BAB II

TEORI PENUNJANG

Dalam mengestimasi m(x) diperlukan beberapa definisi tentang fungsi densitas, fungsi densitas gabungan, fungsi densitas marginal karena $m(x)=E(Y|X=x)=\dfrac{\int yf(x,y)dy}{f(x)}$, dimana f(x,y) merupakan fungsi densitas gabungan dan f(x) merupakan fungsi densitas marginal dari X.

2.1. Fungsi Densitas

Fungsi distribusi dari peubah acak kontinyu X adalah fungsi $F(x) = P\{X \le x\}$ dinyatakan untuk setiap x dari $-\infty$ sampai ∞.

Definisi 2.1. : Turunan dari F(x) yaitu $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ disebut sebagai fungsi densitas dari peubah acak kontinyu di X = x.

2.2. Fungsi Densitas Gabungan

Bila X dan Y adalah dua peubah acak, distribusi peluang terjadinya secara serempak X dan Y dinyatakan dengan fungsi f(x,y) untuk setiap nilai pasangan (x,y) dalam rentang peubah acak X dan Y.

Fungsi f(x,y) adalah fungsi densitas gabungan dari peubah acak kontinyu X dan Y bila :

1. $f(x,y) \ge 0$ untuk semua (x,y)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$

3. $P[(X,Y) \in A] = \int\int_A f(x,y)\,dxdy$ untuk setiap daerah A dibidang xy.

Contoh :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y), & \text{untuk } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{, untuk } x, y \text{ yang lain} \end{cases}$$

adalah fungsi densitas gabungan dari X dan Y.

Dapat ditunjukkan bahwa ketiga syarat fungsi densitas gabungan terpenuhi :

(i). Untuk $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ terbukti bahwa f(x,y) = $\frac{2}{5}(2x+3y) \ge 0$ dan f(x,y) = 0 untuk x,y yang lain, sehingga syarat pertama terpenuhi.

(ii). $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dxdy$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1.$$

Syarat kedua terpenuhi.

(iii), Karena A adalah daerah $\{ (x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \}$ maka

$P[(x,y) \in A] = P[0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1]$

$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dxdy$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Karena f(x,y) memenuhi ketiga syarat fungsi densitas gabungan maka f(x,y) merupakan fungsi densitas gabungan.

2.3. Fungsi Densitas Marginal

Bila diketahui fungsi densitas gabungan f(x,y) dari peubah acak kontinyu X dan Y, maka distribusi peluang g(x) dari X diperoleh dengan mengintegralkan f(x,y) terhadap Y, begitu pula distribusi peluang l(y) dapat diperoleh dengan mengintegralkan f(x,y) terhadap X. Selanjutnya g(x) dan l(y) masing – masing sebagai fungsi densitas marginal dari X dan Y.

Fungsi densitas marginal dari X dan Y dinyatakan sebagai :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad \text{dan} \qquad l(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

serta

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1 \qquad \text{dan} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} l(y)dy = 1$$

Kedua syarat terpenuhi.

2.4. Deret Taylor dan suku sisa

Jika f(x) mempunyai sejumlah (n+1) turunan yang kontinyu pada [a,b] dan c merupakan suatu titik pada [a,b], maka untuk semua $x \in [a.b]$ terdapat :

$$f(x) = f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)(x-c)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x-c)^n}{n!}+R_n$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

suku sisanya dimasukkan untuk memperhitung semua suku dari n+1 sampai tak hingga :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

dimana $\xi = c + o(x\text{-}c)$

Seringkali untuk memudahkan Deret Taylor dengan mendefinisikan $h = x - c$ sehingga Deret Taylor menjadi :

$$f(c+h) = f(c)+hf'(c)+\frac{f''(c)h^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(c)h^n}{n!}+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c+o(h))$$

2.5. Konvergensi

Definisi 2.2. :

Misalkan a_n dan β_n barisan bilangan riil

$a_n = O(\beta_n)$, jika $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\beta_n}$ = konstanta

$a_n = o(\beta_n)$, jika $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\beta_n} = 0$

$a_n \sim O(\beta_n)$, jika $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\beta_n} = c + o(1)$, $c \neq 0$

Definisi 2.3. :

