BAB II

MATERI PENUNJANG

Dalam melakukan pencarian taksiran parameter terbaik model linier mixed dengan metode maksimum likelihood untuk pemodelan data longitudinal, ada beberapa teori-teori dasar yang harus diperhatikan. Teori-teori ini akan digunakan sebagai materi penunjang untuk mencari taksiran terbaik model linier mixed dengan metode maksimum likelihood.

2.1 Estimator

Definisi 2.1 :

Jika X sebuah variabel acak dengan distribusi fungsi f(x) mempunyai parameter θ yang tidak diketahui, dan jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sebuah sampel acak yang besarnya n dari x_i, maka statistik $\hat{\theta} = h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yang berhubungan dengan θ disebut estimator θ.

Misalnya sebuah variabel acak X yang berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan varian σ^2 diketahui. Rata-rata sampel $\bar{x}$ adalah suatu estimator tunggal rata-rata populasi μ yang tidak diketahui. Maka $\hat{\mu} = \bar{x}$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Sifat-sifat estimator yang baik :

1. Suatu estimator $\hat{\theta}$ disebut sebagai estimator takbias bagi parameter θ, jika :

   $E(\hat{\theta}) = \theta$

   $E[h(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \theta$

   Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suatu variabel acak dengan rata-rata μ dan varian σ^2, dan jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah sampel acak yang besarnya n dari x_i. Ditunjukkan bahwa rata-rata sampel $\bar{x}$ dan varian sampel S^2 adalah estimator yang takbias dari μ dan σ^2.

   Estimator takbias dari μ adalah :

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} E \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(x_i)$$

   dan karena $E(x_i) = \mu$, untuk semua i = 1, 2, ..., n

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu = \mu$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dan estimator takbias untuk σ^2 adalah :

$$E(S^2) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}E\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n-1}E\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+\bar{x}^2-2\bar{x}x_i)$$

$$= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E(x_i^2)-nE(\bar{x}^2)\right)$$

Karena

$E(x_i^2) = \mu^2+\sigma^2$ dan

$E(\bar{x}^2) = \mu^2+\frac{\sigma^2}{n}$

maka

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mu^2+\sigma^2)-n(\mu^2+\frac{\sigma^2}{n})\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}(n\mu^2+n\sigma^2-n\mu^2-\sigma^2)$$

$$= \sigma^2$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2. Estimator $\hat{\theta}$ merupakan estimator terbaik atau estimator yang mempunyai ragam minimum, jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

   a. $E(\hat{\theta}) = \theta$

   b. σ_{θ}^{2} minimum, artinya apabila dibandingkan dengan penaksir yang θ yang lainnya, maka $\hat{\theta}$ mempunyai ragam terkecil.

   Contoh :

   Ditunjukkan bahwa rata-rata sampel $\bar{x}$ adalah estimator takbias dengan varian minimum terhadap rata-rata sebuah distribusi normal dengan varian diketahui.

   Bukti :

$$\ell n\, f(x,\mu) = \ell n(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}\exp[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2]$$

$$= -\ell n(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

   Dari ketaksamaan Cramer-Rao, didapatkan :

$$V(\bar{x}) \geq \frac{1}{nE\left\{\frac{d}{d\mu}\left(-\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)\right\}^2}$$

$$\geq \frac{1}{nE\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\geq \frac{1}{n\left(\frac{E(x-\mu)^2}{\sigma^4}\right)}$$

$$\geq \frac{1}{n\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^4}\right)}$$

$$\geq \frac{\sigma^2}{n}$$

Maka kita ketahui, bahwa umumnya varian rata-rata sampel adalah :

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

3. Jika $\hat{\theta}_n$ sebuah estimator θ berdasarkan sampel random yang besarnya n, kita katakan bahwa $\hat{\theta}_n$ adalah konsisten untuk θ jika :

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1$$

Konsisten adalah sebuah sifat untuk sampel yang besar, karena menjelaskan batasan tingkah laku estimator $\hat{\theta}$ yang besarnya sampel cenderung menuju tak terhingga. Hal ini biasanya sukar untuk membuktikan bahwa sebuah estimator adalah konsisten dengan menggunakan definisi di atas. Tetapi estimator yang mempunyai rata-rata error kuadrat (atau varian, jika estimator tersebut adalah takbias)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

cenderung menuju nol dengan sampel yang besarnya mendekati tak terhingga adalah konsisten.

contoh :

$\overline{X}$ sebuah estimator yang konsisten pada rata-rata sebuah distribusi normal, karena $\overline{X}$ adalah takbias dan $\lim_{n\to\infty} V(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} (\sigma^2/n) = 0$

Rata-rata error kuadrat suatu estimator $\hat{\theta}$ didefinisikan sebagai :

$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$

Rata-rata error kuadrat dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$MSE(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 + [\theta - E(\hat{\theta})]^2$

Rata-rata error kuadrat adalah suatu kriteria yang penting untuk perbandingan dua estimator. Dua macam estimator dapat dibandingkan atas dasar efesiensi relatif, misalnya $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ masing-masing merupakan estimator bagi θ, maka efesiensi relatif dari $\hat{\theta}_2$ terhadap $\hat{\theta}_1$ adalah :

$$R(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1) = \frac{E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2}{E(\hat{\theta}_2 - \theta)^2}$$

Jika R > 1, maka secara relatif $\hat{\theta}_2$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_1$. Jika R = 1, maka kedua estimator $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ mempunyai tingkat efisiensi yang sama. Sedangkan jika R < 1, maka secara relatif $\hat{\theta}_1$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_2$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.2 Taksiran Maksimum Likelihood

Prosedur taksiran maksimum likelihood menguji apakah taksiran maksimum yang tak diketahui dari fungsi likelihood suatu sampel nilainya sudah memaksimumkan fungsi itu.

