BAB II

JARINGAN TRANSPORTASI PADA GRAPH BERARAH

Pada permasalahan transportasi, seperti halnya bentuk jaringan jalan raya bentuk jaringan tersebut dapat dimodelkan kedalam bentuk graph berarah. Pada bab ini akan dijelaskan beberapa teori penunjang yang meliputi graph berarah, relasi biner dan relasi transitif yang membahas tentang hubungan antara dua kota serta jaringan transportasi pada graph berarah.

2.1 Graph Berarah

Definisi 2.1.

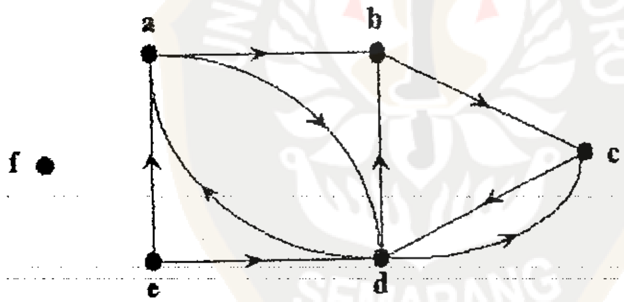
Suatu graph berarah G = (V,E) (*directed graph* atau *digraph*) adalah suatu graph yang terdiri dari himpunan berhingga verteks-verteks (*vertex*), V={v_1,v_2,...v_3}, dan himpunan berhingga garis E (*edge*) yang terdiri dari pasangan terurut (v_i,v_j) dari himpunan berhingga V.

Elemen dari himpunan berhingga V disebut verteks-verteks dan pasangan terurut (v_i,v_j) disebut rusuk berarah (*directed edge*) dari graph berarah. Secara geometris, suatu graph berarah dapat divisualisasikan dengan menggambarkan verteks-verteks sebagai titik-titik atau suatu lingkaran kecil yang diberi label dan menggambarkan rusuk berarah (v_i,v_j) dengan suatu garis bertanda panah dari verteks v_i ke verteks v_j yang disebut rusuk berarah.

Pada suatu graph berarah, tidak semua verteks harus dihubungkan dengan verteks lainnya, seperti pada gambar 2.1, suatu graph berarah dapat mempunyai "komponen" verteks-verteks yang terpisah (*isolated vertex*), yang berarti hanya dihubungkan dengan dirinya sendiri atau tidak dihubungkan dengan verteks lainnya.

Contoh 2.1

Misalkan G = (V,E) adalah suatu graph berarah dengan himpunan verteksnya adalah V = { a,b,c,d,e,f } dan garis berarah E = { (a,b),(a,d) (b,c), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c), (e,a), (e,d)} sehingga dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 2.1 Contoh Graph berarah dengan 6 verteks (titik) dan 9 rusuk (edge)

Definisi graph dapat diperluas dalam beberapa cara. Misalkan G = (V,E), dengan V suatu himpunan dan E suatu himpunan ganda yang unsur-unsurnya berupa pasangan terurut $V \times V$. Graph G ini dinamakan graph ganda berarah. Secara geometris, graph ganda berarah dapat dinyatakan sebagai suatu himpunan verteks-verteks V dengan suatu himpunan rusuk berarah E antara verteks-verteks tanpa ada kendala mengenai banyaknya rusuk berarah dari satu verteks ke verteks lainnya. Sebagai misal, gambar 2.1. menunjukkan sebuah graph ganda. Selanjutnya dapat diperhatikan penyajian secara grafis suatu peta jalan raya dengan rusuk antara dua kota menyatakan sebuah lajur pada jalan raya antara kedua kota. Karena jalan raya antara dua kota sering mempunyai banyak lajur, representasi ini menghasilkan graph ganda.

