BAB II

MATERI DASAR

Dalam bab ini akan dijelaskan beberapa materi yang akan menunjang bab selanjutnya. Pada analisa statistik banyak dipergunakan teori vektor, teori matrik dan distribusi-distribusi. Untuk lebih jelasnya akan diterangkan dalam bab ini.

2. 1. Konsep vektor.

Teori vektor memegang peranan yang sangat penting dalam statistik, karena dalam penjabaran statistik dipergunakan beberapa definisi dari vektor. Akan dijelaskan beberapa difinisi yang akan dipergunakan dalam bab ini.

Definisi 2. 1. 1. : m tupel bilangan riil $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ditulis dalam satu kolom disebut vektor kolom. Apabila ditulis dalam satu baris disebut vektor baris.

Untuk selanjutnya vektor akan dinotasikan dengan huruf kecil bercetak tebal **x, y, z** dan seterusnya.

contoh 1 : $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, dan transposenya $\mathbf{x}' = [\,1 \quad 0 \quad 0\,]$.

Definisi 2. 1. 2. : Ruang (space) dari m tupel dengan perkalian skalar dan penjumlahan vektor disebut ruang vektor berdimensi – m.

Definisi 2. 1. 3. : Himpunan vektor $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ disebut tak bebas linier bila terdapat m bilangan $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ tidak semuanya 0 sedemikian hingga :

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_m\mathbf{x}_m = 0$$

Apabila tidak, himpunan tersebut disebut bebas linier.

Definisi 2. 1. 4. : Setiap m vektor yang bebas linier disebut basis untuk ruang vektor berdimensi $- m$.

Definisi 2. 1. 5. : Jika V adalah sebuah ruang hasil kali dalam, maka norma (atau panjang) vektor $\mathbf{u}$ dinyatakan oleh $\|\mathbf{u}\|$ dan didefinisikan oleh

$$\|\mathbf{u}\| = <\mathbf{u}, \mathbf{u}>^{\frac{1}{2}}$$

Contoh 2 : Misal $\mathbf{u} = [\,1 \quad 0 \quad 1\,]$, maka

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= <\mathbf{u}, \mathbf{u}>^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{(1.\ 1 + 0.\ 0 + 1.\ 1)} \\ &= \sqrt{2}\ . \end{aligned}$$

Definisi 2. 1. 6. : Sebuah himpunan dari vektor-vektor didalam sebuah ruang perkalian dalam dinamakan sebuah himpunan ortogonal bila semua pasangan vektor-vektor yang berbeda didalam himpunan tersebut ortogonal. Sebuah himpunan ortogonal didalam mana setiap vektor mempunayi norm 1 dinamakan ortonormal.

Contoh 3 : Ambil misal suatu vektor dalam ruang bagian berdimensi – 3 :

$\mathbf{v}_1 = [\ 0,\ 1,\ 0\ ]$, $\mathbf{v}_2 = [\ 1/\sqrt{2},\ 0,\ 1/\sqrt{2}\ ]$, $\mathbf{v}_3 = [\ 1/\sqrt{2},\ 0,\ -1/\sqrt{2}\ ]$

Himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ortonormal bila R^3 mempunyai perkalian dalam, karena :

$< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > \ = \ < \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 > \ = \ < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 > \ = \ 0$, dan

$\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = 1$

Definisi 2. 1. 7. : Diambil V suatu himpunan dan $V \subset R^n$. Maka V disebut ruang bagian jika V tertutup terhadap operasi pada kombinasi linier, yaitu untuk semua $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in V$ dan untuk semua $a_1, a_2, \ldots, a_p \in R^1$.

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ \ldots \ + a_p\mathbf{v}_p \in V$$

Catatan **u** adalah kombinasi linier pada $\mathbf{v}_i$ bila $a_1, a_2, \ldots, a_p \in R^1$, sedemikian hingga $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ \ldots \ + a_p\mathbf{v}_p$.