Misalkan A_n dan B_n barisan peubah acak riil

$A_n = O_p(B_n)$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan riil M dan ada bilangan bulat positif N sedemikian hingga $P\{|A_n/B_n| > M\} < \varepsilon$, bila mana setiap $n > N$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$A_n = o_p (B_n)$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{ | A_n/B_n | > \varepsilon \} = 0$$

$A_n \xrightarrow{p} A$, jika $\lim_{n\to\infty} A_n - A = o_p(1)$

2.6. Fungsi Indikator

Fungsi indikator dari himpunan S didefinisikan sebagai berikut :

$$I_S(x) = \begin{cases} 1 & , \text{jika } x \in S \\ 0 & , \text{jika } x \notin S \end{cases}$$

2.7. Rataan Bersyarat

Definisi 2.4. :

Bila $F_{Y|X}(y|x)$ kontinyu atau diskrit, maka rataan bersyarat dari Y, bila X diketahui masing-masing adalah

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy$$

$$E(Y|X = x) = \sum y f_{Y|X}(y|x)$$

2.8. Sifat – sifat Estimator

Terdapat beberapa sifat penduga yaitu : konsisten, tak bias, dan MSE yang digunakan dalam bab pembahasan.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.8.1. Konsisten

Definisi 2.5.:

Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan peubah acak dengan fungsi distribusi $F(x_1, x_2, \ldots, x_n | \theta)$ dengan θ tak diketahui, maka barisan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dinamakan barisan penduga konsisten untuk θ jika :

$$X_n \xrightarrow{p} \theta$$

2.8.2. Tak bias

Definisi 2.6. :

$X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah penduga tak bias (unbias) untuk θ, jika $E[x_n]$ sama dengan θ.

Jika $X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ penduga bias . Jika $X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq \theta$.

Definisi 2.7. :

$X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dikatakan penduga tak bias asytotik untuk θ, jika:

$\lim_{x \to \infty} X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$

2.8.3. Mean Square Error atau MSE

$X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah penduga untuk θ berdasarkan peubah acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ maka MSE didefinisikan sebagai berikut :

$$MSE[X_n] = E[(X_n - \theta)^2]$$

Atau dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut :

$$\begin{aligned} MSE[X_n] &= E[(X_n - E[X_n] + E[X_n] - \theta)^2] \\ &= E[((X_n - E[X_n]) + (E[X_n] - \theta))^2] \\ &= E[((X_n - E[X_n])^2 + 2(X_n - E[X_n])\theta + (E[X_n] - \theta)^2] \end{aligned}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= E[(X_n - E[X_n])]^2 + (E[X_n] - \theta)^2$$

$$= Var[X_n] + (bias)^2[X_n]$$

Jadi MSE[X_n] sama dengan varian ditambah bias kuadrat. Jika X_n adalah penduga yang tak bias maka MSE[X_n] merupakan variannya.

2.9. Estimasi Densitas Kernel

Kernel K didefinisikan sebagai berikut :

$$K_h(x) = \frac{1}{h}K\left(\frac{x}{h}\right)$$

dengan h merupakan penghalus kernel yang dikenal dengan bandwidth. Rataan keseluruhan fungsi kernel dalam suatu pengamatan dinyatakan dengan penduga densitas kernel :

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{n}\sum K_h(x - X_i)$$

$$= \frac{1}{nh}\sum K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

Kernel densitas mempunyai sifat-sifat :

1. Fungsi kernel simetris disekitar 0 dan nilai integralnya sama dengan satu. Jika $\int K(s)ds = 1$ maka $\int \hat{f}_h(x)dx = 1$ dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$\int \hat{f}_h(x)dx = \int \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(x - X_i)dx$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int K_h(x - X_i)dx$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dengan mensubtitusikan $s = \dfrac{x - X_i}{h} \Rightarrow dx = hds$ maka :

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int h^{-1}K(s)hds$$

$$= \int K(s)ds = 1$$

2. Karena kernel merupakan fungsi densitas maka estimasi kernel merupakan densitas pula.

$$\int K(x)dx = 1 \Rightarrow \int \hat{f}_h(x)dx = 1$$

3. Semua fungsi kernel selalu positif. Hal ini digunakan untuk memastikan bahwa $\hat{f}_h(\bullet)$ adalah fungsi densitas.