Sebuah rusuk dikatakan berisidensi (*incident*) dengan kedua verteks yang dihubungkan, sebagai misal, rusuk (a,b) berisidensi dengan verteks a dan verteks b. atau dikatakan bahwa rusuk (a,b) berisidensi *dari* a dan berisidensi *ke* b. untuk rusuk (a,b) verteks a dinamakan verteks awal (*initial vertex*) dan verteks b dikatakan verteks terminal (*terminal vertex*). Suatu rusuk(a,a) yang berisidensi *dari* dan *ke* verteks yang sama dinamakan *loop*. Sebuah verteks dinamakan verteks terasing (*isolated vertex*) jika tidak ada rusuk yang berisidensi dengannya.

Definisi 2.2.

Dua verteks dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika keduanya dihubungkan oleh suatu rusuk.

Selain itu, untuk rusuk (a,b) verteks a dikatakan bertetangga ke verteks b, sedangkan verteks b dikatakan bertetangga dari verteks a. Pada contoh 2.1 verteks a bertetangga dengan verteks e.

2.1.1. Graph Berarah Terbobotl

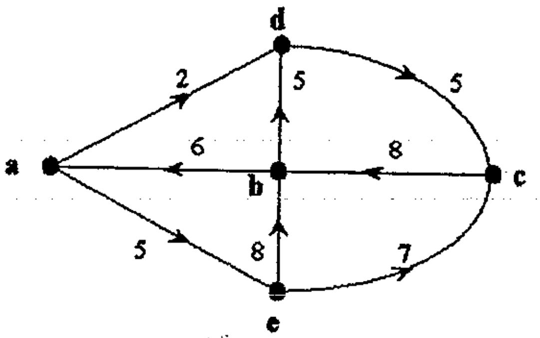
Pada suatu graph berarah, dapat ditambahkan suatu fungsi φ yang merupakan informasi lain pada rusuk berarah ataupun pada verteks-verteksnya. Fungsi $\varphi : E \to Z^+$ dimaksudkan suatu fungsi yang memetakan setiap rusuk $e_i \in E$ kepada suatu bilangan bulat positif, pada beberapa aplikasi dimungkinkan untuk memberi bilangan riel pada setiap rusuknya. Dengan demikian graph berarah dengan suatu fungsi pada rusuk–rusuknya atau pada verteks-verteksnya dapat dinotasikan dengan G = (V,E, φ)

Definisi 2.3.

Nilai atau harga dari suatu garis dalam graph disebut bobot garis, dan dilambangkan dengan *w*(i,j) atau *w*(e). Bobot dari suatu garis dapat bernilai positif, nol atau negatif.

Suatu graph berarah yang setiap garisnya mempunyai bobot disebut *jaringan kerja berarah* (network) dan dinotasikan dengan G = (V,E,*w*). Sebagai misal, pada suatu graph yang menggambarkan peta jalan raya antara kota-kota (jaringan transportasi), dapat ditambahkan suatu informasi pada setiap rusuk yang menunjukkan jarak atau panjang lintasan antar kota-kota tersebut.

Contoh 2.2.



Gambar 2.2. Contoh graph berarah sebagai jaringan kerja

2.2. Relasi Pada Graph Berarah

Dimisalkan A dan B merupakan himpunan tidak kosong. Suatu relasi R dari A ke B adalah subset dari A × B, jika $R \subseteq A \times B$ dan $(a,b) \in R$ dikatakan bahwa a direlasikan ke b oleh R dan dinotasikan dengan $a\ R\ b$. Jika a tidak direlasikan pada b maka dinotasikan dengan aRb

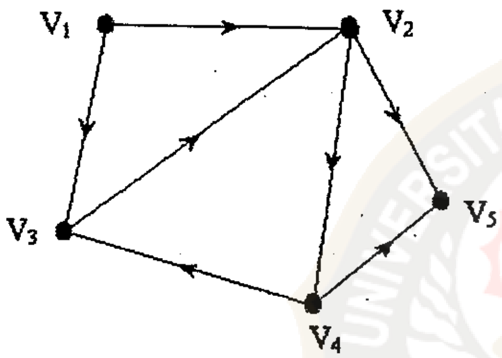
Definisi 2.4.

Suatu relasi $R \subseteq A \times A$ adalah suatu relasi pada himpunan tidak kosong A, atau relasi dari A ke A.