Definisi 2. 1. 8. : Diambil V suatu ruang bagian $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in V$. Maka $\mathbf{v}_i$ disebut basis untuk V jika bebas linier dan membangun V. Jika $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ dan $< \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j >= 0$ untuk $i \neq j$, maka $\mathbf{v}_i$ adalah basis ortonormal untuk V.

2. 2 Konsep Matrik

Oleh karena banyaknya konsep-konsep dasar dalam analisa statistik menggunakan matrik, sebab itu akan lebih baik bila ditinjau terlebih dahulu beberapa definisi pada matrik aljabar.

Definisi 2.2.1. : Matrik **A** bertipe $m \times k$ ditulis dengan huruf besar tebal adalah daftar bilangan dengan m baris dan k kolom.

Apabila baris dan kolom ditukar menjadi tipe kxm disebut transpose dari matrik **A.**

Definisi 2.2.2. : Matrik **B** sedemikian hingga **AB= BA=I** disebut invers dari matrik **A** diberi notasi $\mathbf{A}^{-1}$.

Catatan : **I** adalah matrik identitas yaitu matrik bujur sangkar dengan elemen-elemen pada diagonal 1 dan elemen yang lain 0.

Definisi 2.2.3. : $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$ matrik bujur sangkar bertipe $k \times k$. Trace dari **A** ditulis tr (**A**) adalah jumlah elemen-elemen pada diagonal.

$$tr(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^{k} a_{ii}$$

Contoh 4 : $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, maka $tr(\mathbf{A}) = 2+3=5$

Definisi 2.2.4. : Matrik **X** berukuran $n \times p$ adalah matrik basis untuk V bila kolom-kolom pada **X** membentuk basis untuk V. Matrik **X** adalah matrik basis ortonormal bila kolom-kolom pada **X** membentuk basis ortonormal untuk V.

2.3. Ortogonalitas dan Proyeksi

Ambil **u, v** $\in R^n$. Maka **u** ortogonal pada **v** ditulis **u** $\perp$ **v**, jika $\langle u,v \rangle = 0$.

Definisi 2.3.1. : Ambil V ruang bagian pada R^n. Komplemen ortogonal pada V ditulis $V^{\perp}$ adalah himpunan semua vektor-vektor ortogonal pada V.

Definisi 2.3.2. : Ambil $\mathbf{y} \in R^n$ dan V ruang bagian pada R^n. Proyeksi ortogonal dari $\mathbf{y}$ pada V ditulis $\mathbf{P}_V\mathbf{y}$ adalah sebuah vektor $\mathbf{v}$ sedemikian hingga $\mathbf{v} \in V$ dan $\mathbf{y} - \mathbf{v} \in V^{\perp}$.

Suatu vektor $\mathbf{y}$ - $\mathbf{P}_V\mathbf{y}$ adalah komponen dari $\mathbf{y}$ yang ortogonal pada V.

Contoh 5 : Misal R^3 mempunyai perkalian dalam dan V adalah sub ruang yang direntang oleh vektor-vektor ortogonal $\mathbf{v}_1$ = (0,1,0) dan $\mathbf{v}_2$ = $(-\frac{4}{5},0,\frac{3}{5})$. Proyeksi ortogonal dari $\mathbf{y}$ = (1,1,1) pada $\mathbf{v}$ adalah :

$$\mathbf{P}_V\mathbf{y} = \langle \mathbf{y},\mathbf{v}_1\rangle\, \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{y},\mathbf{v}_2\rangle\, \mathbf{v}_2$$

$$= (1\cdot0+1\cdot1+1\cdot0)(0;1,0)+(1\cdot-4/5+1\cdot0+1\cdot3/5)(-4/5,0,3/5)$$

$$=1\cdot(0,1,0)+(-1/5)\cdot(-4/5,0,3/5)= (4/25,1,-3/25)$$

Komponen dari $\mathbf{y}$ yang ortogonal pada V:

$$\mathbf{y} - \mathbf{P}_V\mathbf{y} = (1,1,1) - (4/25,1,-3/25)$$

$$=(21/25,0,28/25)$$

Dapat dilihat bahwa $\mathbf{y}$ - $\mathbf{P}_V\mathbf{y}$ ortogonal pada $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$, sehingga vektor ini ortogonal pada setiap vektor dalam V, ditulis $\mathbf{y}$ - $\mathbf{P}_V\mathbf{y} \in V^{\perp}$.