Definisi

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah sampel random dari populasi dengan distribusi fungsi $f(x,\theta)$, dimana parameter tunggal θ tidak diketahui. Maka fungsi likelihood sampel tersebut adalah :

$$L(\theta) = f(x_1,\theta).f(x_2,\theta)\ldots f(x_n,\theta)$$

Bila fungsi likelihood terdeferensialkan ke θ , maka taksiran maksimum likelihood yang mungkin adalah :

$$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots,\hat{\theta}_k) \ni \frac{\partial L(\theta)}{\partial \hat{\theta}_i} = 0$$

Untuk membuktikan bahwa $\hat{\theta}_i$ benar-benar memaksimumkan $L(\theta)$ harus ditunjukkan :

$$\left.\frac{\partial L^2(\theta)}{\partial \hat{\theta}_i^2}\right|_{\theta_i=\hat{\theta}_i} < 0$$

Dalam banyak kasus, dimana deferiansi digunakan akan lebih mudah bekerja pada logarima natural dari $L(\theta)$, yaitu :

$K(\theta) = \ell n\, L(\theta)$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Hal ini dimungkinkan karena fungsi log naik tegas pada (θ, ∞) yang berarti bahwa :

$L(\theta) = \ln L(\theta)$ mempunyai ekstrem yang sama.

Jelasnya untuk menentukan taksiran maksimum likelihood dari θ, langkah-langkahnya :

1. Tentukan fungsi likelihood $L(\theta) = f(x_1, \theta).f(x_2, \theta)\ldots f(x_n, \theta)$.
2. Bentuk logaritma natural likelihood $K(\theta) = \ln L(\theta)$.
3. Bentuk persamaan likelihood dan selesaikan $\dfrac{\partial K(\theta)}{\partial \hat{\theta}_i} = 0$

Sebagai contoh, misalkan X berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan varian σ^2 tidak diketahui. Taksiran maksimum likelihood untuk μ dan σ^2 adalah :

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-(1/2\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

Dengan menggunakan logaritma natural, maka fungsi likelihoodnya adalah :

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln (2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

maka

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial (\sigma^2)} = \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

Sehingga dihasilkan estimator maksimum likelihood, yaitu :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

2.3 Distribusi Normal

Fungsi densitas distribusi normal multivariat dibentuk dari fungsi densitas distribusi normal univariat dengan dimensi $p \geq 2$. Distribusi normal univariat dengan rataan μ dan varian σ^2 mempunyai fungsi densitas sebagai berikut :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (2.3.1)$$

Fungsi densitas normal dengan rataan μ dan variansi σ^2 sering ditulis dengan N (μ, σ^2). Jadi N (10,9) menunjukkan fungsi densitas normal dengan rataan 10 dan $\sigma^2 = 3$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Notasi ini kemudian akan diperluas untuk kasus multivariat.

Bentuk persamaan di bawah ini :

$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = (x-\mu)(\sigma^{-2})(x-\mu) \qquad (2.3.2)$$

merupakan bagian dalam eksponensial dari fungsi densitas normal univariat.

Persamaan (2.3.1) dapat dibentuk untuk vektor x yang mempunyai dimensi p x 1 :

$$(x-\mu)^T Q(n)^{-1}(x-\mu) \qquad (2.3.3)$$

Vektor μ (p x 1) menunjukkan nilai harapan vektor acak x dan matriks Q(n) (p x p) menunjukkan kovariansi matriks dengan asumsi bahwa Q(n) adalah definit positif.

Densitas normal multivariat dihasilkan dengan mengganti persamaan (2.3.2) dan (2.3.3) dan memasukkannya ke dalam fungsi (2.3.1). Jika penggantian ini telah bulat, maka konstanta normal univariat $(2\pi)^{-0,5}(\sigma^2)^{-0,5}$ harus diubah ke dalam bentuk yang lebih umum :

$$e^{-0,5(x-\mu)^T Q(n)^{-1}(x-\mu)} = 1$$

maka diperlukan konstanta $(2\pi)^{\frac{p}{2}}|Q(n)|^{\frac{1}{2}}$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dengan demikian fungsi densitas normal multivariat dengan p variat mempunyai bentuk :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |Q(n)|^{\frac{1}{2}}} \text{ekp}\left(-0{,}5(x-\mu)^T Q(n)^{-1}(x-\mu)\right)$$

Yang dinyatakan dengan $N_p(x, Q(n))$

$$\text{dengan } (x-\mu) = \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ x_p - \mu_p \end{pmatrix}$$

dan matriks kovariansinya, adalah :

$$Q(n) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & \cdots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$$

2.4 Vektor

Definisi 2.4.1 :

Vektor adalah suatu kuantitas (besaran) yang mempunyai besar dan arah.