Berdasarkan definisi diatas, suatu relasi R pada himpunan A dimaksudkan sebagai himpunan pasangan terurut dari anggota A, jika (a,b) merupakan anggota dari relasi R maka a dikatakan mempunyai relasi pada b dalam R.

Jika R adalah relasi pada himpunan A dan jika a dan b merupakan anggota A, maka $(a,b) \in R$ atau $(a,b) \notin R$. Dapat didefinisikan suatu fungsi $T : A \times A \rightarrow \{0,1\}$ dengan $T(a,b) = 1$ jika $(a,b) \in R$ dan $T(a,b) = 0$ jika $(a,b) \notin R$, yang berarti bahwa nilai dari fungsi T pada (a,b) adalah 1 jika a bertetangga ke b (a direlasikan ke b oleh R) dan nilai dari fungsi T pada (a,b) adalah 0 jika a dan b tidak bertetangga (a tidak direlasikan ke b oleh R.). Sebagai ilustrasi dari relasi pada graph berarah dapat dimisalkan suatu jaringan transportasi seperti pada gambar 2.3. Jika $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5,\}$ himpunan dari kota-kota pada suatu daerah dan R suatu relasi yang menyatakan bahwa adanya lintasan atau hubungan antar kota satu dengan lainnya, maka dapat dibentuk suatu relasi biner pada V, yaitu: $R = \{(v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_2,v_4), (v_2,v_5), (v_3,v_2), (v_4,v_3), (v_4,v_5)\}$

Rusuk – rusuk pada graph berarah G = (V,E) menyebabkan suatu relasi yang disebut relasi tetangga Â pada himpunan verteks V. Misalkan a dan b merupakan anggota dari V, maka a Â b jika dan hanya jika a,b anggota E, dengan kata lain aÂb dimaksudkan bahwa b dapat dijangkau dari a dengan berjalan sepanjang rusuk (a,b)∈ G.



$R = \{(v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_2,v_4),$
$(v_2,v_5), (v_3,v_2), (v_4,v_3), (v_4,v_5)\}$

Gambar 2.3. Suatu jaringan transportasi dan relasi biner yang menunjukkan pasangan kota yang berhubungan.

2.3. Matrik Relasi

Jika A = {$a_1, a_2, \ldots, a_3$} dan B = { $b_1, b_2, \ldots ,b_3$} adalah himpunan berhingga yang masing – masing mempunyai *m* dan *n* anggota dan *R* adalah sutu relasi dari A ke B, maka relasi *R* dapat dinyatakan matrik M = (m_{ij}) yang berukuran *m x n* yang didefinisikan sebagai berikut:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } (a_i, b_j) \in R \\ \\ 0 & \text{jika } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh 2.3.

Dari gambar 2.3. diatas tentang graph berarah dapat dibentuk matrik relasi

$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kebalikannya, jika diberikan suatu subset A dan B dengan ukuran n, maka suatu matrik $m \times n$ dengan elemennya bernilai 0 atau 1 menyatakan suatu relasi.

Seperti pada gambar diatas, jika label pada baris mengindikasikan bahwa dalam graph berarah dari relasi R terdapat suatu arah dari v_1 ke v_2 dan dari v_1 ke v_3 dan bukan dari v_3 ke v_1.

2.4. Relasi transitif

Definisi 2.5.

Suatu relasi R adalah transitif jika $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$, maka $(a,c) \in R$

Misalkan A = {a,b,c} dan X = {(a,a), (a,b), (a,c), (b,c)}. Dengan mudah dapat dilihat bahwa X sebuah relasi transitif yaitu dengan adanya relasi Y = {(b,c)}, tetapi Z = { (a,b), (b,c) } bukan relasi transitif. Dalam bentuk graph berarah, suatu relasi transitif dimaksudkan bahwa jika ada tanda panah dari a ke b dan dari b ke c, maka terdapat juga tanda panah dari a ke c