Theorema 2.3.1. : Jika $\mathbf{v} \in V$, maka $\|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{P}_V\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{P}_V\mathbf{y} - \mathbf{v}\|^2$

Bukti :

Diketahui $\mathbf{y} - \mathbf{P}_V\mathbf{y} \in V^{\perp}$ dan $\mathbf{P}_V\mathbf{y} - \mathbf{v} \in V$, oleh karena itu : $(\mathbf{y} - \mathbf{P}_V\mathbf{y}) \perp (\mathbf{P}_V\mathbf{y} - \mathbf{v})$, sehingga :

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{P}_V\mathbf{y} + \mathbf{P}_V\mathbf{y} - \mathbf{v}\|^2$$

$$= \|(\mathbf{y} - \mathbf{P}_V\mathbf{y}) + (\mathbf{P}_V\mathbf{y} - \mathbf{v})\|^2$$

$$=<(\mathbf{y}-\mathbf{P}_V\mathbf{y})+(\mathbf{P}_V\mathbf{y}-\mathbf{v}),(\mathbf{y}-\mathbf{P}_V\mathbf{y})+(\mathbf{P}_V\mathbf{y}-\mathbf{v})>$$

$$=\|\mathbf{y}-\mathbf{P}_V\mathbf{y}\|^2+2<\mathbf{y}-\mathbf{P}_V\mathbf{y},\mathbf{P}_V\mathbf{y}-\mathbf{v}>+\|\mathbf{P}_V\mathbf{y}-\mathbf{v}\|^2$$

$$=\|\mathbf{y}-\mathbf{P}_V\mathbf{y}\|^2+0+\|\mathbf{P}_V\mathbf{y}-\mathbf{v}\|^2$$

$$=\|\mathbf{y}-\mathbf{P}_V\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{P}_V\mathbf{y}-\mathbf{v}\|^2 .$$ ■

Theorema 2.3.2. : $\mathbf{P}_V\perp\mathbf{y}=\mathbf{y}-\mathbf{P}_V\mathbf{y}\Rightarrow\|\mathbf{P}_V\perp\mathbf{y}\|^2=\|\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{P}_V\mathbf{y}\|^2$

Bukti :

Dari theorema 2. 3. 1, diperoleh :

$$\mathbf{P}_V\perp\mathbf{y}=\mathbf{y}-\mathbf{P}_V\mathbf{y}$$

$$\|\mathbf{P}_V\perp\mathbf{y}\|^2=\|\mathbf{y}-\mathbf{P}_V\mathbf{y}\|^2$$

$$=<\mathbf{y}-\mathbf{P}_V\mathbf{y},\mathbf{y}-\mathbf{P}_V\mathbf{y}>$$

$$=\|\mathbf{y}\|^2-2<\mathbf{y},\mathbf{P}_V\mathbf{y}>+\|\mathbf{P}_V\mathbf{y}\|^2$$

$$=\|\mathbf{y}\|^2-2\|\mathbf{P}_V\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{P}_V\mathbf{y}\|^2$$

$$=\|\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{P}_V\mathbf{y}\|^2$$ ■

Theorema 2.3.3. : Jika dim $V=p$, maka $tr\,\mathbf{P}_V=p$

Bukti :

dim $V=p$, berarti $\mathbf{X}$ adalah suatu matrik p x n.

$$tr\,\mathbf{P}_V=tr\,\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

$$=tr\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\mathbf{X}'$$

$$=tr\,\mathbf{I}=p$$ ■

2. 4. Ekspektasi.