Dikenal ada 7 macam fungsi kernel sebagai berikut :

1. Uniform $\frac{1}{2}\mathrm{I}(|U| \le 1)$
2. Triangel $(1-|U|)\mathrm{I}(|U| \le 1)$
3. Epanechnikov $\frac{15}{16}(1-U^2)^2\mathrm{I}(|U| \le 1)$
4. Quartic $\frac{15}{16}(1-U^2)^2\mathrm{I}(|U| \le 1)$
5. Triweight $\frac{35}{32}(1-U^2)^2\mathrm{I}(|U| \le 1)$
6. Gaussian $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{1}{2}U^2\right)$
7. Cosinus $\dfrac{\pi}{4}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}U\right)\mathrm{I}(|U| \le 1)$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Akan diselidiki sifat tak bias asymtotik dari dari $\hat{f}_h(x)$. Jika X_i berdistribusi identik maka :

$$E\left[\hat{f}_h(x)\right] = E\left[\frac{1}{nh}\sum K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)\right]$$

$$= E\left[K\left(\frac{x-X}{h}\right)\right]$$

$$= E\frac{1}{h}\int K\left(\frac{x-u}{h}\right)f(u)du$$

misal :

$\frac{x-u}{h} = -s$ maka $-sh=x-u$, $hds = du$

$$E\left[\hat{f}_h(x)\right] = \int K(s)f(x+sh)ds$$

Karena bersifat simetris, $\int K(s)ds = 1$, $h \to 0$

$$E\left[\hat{f}_h(x)\right] = \int K(s)f(x)ds$$

$$= f(x)\int K(s)ds = f(x)$$

kita ekspansikan $f(x + sh)$ ke dalam ekspansi Taylor dengan asumsi $f \in C^2$, f dideferensialkan dua kali

$$\text{Bias}\left[\hat{f}_h(x)\right] = \int K(s)f(x+sh)ds - f(x)$$

$$= \int\left\{K(s)f(x) + K(s)f'(x)sh + K(s)f''(x)\frac{s^2h^2}{2} + o(h^2)\right\}ds - f(x)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= f(x) + 0 + K(s) f''(x) \frac{s^2 h^2}{2} + o(h^2) - f(x)$$

$$\text{Bias}\left[\hat{f}_h(x)\right] = \frac{h^2}{2} f''(x) \mu_2(K) + o(h^2)$$

Dimana $\mu_2(K) = \int s^2 K(s) ds$

Sehingga dapat dikatakan Bias$\left[\hat{f}_h(x)\right]$ sebanding dengan fungsi kuadrat dari h.

$$\text{Var}\left[\hat{f}_h(x)\right] = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left[\sum K_h(x - X_i)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum \text{Var}\left[K_h(x - X_i)\right]$$

$$= \frac{1}{n} \text{Var}\left[K_h(x - X_i)\right]$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ E\left[K_h^2(x - X_i)\right] - \left(E\left[K_h(x - X_i)\right]\right)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{h^2} \int K^2\left(\frac{x-u}{h}\right) f(u) du - \left(f(x) + o(h)\right)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{h} \int K^2(s) f(x + sh) ds - \left(f(x) + o(h)\right)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{h} \|K\|_2^2 \left(f(x) + o(h)\right) - \left(f(x) + o(h)\right)^2 \right\}$$

$$\text{Var}\left[\hat{f}_h(x)\right] = \frac{1}{nh} \|K\|_2^2 f(x) + o\left((nh)^{-1}\right) \qquad , nh \to \infty$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Sehingga dapat dikatakan $\mathrm{Var}\left[\hat{f}_h(x)\right]$ sebanding dengan fungsi kuadrat dari $(nh)^{-1}$.

Jadi $\mathrm{MSE}\left[\hat{f}_h(x)\right] = \mathrm{Var}\left[\hat{f}_h(x)\right] + \mathrm{Bias}^2\left[\hat{f}_h(x)\right]$ $, h \to 0,\ nh \to \infty$

$$\mathrm{MSE}\left[\hat{f}_h(x)\right] = \frac{1}{nh}\|K\|_2^2 f(x) + \frac{h^4}{4}\left(f''(x)\mu_2(K)\right)^2 + o\left((nh)^{-1}\right) + o\left(h^4\right)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)