Misalkan R sebuah relasi biner pada A, perluasan transitif dari R dilambangkan dengan R_1, ialah suatu relasi biner pada A sedemikian rupa sehingga R_1 mengandung R ($R \subseteq R_1$) dan selain itu, jika (a,b) dan (b,c) ada di dalam R, maka (a,c) ada di dalam R_1. Misalkan R_2 adalah adalah perluasan transitif dari R_1, dan secara umum, misalkan R_{i+1} adalah perluasan transitif dari R_i, Maka didefinisikan suatu transitif closure (tutupan menghantar) dari R dinotasikan dengan R^*, sebagai paduan (union) himpunan-himpunan $R, R_1, R_2, \ldots$ Sebagai ilustrasi, misalkan A himpunan kota-kota dan R sebuah relasi biner pada A sedemikian rupa sehingga pasangan terurut (a,b) ada di dalam R jika ada suatu lintasan dari kota a ke kota b. Dengan demikian perluasan transitif dari R, yaitu R_1 menggambarkan bagaimana suatu kota dapat dijangkau dari kota lainnya, baik melalui hubungan langsung ataupun melalui satu kota antara. Begitu pula perluasan transitif R_1, yaitu R_2, menggambarkan bagaimana suatu kota dapat dijangkau dari kota lainnya melalui hubungan langsung atau melalui sebanyak-banyaknya tiga kota antara. Tutupan menghantar (transitif closur) dari R yaitu R^* menggambarkan bagaimana suatu kota dapat dijangkau dari kota lainnya melalui hubungan langsung ataupun melalui kota antara sebanyak-banyaknya.

Karena R_n mengandung pasangan (a,b) sedemikian hingga terdapat lintasan dengan panjang n dari verteks a ke verteks b, berarti R^* merupakan gabungan dari semua himpunan R_n, dengan kata lain $R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$

2.5 Jaringan Transportasi pada Graph Berarah

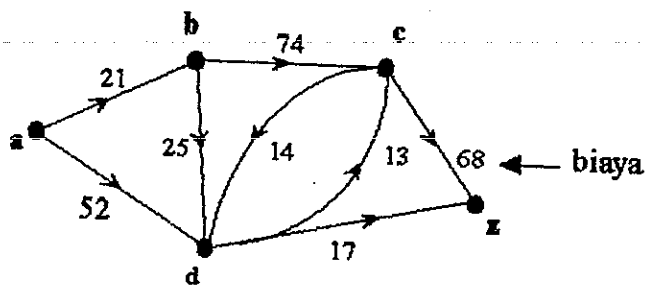
Definisi 2.6.

Suatu graph terboboti dinamakan jaringan transportasi (*transport network*) jika sejumlah syarat berikut dipenuhi:

1. Graph tersebut terhubungkan dan tidak mempunyai lup (*loop*).
2. Terdapat satu dan hanya satu verteks di dalam graph tersebut yang tidak mempunyai rusuk masuk.
3. Terdapat satu dan hanya satu verteks di dalam graph tersebut yang tidak mempunyai rusuk keluar.
4. Pembobot setiap rusuk berupa sebuah bilangan nyata tidak negatif.

Di dalam suatu jaringan transportasi, verteks yang tidak mempunyai rusuk masuk disebut sumber (*source*) dan dilambangkan dengan a, verteks yang tidak mempunyai rusuk keluar disebut tujuan (*sink*) dan dilambangkan dengan z, pembobot suatu rusuk (i,j) dilambangkan dengan w(i,j).

Kiranya jelas, suatu jaringan transportasi merepresentasikan suatu model umum bagi transportasi benda/barang dari tempat asal ke tempat tujuan melalui berbagai rute pengiriman, dengan kendala berupa besarnya biaya untuk setiap lintasan yang dilalui rute – rute tersebut.



Gambar 2.7. Suatu ilustrasi tentang jaringan transportasi

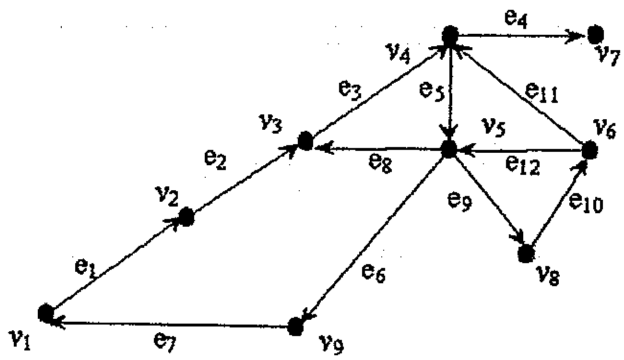
Definisi 2.7.