Definisi 2.4.1. : Ekspektasi dari variabel random X.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \, P(X = x_i) \qquad \text{, diskrit}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X f_x(X)\, dx \qquad \text{, kontinu}$$

dengan $\sum |X_i| P(X = x_i) < \infty, \ \sum P(X = x_i) = 1$

$$\int X f_x(X)\, dx < \infty, \ \int f_x(X)\, dx = 1$$

sifat : a). E(X+a) = E(X) + a.

b). E(aX) = a E(X).

2. 5. Fungsi Distribusi.

Definisi 2.5.1. : Suatu variabel random X adalah suatu fungsi bernilai real dengan daerah definisi Ω yakni untuk setiap $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in R = \{y : -\infty < y < +\infty\}$.

Definisi 2.5.2. : Bila X suatu variabel random , fungsi distribusinya didefinisikan sebagai berikut :

$$F_X(x) = P[X \le x] \quad \text{untuk semua } x \in (-\infty, +\infty)$$

Definisi 2.5.3. : Fungsi pembangkit momen dari suatu variabel random X didefinisikan untuk setiap bilangan real t sebagai $\psi_X(t) = Ee^{tX}$.

Theorema 2.5.1. : Jika dua variabel random X dan Y mempunyai fungsi karakteristik yang sama maka fungsi distribusinya sama.

Bukti :

Fungsi distribusi F_X dan F_Y dapat mempunyai beberapa nilai diskontinyu.

Ambil C = {u : u adalah nilai diskontinyu pada F_X atau F_Y}. Jika a < b, interval {u ; a < u < b} dapat dengan mudah dihitung nilai-nilai komplemen pada C.

$$F(u_2) - F(u_1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itu_2} - e^{-itu}}{-it} \phi(t)dt$$

Untuk setiap $u_2 \notin$ C dan $u_1 \notin$ C, kita dapat :

$$F_X(u_2) - F_X(u_1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} K(u_2, u_1, t)\phi_X(t)dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} K(u_2, u_1, t)\phi_Y(t)dt = F_Y(u_2) - F_Y(u_1)$$

Karena $\phi_X(t) = \phi_Y(t)$ untuk semua nilai-nilai nyata t. Jadi $F_X(u_2) - F_X(u_1) = F_Y(u_2) - F_Y(u_1)$. Ambil $u_1 \to -\infty$ dan karena F_X dan F_Y fungsi distribusi, $F_X(u_1) \to 0$ dan $F_Y(u_1) \to 0$, sehingga $F_X(u_2) = F_Y(u_2)$ untuk setiap $u_2 \notin$ C.

Dari definisi limit diperoleh

$$F_X(a) = \lim_{\substack{u_2 \notin C, u_2 > a \\ u_2 \to a}} F_X(u_2) = \lim_{\substack{u_2 \notin C, u_2 > a \\ u_2 \to a}} F_Y(u_2) = F_Y(a)$$

sehingga F_X dan F_Y fungsi yang sama. ■

2.5.1. Distribusi Normal.

Definisi 2.5.1.1 : Suatu variabel random X berdistribusi normal $N(\mu, \sigma^2)$ bila

(untuk suatu $\sigma^2 > 0$, $-\infty < \mu < +\infty$)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad , \quad -\infty < x < +\infty$$

Distribusi $N(0, 1)$ disebut distribusi normal baku.

Definisi 2.5.1.2. : Suatu variabel random $X = (X_1, \ldots, X_n)$ berdistribusi normal multivariat $N(\mu, \Sigma)$ dengan :

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_n \end{bmatrix},$$

suatu vektor dengan n unsur bilangan real dan

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{1n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \sigma_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

adalah sembarang matrik definit positif yang berukuran $n \times n$ dengan unsur bilangan real bila (dimisalkan $x = (x_1, \ldots, x_n)'$)

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\Sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right]$$

untuk suatu vektor **x** yang berupa bilangan nyata.