Contoh : Kecepatan, percepatan, gaya, berat, pergesaran titik.

Definisi 2.4.2 :

Penjumlahan dua vektor $a = [a_1, a_2, ..., a_n]$ dan $b = [b_1, b_2, ..., b_n]$ adalah vektor, berlaku :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$a + b = [a_1, a_2, \ldots, a_n] + [b_1, b_2, \ldots, b_n]$$

$$= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n]$$

Definisi 2.4.3 :

Perkalian vektor $a = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ dengan skalar k adalah vektor.

$$ka = k\,[a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

$$= [ka_1, ka_2, \ldots, ka_n]$$

2.5 Matriks

Definisi 2.5.1 :

Matriks adalah kumpulan bilangan yang disusun secara empat persegi panjang (menurut baris dan kolom).

Bilangan tersebut disebut elemem-elemen matriks. Secara umum sebuah martiks $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$. Berarti banyaknya baris adalah m dan banyaknya kolom adalah n.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.5.2 :

Pandang $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ adalah matriks yang berukuran sama. Jumlah dari matriks A dan B adalah matriks $C = (c_{ij})$ yang berukuran sama, dengan $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ untuk setiap i dan j, sehingga $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi 2.5.3 :

$A = (a_{ij})$ adalah suatu matriks dan k adalah suatu skalar, hasil suatu kA adalah suatu matriks yang diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan k.

Contoh :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ maka $2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

Definisi 2.5.4 :

Pandang $A = (a_{ij})$ berukuran p x q dan $B = (b_{ij})$ berukuran q x r. Perkalian matriks AB adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ yang berukuran p x r dengan $c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}+b_{2j}+...+a_{iq}b_{qj}$, berlaku untuk setiap i = 1, 2, ..., p dan j = 1, 2, ..., r

Syarat perkalian matriks adalah banyaknya kolom matriks pertama sama dengan banyaknya baris matriks kedua.

Contoh :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Karena banyaknya kolom matriks A sama dengan banyaknya baris matriks B, maka A x B ada dan berukuran 1 x 1.

$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= (1\ 1)$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi 2.5.5 :

Pandang A = (a_{ij}) berukuran m x n. Transpose dari A adalah A^T = (a_{ji}) berukuran n x m, untuk i = 1, 2, ..., n.

Definisi 2.5.6 :

A adalah matriks yang mempunyai jumlah baris dan kolom sama maka A disebut matriks bujursangkar.

Definisi 2.5.7 :

A matriks bujursangkar yang mempunyai ukuran n x n, dikatakan simetri jika A = A^T dengan $a_{ij} = a_{ji}$ untuk i = 1, 2, ..., m dan j = 1, 2, ..., n.

2.6 Determinan

Definisi 2.6.1 :

Barisan bilangan-bilangan (j_1, j_2, ..., j_n) dengan $j_i \neq j_k$, untuk $i \neq k$ (i dan k = 1, 2, ..., n) dan j_i salah satu dari bilangan asli (1, 2, ..., n) disebut permutasi.

Definisi 2.6.2 :

Yang dimaksud sebuah inversi pada suatu permutasi (j_1, j_2, ..., j_n) adalah adanya j_k yang mendahului j_i padahal $j_i < j_k$ (i dan k = 1, 2, ..., n).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh :

(2, 1, 4, 3) maka terdapat dua inversi :

1. 2 mendahului 1
2. 4 mendahului 3

Definisi 2.6 3 :

Misalkan $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ suatu permutasi maka tanda dari permutasi tersebut ditulis dengan $b(j_1, j_2, \ldots, j_n) = (+1)$ jika inversinya genap dan (-1) jika inversinya ganjil.

Definisi 2.6.4 :

Determinan dari matriks bujursangkar A yang berukuran n x n adalah jumlah dari semua n! hasil kali bertanda dari elemen-elemen matriks A itu.

$\text{Det}(A) = |A| = \sum b(j_1, j_2, \ldots, j_n)\, a_{ij_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$

Terdapat suatu sifat determinan yang penting yaitu misalkan A adalah matriks bujursangkar berukuran n x n dan k adalah sembarang skalar, maka :

$\det(kA) = k^n \det)A)$

Dengan menggunakan definisi-definisi dari 2.6 dapat dijelaskan sifat determinan tersebut.

$$\text{Misal } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$|A| = \sum b(j_1, j_2, \ldots, j_n)\, a_{1ij_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

$$|B| = \sum b(j_1, j_2, \ldots, j_n)\, ka_{1j_1} ka_{2j_2} \ldots ka_{nj_n}$$

$$= k^n \sum b(j_1, j_2, \ldots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

$$= k^n |A|$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)