Suatu lintasan (*path*) dengan panjang k dari verteks a ke verteks b didefinisikan sebagai barisan dari k +1 verteks $v_0, v_2, \ldots, v_{k+1}$ dan ditulis dengan notasi

$$\mathbf{P} = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$$

sedemikian hingga verteks yang merupakan pangkal dari suatu garis menjadi ujung dari garis berikutnya kecuali verteks pertama dan terakhir (v_0 dan v_k)

Dalam notasi diatas, garis pertama akan terbentuk dari verteks v_0 dan verteks v_1, garis kedua terbentuk dari verteks v_1 dan verteks v_2, dan seterusnya. Dengan demikian, suatu lintasan juga merupakan barisan dari rusuk (e_1, e_2, ..., e_k). Suatu lintasan dikatakan sederhana (*simple*) jika ia tidak mencakup rusuk yang sama dua kali. Suatu lintasan dikatakan elementer (*elementary*) jika ia tidak bertemu verteks yang sama dua kali. Dengan kata lain tidak ada dua rusuk di dalam barisan itu yang memiliki verteks terminal yang sama. Dalam gambar 2.4. (e_1, e_2, ,e_3, e_4) adalah sebuah lintasan; (e_1, e_2, ,e_3, e_5, e_8, e_3, e_4) adalah sebuah lintasan, namun bukan yang sederhana; (e_1, e_2, ,e_3, e_5, e_9, e_{10}, e_{11}, e_4) adalah sebuah lintasan sederhana, namun bukan yang elementer. Dalam contoh tentang peta jalan raya, suatu lintasan dari verteks satu ke verteks lainnya di dalam graph sesungguhnya menggambarkan jalan raya penghubung antara kota-kota yang dinyatakan oleh verteks-verteks tersebut.



Gambar 2.4. Contoh lintasan pada jalan raya

Definisi 2.8.

Rangkaian (*circuit*) ialah suatu lintasan (e_1, e_2, ... ,e_k) yang verteks terminalnya, e_k, berimpit dengan verteks awalnya, e_1. Suatu rangkaian yang dibentuk oleh lintasan yang tidak berulang disebut *cycle*

Suatu rangkaian dikatakan sederhana (*simple*) jika rangkaian tersebut tidak mencakup rusuk yang sama dua kali. Suatu rangkaian dikatakan elementer (*elementary*) jika rangkaian tersebut tidak melalui verteks yang sama dua kali. Di dalam gambar 2.4. (e_1, e_2, ,e_3, e_5, e_9, e_{10}, e_{12}, e_6, e_7) adalah sebuah rangkaian sederhana, namun bukan elementer; sedangkan (e_1, e_2, ,e_3, e_5 , e_6, e_7) adalah sebuah rangkaian elementer.

Pada berbagai masalah, suatu lintasan atau suatu jaringan juga direpresentasikan dengan barisan verteks-verteks yang ditemuinya. Sebagai misal, lintasan (e_1, e_2, ,e_3, e_4) di dalam gambar 2.4. dapat juga direpresentasikan sebagai