Theorema 2.5.1.1. : Ambil **X** vektor random dengan vektor mean μ dan matrik kovarian Σ.

$$E\|\mathbf{X}\|^2 = \|\mu\|^2 + tr\,\Sigma.$$

Bukti :

Ambil :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_n \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \Sigma_{1n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \Sigma_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \Sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

maka $E\|\mathbf{X}\|^2 = E\sum_i X_i^2 = \sum_i EX_i^2 = \sum_i (\mu_i^2 + \Sigma_{ii})$

$$= \|\mu\|^2 + tr\Sigma$$ ■

2.5.2. Distribusi Gamma

Definisi 2.5.2.1. : Suatu variabel random X berdistribusi Gamma $G(x|\alpha,\beta,A)$ bila (untuk suatu $\alpha > -1, \quad \beta > 0, \quad -\infty < A < +\infty$)

$$f_X(x) = \left\{\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}(x-A)^{\alpha} \exp\left(\frac{-(x-A)}{\beta}\right)\right. \qquad , A \le x < \infty$$

2.5.3. Distribusi χ^2

Ambil $X_1, \ldots, X_n$ variabel random independen sedemikian hingga $X_i \sim N_1(\mu_i, 1)$. Didefinisikan :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \text{ dan } \delta = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 .$$

Dikatakan Y mempunyai distribusi χ^2 noncentral dengan derajat kebebasan n dan parameter noncentral δ. Dinotasikan dengan $Y \sim \chi_n^2(\delta)$.

Definisi 2.5.3.1. : Suatu variabel random X berdistribusi Khi-kuadrat dengan derajat kebebasan n dinyatakan dengan $\chi_n^2(0)$, bila (untuk suatu bilangan bulat $n > 0$)

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(n/2\right)} x^{(n/2)-1} \exp\left(\frac{-x}{2}\right) \qquad ,0 \le x < \infty$$

Definisi 2.5.3.2. : Suatu variabel random X berdistribusi Khi-kuadrat taksentral dengan derajat kebebasan n dan ketaksentralan λ , misalnya $\chi_n^2(\lambda)$, bila (untuk suatu bilangan bulat $n > 0$, $\lambda \ge 0$)

$$f_X(x) = \exp(-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i x^{(1/2)(n+2i)-1} e^{-x/2}}{i!\, 2^{(1/2)(n+2i)} \Gamma\left(\frac{n+2i}{2}\right)} \qquad , 0 \le x < \infty$$

Contoh 6 :

Misal X berdistribusi gamma $G(x|\alpha,\beta,A=0)$, Maka fungsi pembangkit momen dari X adalah :

$$\psi_X(t) = Ee^{tX} = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{x^{\alpha}}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} e^{-x/\beta} dx \qquad = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} e^{-x(1-\beta t)/\beta}}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} dx$$

$$= \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha} e^{-y/\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} dy \qquad = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+1}}$$

Bila dipilih $\alpha = \frac{n}{2} - 1$, $\beta = 2$, maka X berdistribusi Khi-kuadrat dengan derajat kebebasan n. Sehingga fungsi pembangkit momen, mean dan variansi adalah :

$$\psi_{X(t)} = \frac{1}{(1-2t)^{n/2}} \qquad \text{, untuk } |t| < 1/2$$

$$E(X) = n \qquad \text{dan} \qquad \text{Var}(X) = 2n$$

2.5.4. Distribusi Poisson

Distribusi Poisson dengan parameter $\theta > 0$, diberikan oleh :

$$P_K = \frac{e^{-\theta}\theta^K}{K!} \text{ , untuk } K = 0, 1, 2, \ldots .$$

Ambil X variabel random mempunyai distribusi Poisson, maka :

$$E(X) = \sum_{K=0}^{\infty} K P_K = \sum_{K=0}^{\infty} K \frac{e^{-\theta}\theta^K}{K!}$$

$$= e^{-\theta} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\theta^{(K-1)}}{(K-1)!}$$

$$= \theta e^{-\theta} . e^{\theta} = \theta$$

dan : $E[X(X-1)] = \sum_{K=2}^{\infty} K(K-1)P_K = \theta^2 e^{-\theta} \sum_{K=2}^{\infty} \frac{\theta^{(K-2)}}{(K-2)!} = \theta^2$

$$E[X^2] = E[X(X-1)] + E(X) = \theta^2 + \theta$$

sehingga :

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E(X))^2 = \theta^2 + \theta - \theta^2 = \theta$$

Jadi distribusi Poisson mempunyai karakteristik yang istimewa karena mean dan variansi yang diberikan nilainya sama.

