

2.4. Diagonalisasi Matrik Bujursangkar

Definisi 2.4.1

Matrik A disebut matrik simetri jika

$$[a_{ij}]_{mxn} = [a_{ji}]_{mxn} \quad \text{atau} \quad A_{nxn} = A^T_{nxn}$$

Definisi 2.4.2

Matrik $A_{ij}(mxn)$ adalah **definit positif** ($A>0$) bila $X^T A X > 0$, $\forall\ x \neq 0$, dan disebut **Semi Definit Positif** ($A \geq 0$) bila $X^T A X \geq 0$, $\forall x$ & $\exists x \mid X^T A X = 0$, juga disebut **definit negatif** ($A < 0$) jika $X^T A X < 0$, $\forall\ x$,

contoh 2.4.1:

1. pandang matrik $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ dan $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$F = 3x_1^{\,2} + 5x_2^{\,2} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ adalah matrik definit positif

sebab nilai $X^T A X$ tak pernah negatif untuk sembarang $x \neq 0$.

2. pandang matrik $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$F = X^T A X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 3x^2$$

$$= (2x_1 - x_2)^2 + 3x^2$$

merupakan semidefinit positif ($A \geq 0$), karena bentuk $X^T A X \geq 0$, $\forall x$ dan $\exists$ x sedemikian hingga $X^T A X = 0$ misal ($x_2 = 2x_1, x_3 = 0$)

3. pandang matrik $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ dan $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$F = X^T A X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= -x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$$

merupakan definit negatif ($A < 0$), karena bentuk $X^T A X < 0$, $\forall x \neq 0$.

Definisi 2.4.3.

Matrik A bisa *didiagonalisasi secara ortogonal* jika ada suatu matrik ortogonal P sedemikian hingga $P^T A P = P^{-1} A P = D$, dengan D merupakan matrik diagonal. Matrik P dinyatakan mendiagonalisasi A secara ortogonal.

Teorema 2.4.2

Matrik A simetris jika A dapat *didiagonalisasi* secara ortogonal.

Bukti :

Andaikan matrik A dapat didiagonalisasi secara ortogonal, maka terdapat suatu matrik P yang ortogonal sedemikian hingga

$$P^T A P = D = P^{-1} A P$$

jadi $A = P D P^{-1}$, dan karena matrik P ortogonal maka $P^T = P^{-1}$

akibatnya $A^T = (P D P^T)^T$

$$A^T = P D P^T$$

$$= A$$

terbukti A Simetri sebab $A^T = A$

2.4.1 Langkah - Langkah mendiagonalisasi matrik

Adapun langkah atau prosedur yang umum dipakai didalam pendiagonalisasian matrik sebagai berikut :

1. Cari *nilai eigen* dari matrik A
2. Cari **n** *Vektor eigen* yang bebas linier dari matrik A, misal $P_1, P_2, P_3, \ldots, Pn$
3. Bentuk matrik **P** yang mempunyai $\mathbf{P_1, P_2, P_3, \ldots, Pn}$ sebagai vektor kolom
4. Bentuk Matrik **P** yang baru dengan menggenakan proses **ortogonalisasi gram-schmidt** pada matrik **P** yang terbentuk pada langkah ke 3.
5. Matrik $P^T AP$ akan didiagonalisasi dengan λ n sebagai elemen - elemen diagonal utama yang berurutan, dengan λ_i adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan vektor P_i, untuk I = 1,2,3,…,n

NB : Langkah ke **4.** hanya diperlukan jika dikehendaki suatu matrik P yang Ortogonal, Dan Mendiagonalisasi matrik A secara Ortogonal.

***Contoh* 2.4.2**

Carilah matrik P yang mendiagonalisasi matrik A = $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ serta matrik diagonal yang terbentuk !

1. Nilai eigen dicari dengan determinan $|A-\lambda I|$ = 0, dan didapatkan $\lambda_{1,2}$ = -2 dan $\lambda_3 = 4$

2. mencari n eigen vektor

- Untuk $\lambda_1 = -2$, ambil $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq [0]$ yang memenuhi pers. $(\lambda I - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ didapat **EigenSpace** $P_1 [1 , 1 , 0]$

dan juga $P_2 [1 , 0 , -1]$.

- Untuk $\lambda_3 = 4$, ambil $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq [0]$ yang memenuhi pers. $(\lambda I - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ didapat **EigenSpace** $P_3 [1 , 1 , 0]$

Sehingga secara keseluruhannya terdapat 3 vektor eigen yang bebas linier

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{dan didapatkan } P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Bentuk matrik $\mathbf{P} = \{ P_1, P_2, P_3 \}$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ yang mendiagonalisasi matrik A}$$

4. Matrik Diagonalnya $\mathbf{P^{-1} A P}$

$$\mathbf{D} = \mathbf{P^{-1} A P} = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.5 & -0.5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Dari hasil contoh yang ada elemen diagonal D_{3x3} ternyata merupakan harga dari eigen matrik A_{3x3}.