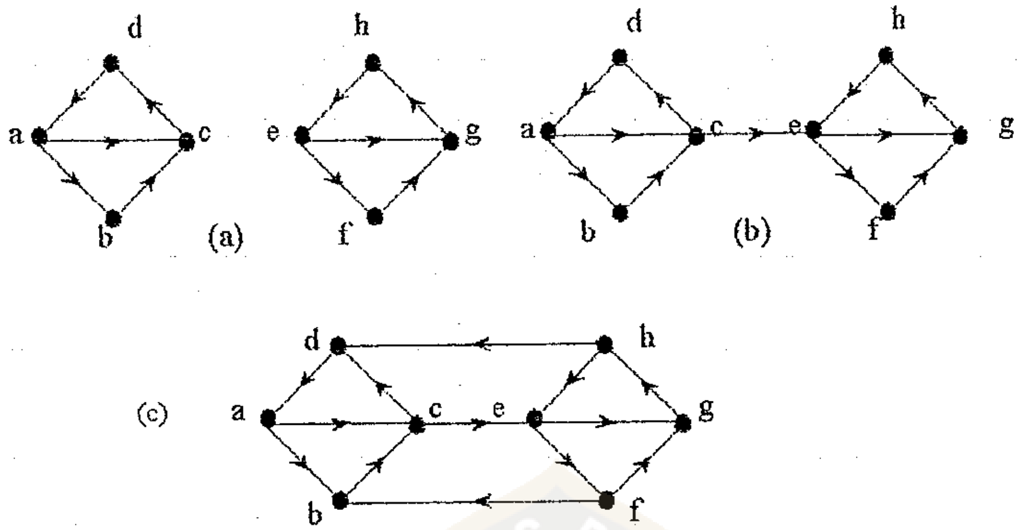
$(v_1, v_2, ,v_3, v_4, v_7)$, sedangkan rangkaian $(e_5, e_9, ,e_{10}, e_{11})$ dapat direpresentasikan sebagai $(v_4, v_5, ,v_8, v_6, v_4)$.

Teorema 2.1. Di dalam suatu graph (berarah ataupun tak berarah) dengan n verteks, jika ada suatu lintasan dari verteks v_1 ke verteks v_2, maka ada suatu lintasan dengan tidak lebih dari n – 1 rusuk dari verteks v_1 ke verteks v_2.

BUKTI: Misalkan ada suatu lintasan dari v_1 ke v_2. Misalkan pula $(v_1,\ldots,v_l,\ldots,v_2)$ adalah barisan verteks yang ditemui lintasan itu ketika ditelusuri dari v_1 dan v_2. Jika ada l buah rusuk dalam lintasan itu, maka ada $l + 1$ verteks di dalam barisan verteks tersebut. Agar l lebih besar dari pada n-1, harus ada verteks v_k yang muncul lebih dari sekali di dalam barisan itu. Dengan kata lain barisan verteks itu mempunyai bentuk umum $(v_1,\ldots,v_k,\ldots,v_k,\ldots,v_2)$. Jika rusuk – rusuk di dalam lintasan yang membawa v_k kembali ke v_k itu dibuang, akan diperoleh sebuah lintasan dari v_1 ke v_2 yang memiliki lebih sedikit rusuk daripada jumlah rusuk semula. Argumen ini dapat diulang sampai diperoleh lintasan dengan n-1 rusuk atau lebih sedikit lagi. □

Definisi 2.9.

Suatu graph berarah disebut terhubung jika graph dasarnya merupakan graph terhubung, dan disebut tidak terhubung jika tidak demikian. Graph berarah disebut terhubung kuat jika ada lintasan di graph G dari setiap verteks ke setiap verteks lainnya.

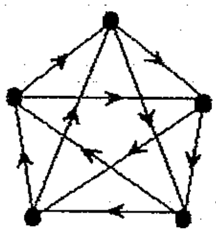


Gambar 2.5. (a) graph tidak terhubung (b) graph terhuubung dan

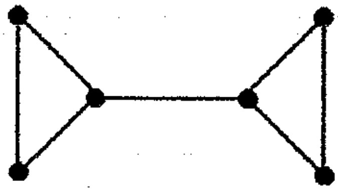
(c) graph yang terhubung kuat

Sebagai alternatif, hal di atas dapat dipikirkan sebagai mengemudi kenderaan keliling suatu kota yang sistem jalan rayanya satu arah. Jika kota itu terhubung kuat berarti dapat bepergian dari bagian kota mana saja dan tiba di bagian kota lainnya yang diinginkan dengan mengikuti arah jalan-jalan tersebut. Jika kotanya hanya terhubung, berarti untuk berpergian dari suatu bagian kota ke bagian lainnya tidak selalu mudah. Karena itu, setiap graph berarah yang terhubung kuat adalah terhubung, tetapi tidak setiap graph berarah yang terhubung adalah terhubung kuat.