2.6. Model Linier

Diambil V ruang bagian berdimensi p pada ruang R^n . Andaikan model dari vektor random :

$$\mathbf{Y} \sim N_n(\mu, \sigma^2 \mathbf{I}) \qquad , \mu \in V \qquad , \sigma^2 > 0 \qquad \ldots (2.1)$$

dengan : $\mathbf{Y}$: vektor random berdimensi $-n$.

μ : vektor mean.

$\sigma^2\mathbf{I}$: matrik kovarian.

Model (2.1) dinamakan *Model Linier*. Didefinisikan :

$$\hat{\mu} = \mathbf{P}_V \mathbf{Y}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{\|\mathbf{P}_V \bot \mathbf{Y}\|^2}{n-p}$$

Theorema 2.6.1. : $\hat{\mu} \sim N_n(\mu, \sigma^2 \mathbf{P}_V), \quad (n-p)\hat{\sigma}^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{n-p}(0)$

Bukti :

V dan $V^{\bot}$ ortogonal, $\mathbf{P}_V\mathbf{Y}$ dan $\mathbf{P}_V \bot \mathbf{Y}$ saling bebas, begitu juga $\hat{\mu}$ dan $\hat{\sigma}^2$ saling bebas, sehingga dengan fungsi pembangkit momen :

$$\psi_{\mathbf{P}_V\mathbf{Y}}(t) = Ee^{t'\mathbf{P}_V\mathbf{Y}} = E(e^{(\mathbf{P}_V{}'t)'\mathbf{Y}}) = \psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{P}_V{}'t)$$

$$= e^{(\mathbf{P}_V{}'t)'\mu + \frac{1}{2}(\mathbf{P}_V{}'t)'(\sigma^2\mathbf{I})(\mathbf{P}_V{}'t)} = e^{t'(\mathbf{P}_V\mu) + \frac{1}{2}t'(\mathbf{P}_V\sigma^2\mathbf{P}_V{}')t}$$

dan dari teorema (2.5.1) didapat $\mathbf{P}_V\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{P}_V\mu, \sigma^2\mathbf{P}_V)$.

Sekarang ambil $\mathbf{X}$ adalah matrik basis ortonormal, dan $\mathbf{Z} = \frac{1}{\sigma}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}'\mathbf{Y})$, $\nu = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mathbf{X}'\mu)$, $\mathbf{Z} \sim N(\mu, \mathbf{I})$. Dengan fungsi pembangkit momen diperoleh :

$$\psi_{(\frac{\mathbf{Y}-\mathbf{X}'\mathbf{Y}}{\sigma})}(t) = Ee^{t'(\frac{\mathbf{Y}-\mathbf{X}'\mathbf{Y}}{\sigma})} = Ee^{((\frac{\mathbf{1}-\mathbf{X}'}{\sigma})'t)'\mathbf{Y}}$$

$$= \psi_{\mathbf{Y}}((\tfrac{\mathbf{1}-\mathbf{X}'}{\sigma})'t) = e^{((\frac{\mathbf{1}-\mathbf{X}'}{\sigma})'t)'\mu + \frac{1}{2}(\frac{\mathbf{1}-\mathbf{X}'}{\sigma})t'\sigma^2\mathbf{I}(\frac{\mathbf{1}-\mathbf{X}}{\sigma})'t} = e^{(\frac{\mu-\mathbf{X}'\mu}{\sigma})t' + \frac{1}{2}t'(\frac{\mathbf{1}-\mathbf{X}'}{\sigma})\sigma^2\mathbf{I}(\frac{\mathbf{1}-\mathbf{X}}{\sigma})'t}$$

Sehingga $\dfrac{\mathbf{Y}-\mathbf{X}'\mathbf{Y}}{\sigma} \sim N(\dfrac{\mu - \mathbf{X}'\mu}{\sigma}, \mathbf{I})$.