Dalam gambar 2.6(a) berikut terlihat bahwa sisi-sisi graph G dapat diberi arah sedemikian hingga diperoleh graph berarah yang terhubung kuat. Sebaliknya, tidak mungkin untuk memberi arah sisi-sisi graph pada gambar 2.6(b) sedemikian hingga diperoleh graph berarah yang terhubung kuat, karena sisi yang merupakan 'jembatan' harus memiliki arah tertentu.



(a)



(b)

Gambar 2.6. Suatu graph yang dapat dibuat (a) terhubung kuat dan (b) tidak terhubung kuat

Dapat dibayangkan bahwa graph pada gambar 2.6(b) menunjukkan sistem jalan raya dua arah yang ingin dibuat satu arah. Jelas masalah ini tidak terpecahkan karena ada bagian-bagian kota yang tidak dapat dicapai dari bagian kota lainnya. Sehingga disusun definisi berikut.

Definisi 2.10.

Graph G dikatakan terorientasi (*orientable*) jika graph itu merupakan graph dasar suatu graph berarah yang terhubung kuat, yaitu jika dimungkinkan untuk memberi arah sisi-sisi G sedemikian hingga diperoleh graph berarah yang terhubung kuat.

Terlihat, jika sebuah graph memuat sisi 'jembatan' maka graph tersebut tidak dapat terorientasi.

Definisi 2.11.

Sebuah sisi dalam graph terhubung G disebut jembatan, jika sisi tersebut dihilangkan akan menyebabkan terjadinya graph tidak terhubung.

Teorema 2.2.

Suatu graph G yang terhubung adalah terorientasi jika dan hanya jika graph tersebut tidak memiliki jembatan.

BUKTI. Telah diamati bahwa graph terorientasi tidak dapat memuat jembatan. Untuk membuktikan konversinya, dimisalkan bahwa G adalah graph terhubung tanpa jembatan. Harus ditunjukkan bahwa dimungkinkan untuk memberi arah sisi-sisi G sedemikian hingga diperoleh graph berarah yang terhubung kuat.

Karena tidak ada jembatan, setiap sisi harus dimuat oleh sikel (*cycle*) tertentu. Ambil sembarang sikel C_1 di G dan beri arah pada sisinya untuk memperoleh sikel berarah, sehingga dari setiap verteks C_1 dapat sampai pada verteks lain dari C_1 dengan mengikuti arah rusuknya.

Selanjutnya ambil sembarang sisi (tidak pada C_1) yang insiden pada sebuah verteks dalam C_1. Verteks ini dimuat oleh sikel C_2 tertentu di G, dan sisi-sisi C_2 diberi arah secara siklis, kecuali untuk sisi di C_1 yang telah memiliki arah. Sekarang dapat sampai pada sembarang verteks lain di C_1 atau C_2 dari sembarang verteks C_1 atau C_2 dengan mengikuti arah rusuk-rusuknya. Karena G adalah terhubung, cara ini dapat dilanjutkan hingga semua sisi G mendapat arah. Hasilnya merupakan graph berarah yang terhubung kuat. □

Definisi 2.12.

Suatu verteks v dikatakan terjangkau (*reachable*) dari verteks u dalam graph berarah G=(V,E,φ) jika terdapat suatu lintasan dari u ke v.

Dapat dilihat bahwa konsep dari keterjangkauan tergantung pada keberadaan satu lintasan yang terpilih jika terdapat lebih dari satu lintasan dari satu verteks u ke verteks v.

Untuk sembarang pasangan dari verteks u dan v dalam G yang mana terdapat suatu rusuk (u,v) maka rusuk – rusuk yang searah dapat dihilangkan dan diganti dengan satu rusuk saja. Sehingga menghasilkan graph G^* yang lain yang lebih sederhana yang ekuivalen dengan graph asal G sejauh keterjangkauan tersebut diperhatikan.