Karena dim $(V^{\bot})$ = n – p dan dari definisi distribusi Khi-kuadrat $\mathbf{Z}'\mathbf{Z} \sim \chi^2_{n-p}(\nu'\nu)$, sehingga diperoleh :

$$(n-p)\hat{\sigma}^2 = \|\mathbf{P}_V \bot \mathbf{Y}\|^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{n-p}\left(\frac{\|\mathbf{P}_V \bot \mu\|^2}{\sigma^2}\right)$$

karena $\mathbf{P}_V \perp \mu = 0$ maka didapat : $(n-p)\hat{\sigma}^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{n-p}(0)$ ■

2.7. Estimator Kuadrat Terkecil Biasa

Notasi $\mathbf{u} \sim (0,\Sigma)$ berarti bahwa $\mathbf{u}$ adalah vektor pengganggu yang mempunyai ekspektasi $E(\mathbf{u}) = 0$ dan kovarian $E(\mathbf{uu}') = \Sigma$. Dalam kasus khusus dengan $\Sigma = \sigma^2\mathbf{I}$, sehingga elemen-elemen dari vektor pengganggu tidak berkorelasi, maka estimator standar dari β adalah estimator kuadrat terkecil biasa yang berbentuk :

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \tag{2.2}$$

yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$\hat{\beta} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \text{ atau } \hat{\beta} = \mathbf{GX}'\mathbf{Y} \text{ dengan } \mathbf{T} = \mathbf{X}'\mathbf{X} \text{ dan } \mathbf{G} = \mathbf{T}^{-1}.$$

Persamaan (2.2) dinamakan *Estimator Kuadrat Terkecil Biasa* untuk β.

2.8. Regresi Linier Sederhana.

Apabila dua variabel X dan Y mempunyai korelasi maka perubahan nilai yang satu akan mempengaruhi nilai variabel lainnya. Hubungan variabel dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi. Apabila bentuk fungsi sudah diketahui, maka dengan mengetahui nilai dari satu variabel (X), nilai variabel yang lainnya (Y) dapat diramalkan. Variabel yang diramalkan harus ditulis disebelah kiri persamaan yang disebut variabel tak bebas, dan variabel yang nilainya dipergunakan untuk meramalkan disebut variabel bebas. Bentuk umum regresi linier sederhana : $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$, dengan Y = variabel tak bebas, X_1 = variabel bebas , β_0 dan β_1 adalah parameter dan ε adalah galat error.

2.9. Regresi Linier Berganda.

Seringkali dijumpai dalam penelitian yang menggunakan analisis Regresi, digunakan lebih dari satu variabel independen. Sebagai contoh Y = produksi padi, dipengaruhi oleh X_1 = bibit, X_2 = pupuk, X_3 = curah hujan. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut maka digunakan Regresi Linier Berganda yang mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ . \ . \ . \ + \varepsilon$$

Untuk menyatakan model ini dengan matriks didefinisikan matriks-matriks sebagai berikut :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{T}_1 \\ 1 & \mathbf{T}_2 \\ 1 & \mathbf{T}_3 \\ 1 & \mathbf{T}_4 \\ 1 & \mathbf{T}_5 \end{bmatrix} \qquad ,\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} \qquad ,\beta = \begin{pmatrix} \delta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

dengan $\mathbf{T}_i'$ adalah vektor (p-1) x 1 pada **X**. δ adalah sebuah angka yang belum diketahui dan γ adalah vektor (p-1) x 1 yang belum diketahui .